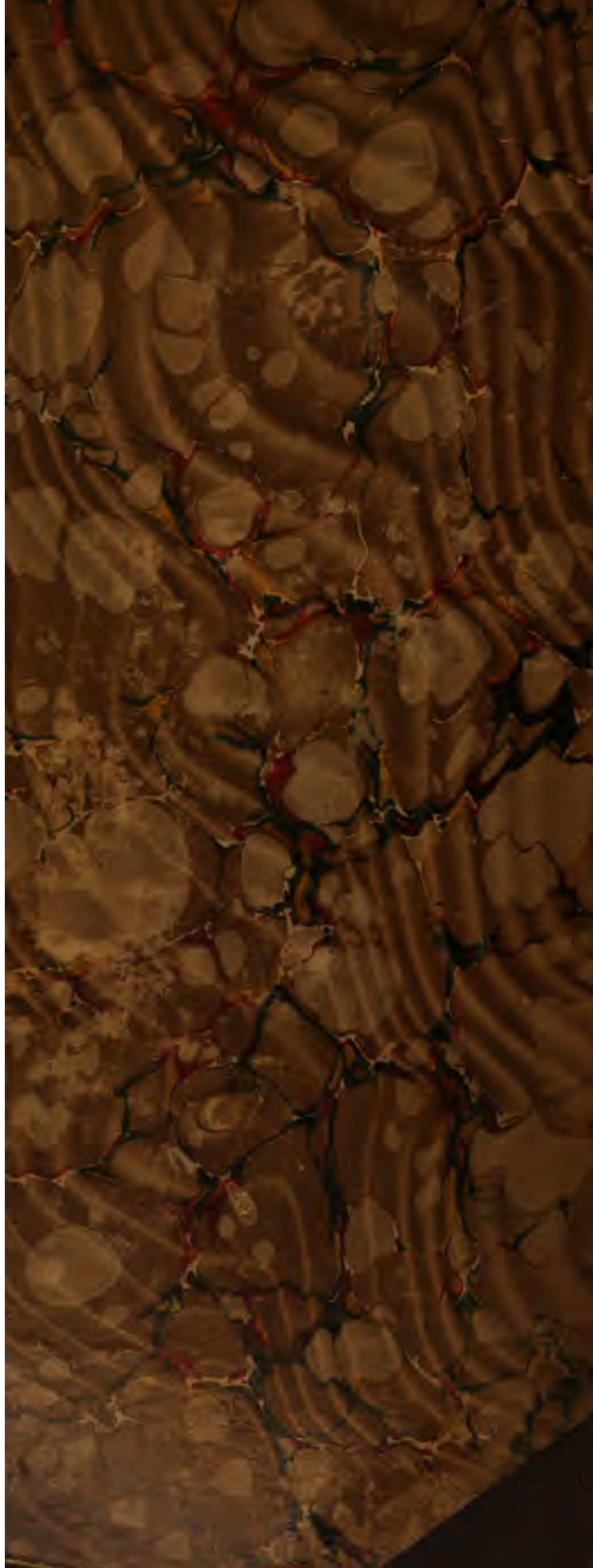
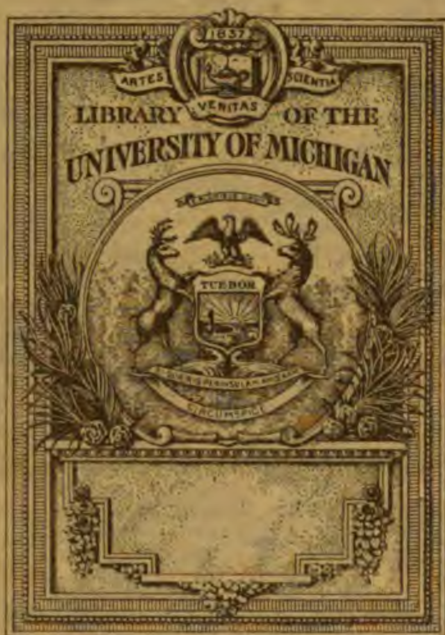



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR



LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ

ET

LE MAGNÉTISME

Corbeil. Imprimerie Éd. Crété.

LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ

ET

LE MAGNÉTISME

DE

E. MASCART ET J. JOUBERT

DEUXIÈME ÉDITION ENTIÈREMENT REFONDUE

PAR

E. MASCART

MEMBRE DE L'INSTITUT
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE
DIRECTEUR DU BUREAU CENTRAL MÉTÉOROLOGIQUE

TOME PREMIER

PHÉNOMÈNES GÉNÉRAUX ET THÉORIE

Avec 126 Figures dans le texte.

PARIS

MASSON ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE
120, Boulevard Saint-Germain

GAUTHIER-VILLARS ET FILS
IMPRIMEURS-ÉDITEURS
Quai des Grands-Augustins, 55

1896

PRÉFACE

L'accueil fait par le public à cet ouvrage, épuisé depuis plusieurs années, nous engageait à en donner une seconde édition, mais il a paru nécessaire d'en remanier presque entièrement la rédaction pour tenir compte des progrès accomplis dans le domaine de l'électricité. J'ai le plus vif regret que les occupations de mon ami M. Joubert ne lui aient pas permis de me continuer encore son précieux concours.

Le fait le plus marquant dans les découvertes récentes est l'importance exceptionnelle acquise par les courants alternatifs, aussi bien dans les travaux purement scientifiques que dans les applications industrielles.

Les belles expériences de Hertz ont apporté une confirmation éclatante à la théorie de Maxwell sur les relations qui existent entre l'électricité et la lumière. Les deux ordres de phénomènes sont régis par les mêmes lois fondamentales ; leur propagation se fait avec la même vitesse et les propriétés des oscillations électriques présentent l'analogie la plus étroite avec celles des rayons lumineux. L'ensemble de ces expériences et des considérations théoriques qui les ont presque toujours suscitées marque une date qui restera longtemps célèbre dans l'histoire de la philosophie naturelle.

D'autre part, les courants alternatifs, qui se produisent naturellement dans le jeu des machines, n'eurent d'abord qu'un emploi très restreint, à peu près limité à l'entretien des puissants foyers de lumière. Pour les autres applications, on pouvait bien redresser ces courants à l'aide de commutateurs plus ou moins imparfaits, mais aucune des dispositions adoptées ne présentait les qualités de bon fonctionnement et de durée qu'exige la pratique.

L'anneau Gramme et son collecteur ont transformé les effets d'induction en courants quasi-continus, n'ayant plus que de faibles ondulations, sans étincelles destructives des organes de redressement, et c'est seulement à partir de cette découverte que l'électricité est devenue véritablement un agent industriel.

Enfin, une étude plus approfondie des courants alternatifs, soit simples, soit combinés entre eux de manière à obtenir ce qu'on appelle des champs tournants, a permis de les introduire directement dans la pratique et de faire entrer dans une phase nouvelle la question du transport de l'énergie à grande distance.

Les modifications apportées au texte primitif et les développements nouveaux qu'exige l'état actuel de la science n'ont pas modifié le plan général de cet ouvrage.

L'éducation électrique des lecteurs s'est d'ailleurs singulièrement perfectionnée ; il a été possible d'abréger l'exposition des idées générales, de réduire et de simplifier plusieurs démonstrations, afin de ne pas trop augmenter l'étendue des matières.

Le premier volume continuera à constituer une sorte de corps de doctrine, renfermant l'ensemble des faits et des conceptions qui ont servi à les coordonner.

Le second volume sera plus spécialement consacré à la discussion des méthodes d'observation et de mesure,

au détail des expériences et à l'examen des principaux caractères que présentent les applications si importantes de l'électricité dans l'industrie.

Au siècle dernier, les phénomènes électriques formaient un chapitre annexe de la Physique, sans liaison apparente avec les autres parties. Après les découvertes de Coulomb, de Volta, d'Ampère et de Faraday, l'électricité est devenue une des branches principales de cette science, au même titre que la chaleur et l'optique; elle tend à prendre aujourd'hui le premier rang. Son rôle industriel, la variété des phénomènes qu'elle embrasse, son intervention si générale dans un grand nombre de recherches expérimentales, les horizons qu'elle ouvre aux spéculations métaphysiques en font une science maîtresse qui captive tous les esprits et provoque les découvertes.

Je m'estimerais heureux d'avoir pu contribuer, pour une faible part, à répandre la connaissance de ce grand mouvement scientifique.

E. MASCART.

LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ

ET LE MAGNÉTISME

PREMIÈRE PARTIE. — ÉLECTRICITÉ

CHAPITRE PREMIER

PRÉLIMINAIRES

1. Électrisation. — La plupart des corps acquièrent par le frottement, au moins d'une manière temporaire, la propriété d'attirer les corps légers, tels que des fragments de papier, des barbes de plume, etc. On dit alors qu'ils sont *électrisés* ou *chargés d'électricité.* Si le corps attiré vient en contact avec le corps électrisé, il ne tarde pas à s'en détacher et être ensuite repoussé : il est alors lui-même électrisé. Les propriétés électriques peuvent ainsi se transmettre d'un corps à un autre par contact ou communication directe.

Par opposition, on appelle corps à l'état naturel, ou à l'état *neutre*, ceux qui ne présentent pas de propriétés électriques.

2. Conducteurs, Isolants. — Sur certains corps, comme le verre, la résine, la soie, le caoutchouc, etc,, l'électricité reste localisée pendant un temps plus ou moins long aux points où

on l'a produite par frottement ou par communication. Ce sont les corps *mauvais conducteurs* de l'électricité.

Pour d'autres corps, au contraire, tels que les métaux, le bois et la plupart des matériaux qui composent le sol, l'électricité produite en un point se transmet presque instantanément à toute leur étendue, au moins tant qu'ils sont soustraits à toute action extérieure; ce sont les corps *conducteurs* de l'électricité.

On ne pourra donc conserver l'électricité sur un conducteur qu'en le supportant, en l'*isolant* du sol, par un corps mauvais conducteur, tel qu'une tige de verre, de résine, de caoutchouc durci ou ébonite, des cordons de soie, etc. De là le nom d'*isolants* donné aux corps mauvais conducteurs.

En réalité, cette distinction des corps en conducteurs et isolants ne correspond pas à une différence essentielle, car il existe une sorte de gradation continue de leurs propriétés à ce point de vue. En dehors des gaz et des vapeurs qui sont des isolants presque parfaits, l'électricité se propage sur tous les corps plus ou moins rapidement.

De même, malgré la rapidité avec laquelle l'électricité se transmet sur les meilleurs conducteurs, il n'en existe pas sur lesquels la propagation soit absolument instantanée; chacun d'eux intervient par des qualités propres, une résistance particulière, et la transmission des propriétés électriques est un phénomène de nature complexe.

3. Électroscopes. — Pour reconnaître plus facilement les propriétés des corps électrisés on a recours à des instruments particuliers, dits *électroscopes*. L'un des plus simples est formé par une balle de moelle de sureau suspendue à un fil: c'est un *pendule électrique*. Le pendule est conducteur si le fil est en lin et suspendu à un support de métal relié au sol par des conducteurs; le pendule est isolé si le fil est en soie ou si le support est lui-même isolé du sol.

Il est préférable d'employer un *double pendule* formé par deux balles de sureau attachées au même point par des fils d'égale longueur.

Quand on approche d'un double pendule isolé un corps électrisé, un bâton de verre poli frotté avec de la flanelle, les balles sont attirées par le verre; si elles le touchent, elles

sont ensuite repoussées et, en outre, se maintiennent écartées l'une de l'autre. Elles ont été électrisées par le verre; des actions répulsives s'exercent soit entre les balles, soit entre chacune d'elles et le corps primitivement électrisé.

4. **Deux électricités.** — Dans le frottement réciproque de deux corps, tous deux s'électrisent, mais en présentant des caractères différents.

Disposons à quelque distance deux doubles pendules isolés, désignés par *a* et *b*. Frottons l'un contre l'autre deux disques de mêmes dimensions A et B, l'un en verre et l'autre en métal, tenus par des manches isolants. Séparant les disques, on approche le premier A du pendule *a*; les balles sont attirées; on laisse établir le contact, les balles sont alors repoussées par le disque et se maintiennent écartées; le disque A de verre est donc électrisé et il a servi à électriser par communication le double pendule *a* correspondant. Le disque B de métal approché du second pendule *b* donne les mêmes effets; il est aussi électrisé.

Les choses étant dans cet état, on croise l'expérience en approchant le disque A du pendule *b* et le disque B du pendule *a*; on constate une attraction de part et d'autre, mais on a soin de ne pas laisser les balles approcher jusqu'au contact des disques. Les corps en présence sont électrisés, car les balles de chaque pendule se repoussent et il suffit d'approcher de nouveau chacun des disques du pendule correspondant pour constater encore des répulsions, ce qui prouve que les disques restent électrisés.

Il existe donc au moins deux modes d'électrisation. Deux corps électrisés par communication directe sont dits chargés de la même espèce d'électricité, et l'on peut résumer ainsi cette expérience fondamentale : *deux corps chargés de même électricité se repoussent, deux corps chargés d'électricités différentes s'attirent.*

La même expérience permet de démontrer qu'il n'existe que deux espèces d'électricité. Les pendules *a* et *b* ayant été chargés respectivement par les deux disques, si on leur présente un corps électrisé d'une manière quelconque, on constate invariablement qu'il attire l'un des systèmes de balles et repousse l'autre; jamais il ne repousse les deux systèmes ou ne les

attire tous deux, en tant, du moins, qu'on l'approche assez lentement pour observer le premier effet; il se comporte donc comme le disque de verre ou le disque de métal.

On appelle quelquefois électricité *vitrée* celle qui se produit sur le verre poli frotté avec du drap, électricité *résineuse* celle que prend la résine également frottée avec du drap.

Comme deux corps frottés se chargent toujours d'électricités différentes, on voit par là que la nature de l'électricité produite sur un corps par frottement dépend du corps frottant, puisque le drap prend avec le verre de l'électricité résineuse et avec la résine de l'électricité vitrée.

Les deux espèces d'électricité ont des caractères opposés. Si, après avoir frotté les deux disques, on les maintient superposés et qu'on approche l'ensemble d'un pendule, aucune action apparente ne se manifeste; ils sont cependant électrisés, car il suffit de les séparer pour que l'un et l'autre exercent des attractions. C'est à cause de cette opposition de propriétés qu'on désigne respectivement par les mots de *positive* et *négative* les électricités vitrée et résineuse.

La double électrisation produite dans le frottement permet d'établir une classification des corps, en plaçant en tête celui qui devient positif avec tous les autres, à la fin celui qui devient toujours négatif, chacun des corps de la liste devenant positif avec ceux qui suivent et négatif avec ceux qui précèdent. Toutefois, une pareille classification n'est pas encore absolue, car les variations de température et les changements dans l'état physique des surfaces peuvent y amener beaucoup d'inversions.

5. Masses électriques. — Les premières expériences suffisent à montrer que les actions qui s'exercent, soit entre deux corps électrisés, soit entre un corps électrisé et un autre primitivement à l'état neutre, croissent rapidement à mesure que leur distance diminue. Pour une même distance et sur un système déterminé, l'action d'un corps varie avec son état d'électrisation; la *quantité d'électricité* qu'il possède, ou sa *masse électrique*, est, par définition, proportionnelle à cette action. Deux disques frottés et maintenus en contact n'ont pas d'action extérieure, c'est-à-dire qu'ils exercent des actions égales et de sens contraires; l'ensemble se comporte vis-à-vis de tout

corps extérieur, électrisé ou non, comme s'il était à l'état neutre. De là cette conséquence :

Par leur frottement réciproque, deux corps prennent des quantités d'électricité égales et de signes contraires.

C'est là une loi importante sur laquelle nous aurons à revenir. Toutes les fois que l'on produit sur un corps, par frottement ou de toute autre manière, une certaine quantité d'électricité positive, il se produit en même temps, sur d'autres points, une quantité égale d'électricité négative.

On est ainsi amené à considérer les quantités d'électricité comme des grandeurs algébriques, affectées des signes + ou —, suivant qu'elles sont positives ou négatives. Si l'on fait intervenir tous les corps, conducteurs ou isolants, qui entrent en jeu dans une expérience, la somme algébrique des quantités d'électricité, ou la charge totale du système, reste invariable; c'est le principe de la *conservation de l'électricité*.

L'action extérieure de deux disques superposés étant nulle à toute distance, il en résulte aussi que :

La loi suivant laquelle l'action varie avec la distance est la même pour les deux espèces d'électricité.

Lorsqu'une surface fermée renferme des masses électriques d'espèces différentes, l'action qu'elle exerce sur un corps électrisé extérieur est la résultante des actions dues à chacune des masses séparément. A une grande distance par rapport aux dimensions de la surface, cette action est simplement proportionnelle à l'excès de l'une des espèces d'électricité sur l'autre, c'est-à-dire à la charge algébrique de la surface considérée; si le corps extérieur est positif, l'action résultante est une répulsion ou une attraction, suivant que la charge totale comprise dans la surface est positive ou négative.

6. Champ électrique. — Électrisation induite. — Étincelle. — On donne le nom de *champ électrique* à toute l'étendue de l'espace dans lequel se fait sentir l'action d'un système de corps électrisés; une quantité donnée d'électricité positive y éprouverait dans un sens déterminé, qui est la *direction* du champ, une action plus ou moins grande, qui représente l'*intensité* du champ. Le champ peut être indéfini si les corps sont à l'air libre; il est limité quand on opère dans une enceinte fermée par des corps conducteurs.

L'attraction des corps légers semble indiquer qu'une action électrique peut se manifester entre un corps électrisé et un autre corps à l'état neutre, mais l'analyse du phénomène montre que ce dernier s'est lui-même électrisé.

Quand un double pendule, primitivement neutre, est attiré par un corps électrisé, on reconnaît aisément que les deux balles se maintiennent écartées. Toutes choses égales, l'attraction des balles et leur divergence sont plus manifestes si le pendule est conducteur. Dans les deux cas, la répulsion réciproque des balles primitivement neutres montre qu'elles sont aussi électrisées; cette électrisation à distance est dite *électrisation par influence* ou *induite.*

D'une manière générale, un conducteur isolé introduit dans un champ électrique s'électrise; sa surface se partage en deux régions différentes, chargées de quantités égales d'électricités

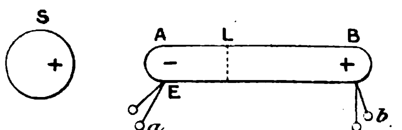


Fig. 1.

contraires, de sorte que la charge totale reste nulle, conformément au principe de la conservation de l'électricité (5).

Approchons d'une sphère S (fig. 1) chargée d'électricité positive, par exemple, un cylindre métallique isolé AB, primitivement à l'état neutre, aux extrémités duquel sont attachés de doubles pendules à fils conducteurs *a* et *b*. Les deux pendules divergent aussitôt, de part et d'autre du plan de symétrie; les deux extrémités du cylindre sont donc électrisées. Les pendules *a* s'inclinent vers la sphère S influente ou inductrice : l'extrémité antérieure A est donc négative. On pourrait voir aussi que les pendules *b* s'inclinent en sens contraire, mais l'effet est très faible à cause de l'accroissement de distance; pour rendre l'expérience plus démonstrative, on touche la sphère S avec une boule de métal, ou un petit disque, que l'on tient par un manche de verre; cette *boule d'épreuve*, ou ce *plan d'épreuve*, ayant pris de l'électricité positive, on l'approche ensuite des pendules *b*, ils sont

repoussés : l'extrémité postérieure B du cylindre est donc positive. Ces deux régions de signes contraires sont séparées par une certaine *ligne neutre* L sur laquelle aucune électrisation n'est appréciable, soit par un double pendule, soit par une boule d'épreuve.

Les deux charges induites, positive et négative, sont égales, car le cylindre revient à l'état neutre quand on enlève la sphère inductrice, ou encore, le champ résultant de la sphère et du cylindre, à une distance assez grande par rapport aux dimensions du système, reste le même que si le cylindre n'existait pas.

La ligne neutre L étant plus rapprochée de l'extrémité antérieure A, la charge moyenne par unité de surface est plus grande pour l'électricité négative.

En même temps, la distribution sur la sphère a été modifiée. En touchant successivement par une boule d'épreuve les extrémités du diamètre horizontal, on reconnaît, par l'action de cette boule sur le pendule *b*, que la charge est notablement plus grande sur la face située en regard du cylindre.

Enfin, quand on rapproche progressivement la sphère du cylindre, la divergence des pendules augmente et la ligne neutre marche vers l'extrémité A.

Pour une distance suffisamment faible, un trait de feu, une *étincelle*, se produit entre les deux corps. Dès lors, l'électricité négative disparaît du cylindre et la sphère a perdu une partie équivalente de sa charge positive ; l'étincelle annule l'une par l'autre des quantités égales d'électricités contraires et produit l'effet d'une communication conductrice entre les deux corps avant leur contact. Il y a eu simplement *partage* de la charge primitive entre la sphère et le cylindre.

Si l'on met le cylindre en communication au sol par l'extrémité B ou par un point quelconque, les pendules *b* retombent et les pendules *a* divergent davantage ; la charge négative augmente et la charge positive disparaît au sol.

Un conducteur non isolé s'électrise ainsi dans un champ électrique, comme faisant partie d'un même système avec la Terre. Dans ce cas, une étincelle fait disparaître toute électrisation ; le corps primitif A est *déchargé*.

On s'explique maintenant qu'un corps électrisé puisse attirer

un corps neutre ; ce dernier est électrisé par induction ; l'action apparente est la résultante de l'attraction qui s'exerce sur les parties voisines, chargées d'électricités contraires, et de la répulsion plus faible sur les parties éloignées qui ont de l'électricité de même signe.

7. Équilibre des conducteurs. — Électrisation superficielle. — Sur les corps isolants, l'électricité peut être distribuée d'une manière quelconque, suivant les circonstances de sa production.

Il n'en est plus de même pour les conducteurs. Le caractère général de l'induction est qu'une électrisation se produit en tout point où existe un champ électrique. L'équilibre n'est établi pour un conducteur que si *le champ électrique est nul dans toute son étendue ;* en chaque point, la résultante des actions de l'électricité que possède le conducteur et de celles qui peuvent exister sur des corps extérieurs est nulle. Cette condition est nécessaire et suffisante.

Un champ électrique ne peut donc exister, au moins à l'état d'équilibre, que dans les corps mauvais conducteurs ou isolants. Faraday a donné à ces corps le nom de *diélectriques*, pour rappeler qu'ils sont les milieux dans lesquels les forces électriques se manifestent et se propagent.

Priestley avait constaté déjà qu'une boule d'épreuve ne prend pas d'électricité quand on la met en contact avec l'intérieur d'un gobelet métallique électrisé.

Les expériences plus précises de Cavendish et de Coulomb ont établi qu'il n'existe aucune trace appréciable d'électricité, à l'état d'équilibre, sur la surface intérieure d'un conducteur fermé. Ainsi, si l'on recouvre une sphère électrisée par deux calottes hémisphériques tenues par des manches isolants et qu'on enlève ensuite ces calottes, la sphère se trouve ramenée à l'état neutre.

La surface d'une cavité, creusée dans un conducteur quelconque, est donc à l'état neutre et le champ électrique est nul dans toute l'étendue de la cavité.

L'électrisation n'est apparente que sur la surface extérieure, suivant une loi particulière qui dépend en même temps de la forme du conducteur et de la présence de corps extérieurs, eux-mêmes chargés ou non d'électricité.

8. Induction sur un conducteur fermé. — Cette localisation de l'électricité à la surface des conducteurs a plusieurs conséquences importantes.

Lorsqu'un conducteur isolé s'électrise par induction, chacune des charges, positive et négative, distribuées à sa surface est, en général, inférieure à celle du corps inducteur.

En effet, sur un point du cylindre AB (fig. 1) situé dans le plan de la ligne neutre, les actions des couches positive et négative qu'il possède sont de même sens. Pour que le champ soit nul, il faut que l'action de la sphère S soit supérieure à celle de la couche négative, qui est moins éloignée, et l'on comprend que sa charge doive être plus grande.

Les charges induites deviennent égales à la charge inductrice lorsque le conducteur induit entoure complètement les masses influentes. Dans ce cas, la surface interne du conducteur possède une quantité d'électricité contraire dont la distribution dépend de la position des masses influentes; une masse égale d'électricité de même signe est distribuée sur la surface externe, suivant la même loi que si rien n'existait dans l'intérieur.

Pour démontrer cette propriété, Faraday emploie une boîte cylindrique de grande hauteur par rapport à son diamètre, isolée et mise en communication avec un double pendule.

On introduit dans le cylindre une boule de métal électrisée portée par un fil de soie. A mesure que la boule pénètre, la divergence du pendule est d'abord croissante et finit par rester invariable dès que l'angle sous lequel la boule voit l'ouverture devient assez faible. A partir de ce moment, la divergence reste invariable, quelque position qu'occupe la boule influente, et l'on verrait par l'emploi d'un plan d'épreuve que la distribution extérieure ne change pas; la divergence reste encore la même si l'on fait toucher la boule au cylindre. Or, dans ce dernier cas, la boule et le cylindre ne forment plus qu'un conducteur, toute électrisation interne a disparu et le cylindre possède entièrement la charge qui existait d'abord sur le corps inducteur.

La quantité d'électricité induite sur un conducteur fermé est donc égale à celle qu'on introduit dans sa cavité, soit par des conducteurs, soit par des isolants, et la distribution exté-

rieure est indépendante de la position des charges inductrices situées dans la cavité.

Cette expérience permet de vérifier plus rigoureusement la conservation de l'électricité dans les phénomènes d'influence. Après avoir introduit un corps électrisé dans le cylindre de Faraday, on y introduit des conducteurs neutres et isolés de forme quelconque; la charge extérieure ne change pas.

9. **Partage et addition des charges.** — On peut diviser en deux parties égales la charge électrique d'un conducteur en le touchant par un autre conducteur de même forme, à la condition que leur ensemble soit symétrique par rapport au point de conctact. Si les conducteurs se touchent d'une autre manière ou s'ils sont différents, le partage se fait suivant une proportion particulière à chaque cas.

On peut, de même, ajouter sur un conducteur une série de masses électriques; il suffit que le conducteur présente une cavité presque entièrement fermée, permettant d'y introduire des conducteurs électrisés et de lui transmettre par contact intérieur l'électricité dont ils sont chargés.

La division par contacts successifs permettra d'obtenir des charges décroissant en progression géométrique. En touchant un corps électrisé de grandes dimensions par une boule qui emportera la même charge à chaque opération, l'introduction successive de cette boule dans une cavité fournit aussi le moyen de donner au conducteur une charge croissant en progression arithmétique.

10. **Électricité de contact.** — Volta a découvert ce fait capital que le contact de deux métaux différents, d'abord à l'état neutre, ou plus généralement de deux corps quelconques à la même température, suffit pour les constituer dans deux états électriques différents et les charger respectivement de quantités égales d'électricités contraires.

On peut répéter l'expérience, sous la forme indiquée précédemment (4) pour les disques de verre et de métal, en prenant deux disques métalliques isolés, l'un en zinc et l'autre en cuivre. Toutefois les charges électriques sont alors beaucoup plus faibles et exigent, pour être manifestées, l'emploi d'électroscopes très délicats.

A ce point de vue, on doit considérer le frottement comme

une forme particulière de contact; il est à remarquer, en effet, que la pression exercée dans le frottement n'a pas grande influence et qu'elle a surtout pour effet de multiplier les points de contact des surfaces isolantes.

Il résulte de cette propriété nouvelle que le partage de l'électricité entre deux sphères conductrices de même rayon ne se fait également que si elles sont de nature identique et à la même température. Mais rien n'est changé à la proposition fondamentale que la somme algébrique des charges est la même avant et après le contact.

Dans toutes les expériences relatives à l'emploi des conducteurs, on devra aussi supposer en toute rigueur qu'ils sont formés du même métal et en équilibre de température.

11. Loi des actions électriques. — L'action qui s'exerce entre deux corps électrisés de petites dimensions par rapport à la distance qui les sépare est dirigée suivant la droite qui les joint. Cette action est, par définition, proportionnelle à la quantité d'électricité que possède chacun d'eux, c'est-à-dire au produit de leurs charges.

En mesurant par la torsion d'un fil métallique la répulsion ou l'attraction qui s'exercent entre deux petites boules conductrices électrisées, Coulomb a trouvé que *les actions électriques sont en raison inverse du carré de la distance.*

La même expérience permet de vérifier que, dans le partage entre deux corps conducteurs, la quantité d'électricité se conserve, car si, dans l'expérience précédente, on touche l'une des boules électrisées par une boule identique à l'état neutre, que l'on enlève ensuite, l'action à la même distance est devenue moitié moindre.

L'unité de mesure pour les masses électriques reste arbitraire, car on a vérifié seulement que l'action de deux corps électrisés est *proportionnelle* au produit des quantités d'électricité qu'ils possèdent, et en raison inverse du carré de la distance.

Si l'on choisit une unité arbitraire, q et q' étant les quantités d'électricité des deux corps et r leur distance, l'action réciproque peut être représentée par $k\frac{qq'}{r^2}$; elle est répulsive ou attractive suivant que les quantités q et q' sont de même

signe ou de signes contraires. Dans cette formule, k est un coefficient dont la valeur dépend des unités choisies pour l'électricité, la force et la distance.

Pour éviter l'introduction de ce coefficient k, qui complique inutilement les formules, on convient de prendre pour *unité d'électricité* la quantité qui, agissant dans l'air sur une quantité égale à l'unité de distance, produit une action égale à l'unité de force; les quantités d'électricité sont ainsi exprimées en fonction d'unités dites *électrostatiques*.

La direction et l'intensité d'un champ électrique en un point sont la direction et l'intensité de l'action qui s'exercerait sur une masse positive égale à l'unité placée en ce point, l'introduction de cette masse étant supposée ne modifier en rien la distribution d'électricité sur le système; plus exactement, l'action qui s'exercerait sur une masse infiniment petite dq peut être représentée par l'expression $F dq$, dans laquelle F est l'intensité du champ.

Pour abréger le langage, on considère l'action réciproque comme s'exerçant entre les masses électriques, mais il est toujours sous-entendu qu'il s'agit de l'action des corps qui en sont chargés. Lorsque deux corps électrisés ont des dimensions notables par rapport à leur distance, chaque élément de volume ou de surface de l'un d'eux agit sur chacun des éléments de l'autre. L'ensemble de toutes ces forces équivaut, suivant les cas, à une résultante unique ou à une résultante et un couple.

Pour deux sphères conductrices électrisées, en particulier, la distribution de l'électricité sur chacune d'elles dépend de leur distance; l'action résultante reste dirigée, par symétrie, suivant la ligne des centres, mais elle n'est pas rigoureusement en raison inverse du carré de leur distance.

Cette remarque fait comprendre qu'il serait nécessaire, dans les expériences de Coulomb, de tenir compte du mode de distribution des charges électriques dans chaque cas particulier, mais le défaut de précision est dû principalement à l'influence des corps étrangers aux boules électrisées.

12. Hypothèses sur la nature de l'électricité. — Les expériences permettent ainsi de *mesurer* l'électricité. C'est une grandeur de nature spéciale, parfaitement définie au point de

vue mécanique, affectée d'un signe comme une quantité de mouvement, et la théorie des phénomènes peut être établie, en partant uniquement des lois expérimentales, sans le secours d'aucune hypothèse.

A cause de la facilité avec laquelle l'électricité se propage dans les conducteurs, on l'a souvent assimilée à un *fluide*, comme on expliquait autrefois les effets de conductibilité calorifique par la propagation d'un fluide particulier. Le mouvement des corps électrisés serait produit par l'action des éléments de fluide qui, ne pouvant se mouvoir dans les diélectriques, entraînent avec eux la matière pondérable. On admettra en même temps que les masses pondérables s'attirent et qu'elles attirent les masses électriques, toutes ces forces obéissant à la loi du carré des distances.

Quant au caractère de dualité que présentent les phénomènes, on en a rendu compte de deux manières.

D'après Franklin, un corps à l'état *neutre*, de masse pondérable M, renferme une quantité *normale* d'électricité Q, définie par la condition que l'action totale du corps sur une masse électrique extérieure q soit nulle. Désignant par a un coefficient relatif à l'action des unités de masse de natures différentes, l'attraction à l'unité de distance sera donc

$$q(a\mathrm{M} - \mathrm{Q}) = 0,$$

c'est-à-dire que le rapport des masses électrique et pondérable dans un corps neutre a une valeur constante a.

L'action de deux corps neutres (M, Q) et (M', Q') se réduit à celle des masses M et Q sur M', puisque l'action des deux premières sur Q' est nulle. Si l'on désigne par b le coefficient relatif aux masses pondérables, cette action est, en tenant compte de la relation précédente,

$$\mathrm{M}'(b\mathrm{M} + a\mathrm{Q}) = \mathrm{M}\mathrm{M}'(b + a^2);$$

elle représente l'attraction universelle.

Dans le même ordre d'idées, un corps devient électrisé positivement ou négativement, quand on augmente ou que l'on diminue sa charge normale.

Pour deux corps ainsi constitués (M, Q, q) et (M', Q', q'), les

excès de charge q et q' étant positifs ou négatifs, l'action des masses M et Q du premier sur le second se réduit à l'attraction universelle, puisque cette action est nulle sur la masse électrique supplémentaire q'; l'action de q sur l'ensemble (M', Q') est également nulle, et il ne reste que l'action de q sur q'. La résultante est alors

$$MM'(b + a^2) - qq'.$$

Le dernier terme, qui représente la répulsion électrique, est de beaucoup prédominant. Les coefficients b et a doivent donc être très petits; il est même permis de supposer que l'un ou l'autre est égal à zéro, sans que l'expression cesse de comprendre l'attraction universelle.

L'hypothèse des deux fluides, imaginée par Symmer et adoptée par Coulomb, au moins à titre provisoire, consiste à admettre qu'il existe deux fluides différents, que les éléments d'un même fluide se repoussent, que les fluides différents s'attirent, et qu'un corps naturel renferme des quantités équivalentes des deux fluides, formant le fluide neutre. Un corps est électrisé positivement ou négativement, suivant qu'il possède un excès de l'un ou l'autre des deux fluides.

Comme la quantité de fluide neutre contenue dans un corps peut être modifiée, il n'y a pas lieu d'admettre que la matière pondérable agisse sur le fluide électrique. L'action de deux corps électrisés (M, q) et (M', q') se réduit donc à l'attraction universelle bMM' et à la répulsion électrique qq'.

Le moindre défaut de ce genre d'hypothèses est qu'elles sont superflues. En outre, rien ne semble indiquer, dans les expériences, qu'il y ait une limite à l'électrisation des corps; il serait alors nécessaire d'admettre que la charge normale d'un corps, dans la théorie de Franklin, ou que sa charge de fluide neutre, dans la théorie de Symmer, est illimitée, conséquence évidemment contradictoire avec la notion même d'un fluide matériel.

Au lieu de faire intervenir les forces à distance, qui ont beaucoup perdu de leur crédit, la science tend aujourd'hui à expliquer les actions apparentes par les modifications mécaniques du milieu ambiant. Cette idée était émise déjà par

Ampère, en 1822, dans l'étude des courants électriques. Lamé ([1]) pensait également que l'intervention du fluide éthéré, sagement conduite, « doit trouver le secret, ou la véritable cause des effets que l'on attribue au calorique, à l'électricité, au magnétisme, à l'attraction universelle, à la cohésion et aux affinités chimiques ».

Guidé par des conceptions analogues, Faraday considère que tout se passe dans le milieu diélectrique où les forces se manifestent. Électriser un corps ne serait autre chose que modifier la structure du milieu diélectrique, et les actions réciproques des corps électrisés seraient le résultat des réactions élastiques de ce milieu. Il reste à imaginer la constitution des milieux capables de produire de pareils effets, mais, quelles que soient les difficultés du problème, la suite des découvertes ultérieures n'a fait que confirmer de plus en plus les vues de Faraday.

13. Densités électriques. — Un certain nombre des expressions employées dans l'étude de l'électricité ont pour origine l'idée des fluides : il n'y a pas d'inconvénient sérieux à les conserver, si l'on a soin de les définir par les propriétés mathématiques et expérimentales auxquelles elles correspondent, dans le but, comme l'écrivait Coulomb, « de présenter, avec le moins d'éléments possible, les résultats du calcul et de l'expérience et non d'indiquer les véritables causes de l'électricité ([2]). »

C'est ainsi que l'idée de fluide a conduit à la notion de la *densité électrique*. Si l'électricité occupe toute l'étendue d'un corps, comme dans le cas d'un diélectrique, et qu'elle y soit distribuée d'une manière uniforme, la densité *cubique* ρ est la quantité d'électricité qui existe dans l'unité de volume. Si la distribution est irrégulière, la densité en un point est le rapport qui existe entre la charge électrique d'un élément de volume en ce point et l'élément de volume lui-même.

Les corps conducteurs en équilibre n'ont d'électricité qu'à leur surface. Si la distribution est uniforme, la densité *superficielle* σ est la quantité d'électricité qui existe sur l'unité de

([1]) Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, p. 335. Paris, 1852.

([2]) Coulomb, *Histoire de l'Académie des sciences pour* 1788, p. 673.

surface. Dans le cas général, la densité superficielle en un point est le rapport de la charge d'un élément de surface, pris autour de ce point, à l'étendue de l'élément.

Dans l'hypothèse des fluides, il faut bien admettre que la couche électrique superficielle a une épaisseur finie et qu'elle pénètre jusqu'à une certaine profondeur, si petite qu'on le voudra, dans le conducteur ou dans le milieu diélectrique qui l'entoure. L'expérience ne permettant pas de déterminer l'épaisseur de cette couche, on peut supposer la densité variable avec une épaisseur constante de la couche, ou la densité constante avec une épaisseur variable.

Si l'on admet, par exemple, que le conducteur soit couvert d'une couche homogène de densité ρ dont l'épaisseur en un point est h, la charge par unité de surface, ou la densité superficielle, sera $\sigma = \rho h$. Si faible que l'on suppose l'épaisseur h, la densité cubique ρ peut être choisie assez grande pour que le produit ρh ait une valeur finie.

On voit que, abstraction faite de toute idée de fluide, les expressions de densité cubique ou de densité superficielle ont une signification purement mathématique ou expérimentale, indépendante de toute hypothèse.

14. Conséquence de l'électrisation superficielle. — La loi de distribution de l'électricité sur les conducteurs en équilibre dépend de leur forme. On peut la déterminer, par expérience, comme le faisait Coulomb, en comparant les charges que prend en deux points différents un petit *plan d'épreuve* (**6**), mis en contact avec la surface. Il est assez évident que cette charge est en chaque cas proportionnelle à la densité électrique de la surface au point touché.

Cette distribution doit se faire de manière que le champ électrique soit nul à l'intérieur de chacun des conducteurs.

Soit S (fig. 2) la surface du conducteur électrisé. Par un point intérieur P menons un cône d'ouverture $d\omega$ infiniment petite qui découpe sur la surface, aux distances r et r', des éléments dS et dS' où les densités respectives sont σ et σ'.

Si les forces électriques sont proportionnelles à une fonction $f(r)$ de la distance, l'action de l'élément dS sur le point P est $\sigma\, dS f(r)$, celle de l'élément dS' est $\sigma' dS' f(r')$, et ces actions sont directement opposées. En appelant θ et θ' les angles des

rayons vecteurs PM et PM′ avec les normales N et N′ à la surface aux points correspondants, on a

$$d\omega = \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{dS'\cos\theta'}{r'^2}.$$

La résultante des actions de ces deux éléments sur le point P peut donc s'écrire

$$\sigma dSf(r) - \sigma' dS' f(r') = d\omega\left[\frac{\sigma}{\cos\theta}\, r^2 f(r) - \frac{\sigma'}{\cos\theta'}\, r'^2 f(r')\right].$$

Lorsque la surface considérée est une sphère, les angles θ et θ' sont égaux. En outre, si la sphère est isolée et sous-

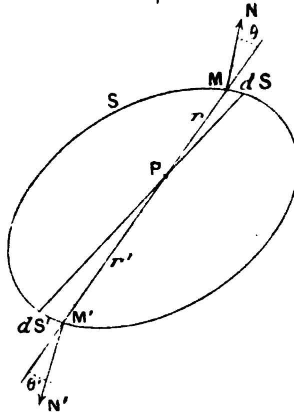


Fig. 2.

traite à toute action étrangère, la distribution est homogène, et les densités σ et σ' sont égales.

Le champ total est nul au point P si les actions des éléments opposés dS et dS' sont égales ; il suffit pour cela que l'on ait la relation

$$r^2 f(r) = r'^2 f(r') = \text{const.},$$

c'est-à-dire que les forces électriques soient en raison inverse du carré de la distance.

La loi de Coulomb satisfait donc à la condition d'équilibre sur un conducteur sphérique et c'est la seule. On peut le

voir d'une manière simple par le raisonnement suivant dû à M. Bertrand (¹).

Quel que soit $f(r)$, on peut choisir deux valeurs r_1 et r_2 telles qu'entre ces deux valeurs de la variable, le produit $r^2 f(r)$ soit toujours croissant ou décroissant quand r augmente.

Construisons une sphère (fig. 3) dont le diamètre soit égal à la somme $r_1 + r_2$, et considérons le point P qui partage le diamètre dans les deux segments r_1 et r_2. Sur ce point, l'action résultante des éléments opposés dS et dS', déterminés par un cône d'ouverture $d\omega$, est

$$\frac{\sigma d\omega}{\cos\theta}\left[r^2 f(r) - r'^2 f(r')\right].$$

Toutes les valeurs de r et de r' sont comprises entre les

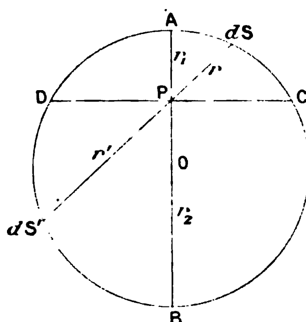


Fig. 3.

limites r_1 et r_2 et, sur une même corde, r est toujours plus petit que r'; la valeur de $r^2 f(r)$, relative aux éléments de la calotte supérieure DAC, sera toujours plus petite ou toujours plus grande que celle de $r'^2 f(r')$ relative à ceux de la partie inférieure DBC; il en sera de même pour l'action totale de ces deux calottes. Le champ ne peut donc être nul, à moins que $r^2 f(r)$ ne soit une constante, c'est-à-dire que la fonction $f(r)$ ne soit précisément en raison inverse du carré de la distance.

Réciproquement, la distribution superficielle est une conséquence de la loi du carré de la distance. En effet, l'électrisa-

(¹) J. Bertrand, *Journal de physique*, t. II, p. 418, 1873.

tion d'une sphère isolée se compose nécessairement de couches concentriques homogènes. En un point P l'action des couches extérieures est nulle ; celle du noyau de rayon OP est dirigée suivant la normale OP par raison de symétrie. Une masse électrique en ce point ne peut être en équilibre, puisqu'elle serait sollicitée vers la surface.

Si le fait de la distribution superficielle de l'électricité sur le conducteur en équilibre est établi avec une grande rigueur, la loi des distances sera démontrée au même degré d'exactitude. En répétant l'expérience de Cavendish (7) avec des soins particuliers, Maxwell a constaté qu'une sphère, après avoir été recouverte par des calottes hémisphériques, ne conserve pas $\frac{1}{2000}$ de sa charge primitive.

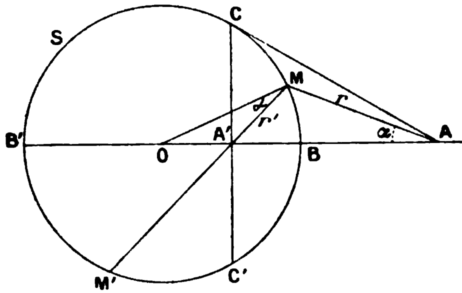


Fig. 4.

La méthode de Coulomb est loin de comporter une telle approximation.

15. Couches sphériques. — *L'action d'une couche sphérique homogène sur un point extérieur est la même que si toute la charge était concentrée au centre de la sphère.*

Soit, en effet, une surface sphérique S (fig. 4), de rayon R, recouverte d'une couche homogène de densité σ. Son action sur le point extérieur A est dirigée suivant la droite OA, par raison de symétrie.

Pour un élément dS situé en M, à la distance r du point A, sur une droite qui fait l'angle α avec AO, la composante parallèle à OA de l'action exercée au point A est $\frac{\sigma dS}{r^2}\cos\alpha$.

Considérons le point A′ conjugué de A par rapport à la sphère, c'est-à-dire tel qu'on ait

$$\text{OA.OA}' = \text{R}^2, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\text{OA}}{\text{R}} = \frac{\text{R}}{\text{OA}'}.$$

Les triangles OMA′ et OAM sont semblables, comme ayant un angle commun en O et les côtés adjacents proportionnels; l'angle OMA′ est donc égal à α.

En appelant D la distance OA et r' la distance A′M, les mêmes triangles donnent :

$$\frac{r}{r'} = \frac{\text{D}}{\text{R}} = \frac{\text{R}}{\text{OA}'}.$$

Si l'on désigne par $d\omega$ l'angle du cône qui a pour sommet le point A′ et pour base l'élément dS, on a donc

$$\frac{\sigma d\text{S} \cos\alpha}{r^2} = \sigma \frac{r'^2 d\omega}{r^2} = \sigma \frac{\text{R}^2}{\text{D}^2} d\omega,$$

et l'action totale de la sphère est

$$\text{F} = \sigma \frac{\text{R}^2}{\text{D}^2} \int d\omega = \frac{4\pi \text{R}^2 \sigma}{\text{D}^2} = \frac{\text{Q}}{\text{D}^2}.$$

On voit que l'action est la même que si toute la charge Q était concentrée au centre de la sphère.

Si le point P est très voisin de la surface, D = R et l'action de la couche est égale à $4\pi\sigma$. Comme ce résultat est indépendant du rayon de la sphère, on doit prévoir qu'il est aussi vrai pour toute autre surface.

La composante parallèle à OA de l'action exercée sur le point A par l'élément dS ne dépend que de l'angle $d\omega$; elle est donc la même pour un élément dS′ situé en M′ opposé au premier par rapport au point P.

Il en est ainsi pour tous les éléments de la calotte CB′C′, comparés deux à deux aux éléments de la calotte CBC′.

Le plan CC′ partage donc la surface de la sphère en deux parties dont les actions sur le point P sont égales, chacune d'elles étant la moitié de celle de la couche totale.

A mesure que le point A s'éloigne, les deux calottes tendent à devenir égales; s'il est infiniment voisin de la surface, la calotte antérieure devient infiniment petite et son action sur un point infiniment voisin se réduit à $2\pi\sigma$. Ce résultat doit être encore vrai pour un élément de surface quelconque.

16. Sphère formée de couches homogènes. — *L'action extérieure d'une sphère formée de couches concentriques homogènes est la même que si la masse totale était concentrée au centre de la sphère.*

Si l'on considère un point P intérieur, à la distance r du centre, on peut partager la masse totale en deux parties, l'ensemble des couches extérieures et le noyau sphérique de rayon r. L'action des couches est nulle et il ne reste à considérer que celle du noyau.

Lorsque la densité cubique ρ de la masse agissante est constante, cette action intérieure est simplement proportionnelle à la distance, car elle a pour expression

$$F_i = \frac{1}{r^2}\frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{4}{3}\pi\rho r.$$

Supposons que la densité en un point soit proportionnelle à la puissance n de sa distance u au centre, $\rho = au^n$. L'action sur le point P de la couche d'épaisseur du est

$$\rho\,\frac{4\pi u^2}{r^2}\,du = \frac{4\pi a}{r^2}\,u^{n+2}du$$

et l'action totale

$$F_i = \frac{4\pi a}{r^2}\int_0^r u^{n+2}du = \frac{4\pi a}{r^2}\,\frac{r^{n+3}}{n+3} = \frac{4\pi a}{n+3}\,r^{n+1}.$$

Cette action est constante pour $n = -1$; elle augmente ou diminue, à mesure qu'on s'éloigne du centre, suivant que n est plus grand ou plus petit que -1.

La masse totale de la sphère étant

$$Q = \int_0^R 4\pi u^2 a u^n du = \frac{4\pi a}{n+3}\,R^{n+3},$$

on peut écrire

$$F_i = Q\frac{r^{n+1}}{R^{n+3}}.$$

D'une manière générale, si q est la masse extérieure au noyau du rayon r, ρ_0 la densité moyenne de la sphère entière et ρ la densité moyenne des couches extérieures, on a

$$F_i = \frac{Q-q}{r^2} = \frac{Q}{r^2}\left[1 - \frac{q}{Q}\right] = \frac{Q}{r^2}\left[1 - \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)\frac{\rho}{\rho_0}\right],$$

ou, en appelant F_1 l'action $\frac{Q}{R^2}$ sur la surface,

$$F_i = F_1\frac{R^2}{r^2}\left[1 - \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)\frac{\rho}{\rho_0}\right].$$

L'action intérieure peut être d'abord croissante à partir de la surface, puis atteindre un maximum et devenir ensuite décroissante jusqu'au centre. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour les variations de la pesanteur dans l'intérieur du globe. Il faut, pour cela, que l'on ait

$$\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)\frac{\rho}{\rho_0} < 1 - \frac{r^2}{R^2}.$$

Si l'épaisseur $R - r = h$ est très petite par rapport à R, cette condition peut s'écrire

$$3\frac{h}{R}\frac{\rho}{\rho_0} < 2\frac{h}{R}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} < \frac{2}{3} < 0,67.$$

La densité moyenne de la terre est environ 5,5 et celle de la surface 2,5; la condition est réalisée, puisque

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{2,5}{5,5} = 0,45.$$

17. Système de mesures C. G. S. — L'emploi d'unités de mesure arbitraires dans les différents problèmes de physique présente le grave inconvénient qu'il est souvent impossible de

comparer les expériences et que, dans les cas les plus favorables, cette comparaison ne peut être faite que par des réductions laborieuses.

La plupart des déterminations numériques dans les phénomènes se ramènent aux unités fondamentales de la mécanique, c'est-à-dire aux unités de *longueur*, de *temps* et de *force* ou de *masse*.

Pendant longtemps, on a pris comme unité de force le poids d'un corps, tel que le kilogramme des Archives; mais ce choix ne constitue pas un véritable étalon, puisque l'effort réel exercé par un tel corps, sur un plan ou sur un dynamomètre à ressort, dépend de la valeur actuelle de la gravité, c'est-à-dire de la hauteur au-dessus du niveau de la mer ou de la latitude à laquelle on fait l'expérience. Une seule chose est définie, c'est la *masse* du corps choisi comme étalon. C'est en raison de cette difficulté qu'il convient de remplacer l'unité de force par une unité de masse.

Pour l'étude du magnétisme, et en particulier du magnétisme terrestre, Gauss avait pris, comme unités, le millimètre, la masse du milligramme et la seconde de temps moyen.

Ces unités sont généralement trop petites dans beaucoup de phénomènes, et conduisent à représenter les valeurs numériques des grandeurs réelles par des nombres trop grands.

L'usage se répand de plus en plus d'adopter les unités proposées par l'Association britannique, qui sont le *centimètre*, la *masse du gramme* et la *seconde de temps moyen*.

On convient alors d'exprimer une grandeur quelconque par sa valeur numérique, en la faisant suivre au besoin du symbole C. G. S. qui rappelle les unités fondamentales, sans qu'il soit nécessaire de désigner par un nom particulier la nature de cette grandeur.

Deux exceptions, cependant, se sont introduites dans la pratique, c'est la *dyne* (δύναμις) pour l'unité de force, et l'*erg* (ἔργον) pour l'unité de travail. Il est facile d'établir les relations qui existent entre ces grandeurs et les unités habituelles de la mécanique, qui sont le kilogramme et le kilogramme-mètre.

La *dyne* est la force qui agissant sur la masse du gramme, lui imprimerait une accélération d'un centimètre par seconde.

D'autre part, le *poids* d'un gramme imprimerait à sa propre masse l'accélération g due à la pesanteur, c'est-à-dire, à Paris, $9^m,81$ ou 981 centimètres par seconde. La proportionnalité des forces aux accélérations donne alors

$$1 \text{ dyne} = \frac{1^{gr}}{981} = \frac{1^{milligr}}{0,981} = 1^{mg},00908.$$

De même, un *erg* est le travail d'une dyne sur un corps qui se déplace d'un centimètre dans la direction de la force, c'est-à-dire

$$1 \text{ erg} = 1^{dyne} \times 1^{cm} = \frac{1^{gr}}{981}\frac{1^m}{100} = \frac{1^{kg} \times 1^m}{9,81 \times 10^7} = \frac{1^{kgm}}{9,81 \times 10^7}.$$

$$1 \text{ kilogramme-mètre} = 9,81 \times 10^7 \text{ ergs}.$$

D'après les expériences de Joule, l'équivalent mécanique de la chaleur serait d'environ 425 kilogrammes-mètres à Paris; c'est le travail nécessaire pour dégager une calorie, c'est-à-dire pour élever de 1° centigrade la température d'une masse d'eau pesant un kilogramme.

Si l'on rapporte la calorie à la masse du gramme, ce qu'on appelle quelquefois la *petite calorie*, l'équivalent de la chaleur devient mille fois moindre. En désignant cet équivalent par J, on aura donc

$$J = 0,425^{kgm} = 4,17 \times 10^7 \text{ ergs}.$$

Les travaux récents semblent indiquer une valeur un peu plus élevée, très voisine de $4,19.10^7$ ergs, ce qui correspondrait à 427 kilogrammes-mètres pour la calorie rapportée au kilogramme.

CHAPITRE DEUXIÈME

POTENTIEL

18. Champ électrique. — Lignes de force. — Laissant d'abord indéterminée la loi des distances, nous admettrons, comme un fait d'expérience, que l'action de deux corps électrisés de petites dimensions est dirigée suivant la droite qui les joint et ne varie qu'avec la distance, en un mot qu'elle satisfait à la définition des forces dites *centrales;* enfin, qu'elle est proportionnelle (5) au produit des quantités d'électricité que possèdent les deux corps.

On considère, en outre, comme évident, que l'action réciproque de deux corps électrisés se ramène au calcul des actions qui s'exercent entre les masses élémentaires qui constituent leurs charges électriques.

Quelle que soit encore l'unité à laquelle on rapporte les masses électriques, la direction et l'intensité du *champ* (ou la *force électrique*) en un point sont la direction et la grandeur de l'action F que subirait l'unité d'électricité positive placée en ce point; l'action du champ sur une masse infiniment petite dq serait $F\,dq$. Pour un système déterminé, la force électrique est une simple fonction des coordonnées.

Le champ n'existe que dans les diélectriques; il est en général illimité; il peut être aussi limité, par exemple, dans le cas où toutes les masses agissantes sont comprises dans un conducteur fermé : la surface interne du conducteur limite alors le champ.

Une *ligne de force* dans le champ électrique est une ligne tangente en chaque point à la direction du champ. Une

pareille ligne est évidemment continue tant qu'elle ne rencontre pas des masses agissantes; elle ne peut présenter de points anguleux que si la force électrique devient nulle, auquel cas des branches différentes peuvent se couper au point de force nulle.

19. Surfaces de niveau. — Supposons que, dans un système en équilibre électrique, les charges soient fixées aux positions qu'elles occupent, et considérons deux points quelconques M et N (fig. 5).

Le travail produit par l'action du champ sur la masse q, qui irait de M en N, est égal et de signe contraire au travail qui correspond à la marche inverse de N en M par le même

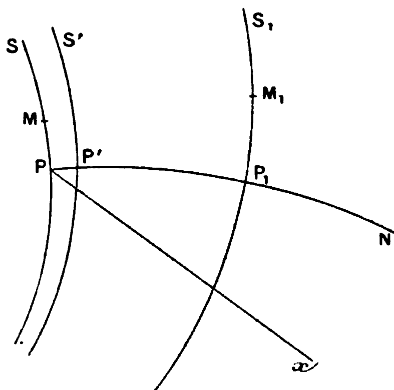


Fig. 5.

chemin. Ces travaux sont d'ailleurs indépendants de la trajectoire suivie, d'après l'hypothèse même des forces centrales. S'il en était autrement, il serait possible, en faisant circuler la masse q entre les points M et N, par deux chemins différents, d'obtenir un travail positif supérieur au travail négatif pour chacun des cycles, c'est-à-dire de trouver ainsi la solution du mouvement perpétuel.

Pour un élément ds du chemin parcouru, faisant l'angle ε avec la force électrique F, que nous appellerons souvent le *champ*, pour abréger le discours, le travail est $q\mathrm{F}ds\cos\varepsilon$. Si deux points, tels que M et P, sont tellement placés que l'on puisse tracer de l'un à l'autre un chemin qui soit en chaque

point perpendiculaire à la direction du champ, le travail élémentaire et le travail total sont nuls. L'ensemble des trajectoires émanant du point M et qui satisfont à cette condition constituent une *surface de niveau* électrique. Donc

Une surface de niveau électrique est orthogonale aux lignes de force. Le travail nécessaire pour déplacer une masse électrique d'un point à un autre de cette surface est nul, quel que soit d'ailleurs le chemin suivi.

20. Potentiel. — Force électromotrice. — Le point N étant supposé invariable, le travail qui correspond au chemin MN ne dépend que des coordonnées du point M. Ce travail est le même pour un chemin quelconque PN, si le point P est situé sur la surface de niveau S qui passe par le point M, puisque le travail relatif au chemin MP est nul; on peut donc le représenter par qV, V désignant une fonction des coordonnées qui a une valeur constante sur toute la surface de niveau S. La fonction V joue un rôle capital dans l'étude des phénomènes électriques ; c'est ce que l'on appelle le *potentiel* sur la surface S.

Sur la surface de niveau S_1 qui passe par un autre point M_1, le potentiel a une autre valeur V_1. Le travail relatif au chemin MM_1 est la différence des travaux qui correspondent à deux chemins quelconques allant de M en N et de M_1 en N, c'est-à-dire $q(V-V_1)$. En d'autres termes,

Le travail relatif au déplacement de l'unité d'électricité positive entre deux points quelconques de deux surfaces de niveau est constant; c'est la différence $V-V_1$ *des potentiels de ces deux surfaces.*

Si l'on suppose que les points considérés, tels que P et P_1, soient sur une même ligne de force, laquelle est normale à toutes les surfaces de niveau qu'elle rencontre, le travail relatif à un élément dn de cette ligne est Fdn, ce qui donne

$$V - V_1 = \int F dn.$$

Entre deux surfaces de niveau, le travail $q(V-V_1)$ subi par une masse électrique se présente, comme celui de la pesanteur, sous la forme d'un produit de deux facteurs : l'un de

ces facteurs q correspond au poids du corps, et l'autre $V - V_1$ à la hauteur de chute.

Une charge électrique positive, abandonnée à elle-même dans un champ, tend à marcher suivant une ligne de force, abstraction faite de la vitesse acquise, vers les points où le potentiel est plus faible; une charge négative marcherait vers les hauts potentiels.

Dans tous les cas, la différence de potentiel $V - V_1$ entre deux points peut être considérée comme la cause du mouvement de l'électricité; on la désigne souvent sous le nom de *force électromotrice*.

Les potentiels définis, comme on l'a fait, par le travail relatif au mouvement d'une masse électrique qui marche vers le point N, dépendent évidemment des coordonnées de ce point, mais par une quantité constante, qui disparaît dans la différence $V - V_1$, puisque celle-ci est définie par les surfaces S et S_1. Les potentiels n'interviennent d'ailleurs dans les phénomènes que par leurs différences.

21. Expression du champ par le potentiel. — Si l'on considère une surface de niveau S′ infiniment voisine de S, et que dn soit la distance PP′ de ces surfaces au point P, on a

$$F\,dn = V - V' = -(V' - V) = -dV,$$

$$(1) \qquad F = -\frac{dV}{dn}.$$

Ainsi, *la force électrique, ou le champ en un point, est la dérivée, prise en signe contraire, du potentiel* V *par rapport à la normale à la surface de niveau qui passe en ce point.*

Si l'unité de masse se déplace suivant une direction quelconque Px d'une quantité dx, et que X soit la composante du champ parallèle à cette direction, le travail est $X\,dx$. La différence correspondante $V' - V$ est l'accroissement relatif au seul changement de la variable x. En désignant les dérivées partielles par le symbole ∂, pour éviter toute confusion, on a donc

$$X\,dx = -(V' - V) = -\frac{\partial V}{\partial x}\,dx.$$

Si l'on applique la même règle à trois coordonnées rectangulaires, il en résulte

$$(2) \qquad X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

c'est-à-dire que *la composante du champ suivant une direction quelconque est égale et de signe contraire à la dérivée partielle du potentiel relative à cette direction.*

Le champ lui-même aura pour expression

$$F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2.$$

22. Potentiel pour la loi du carré des distances. — L'existence du potentiel et l'exactitude des propriétés qui précèdent sont indépendantes de la loi suivant laquelle varient les actions élémentaires avec la distance.

Quand on admet la loi de Coulomb (**11**), avec les unités électrostatiques, le potentiel s'exprime d'une manière très simple en fonction des masses électriques et des distances.

Supposons d'abord que le système électrique se réduise à une quantité positive q localisée au point O. En un point P situé à la distance r, le champ est $\frac{q}{r^2}$ et dirigé suivant la droite OP. Les surfaces de niveau sont des surfaces sphériques ayant pour centre le point O et l'on a

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{q}{r^2}, \quad V = \frac{q}{r} + c^{te}.$$

Le potentiel n'ayant été défini qu'à une constante près, par la notion du travail, on peut égaler à zéro la constante de cette dernière équation, c'est-à-dire admettre que le potentiel de la masse q est nul à l'infini. Ce potentiel à la distance r est donc le quotient de la masse par la distance.

S'il existe plusieurs masses différentes q, q', q''... respectivement localisées aux points O, O', O''..., le travail relatif au déplacement de l'unité d'électricité est la somme des travaux qui correspondent à chacune des masses. Pour un point P

situé aux distances r de q, r' de q', r'' de q'',... la valeur du potentiel est donc

$$(3) \qquad V = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \frac{q''}{r''} + \ldots\ldots = \Sigma \frac{q}{r}.$$

En d'autres termes, *le potentiel d'un système électrique en un point est la somme des quotients de chacune des masses par sa distance au point considéré.*

Le potentiel V tend à s'annuler à une distance très éloignée du système des masses électriques; il devient rapidement nul, en particulier, lorsque la somme algébrique des masses agissantes est égale à zéro.

23. Équilibre électrique des conducteurs. — Lorsque les charges électriques sont situées dans les corps isolants, ou diélectriques, elles ne peuvent se déplacer qu'avec la matière pondérable. Dans les conducteurs, qui laissent un libre passage à l'électricité, le champ doit être nul pour l'état d'équilibre. Les dérivées du potentiel, qui représentent les composantes du champ, sont donc nulles; par suite, *le potentiel est constant dans toute l'étendue d'un conducteur en équilibre.*

La surface même du conducteur, qui jouit également de cette propriété, est aussi une surface de niveau, à laquelle les forces extérieures sont normales. Donc :

Les lignes de force, dans le diélectrique, émanent normalement des conducteurs et y aboutissent suivant une direction normale.

La Terre étant un corps conducteur, son potentiel doit être considéré comme constant.

Si la masse totale d'électricité qui existe sur la Terre et dans le voisinage de sa surface était nulle, le potentiel du sol serait nul. On ne peut pas affirmer qu'il en soit ainsi, mais les potentiels n'intervenant dans les expériences que par leurs différences, il est permis d'admettre que le potentiel du sol est nul, d'où résulte la définition suivante :

Le potentiel d'un système électrique en un point est le travail que subirait l'unité d'électricité positive en allant de ce point à la surface du sol, par un chemin quelconque.

C'est le travail qu'il faudrait dépenser pour amener au point

considéré l'unité de masse électrique positive depuis un point quelconque de la surface du sol.

24. Flux de force. — Soit S (fig. 6) une surface arbitraire et θ l'angle que fait le champ F en un point M avec la normale N à la surface ; la composante normale du champ est $F_n = F \cos\theta$.

On appelle quantité de force, ou *flux de force*, au travers de l'élément dS au voisinage du point M, le produit de l'élément par la composante normale du champ, c'est-à-dire

$$F_n dS = F dS \cos\theta.$$

Le flux de force par unité de surface est égal numériquement à la composante normale du champ.

Cette expression de flux de force a pour origine le phéno-

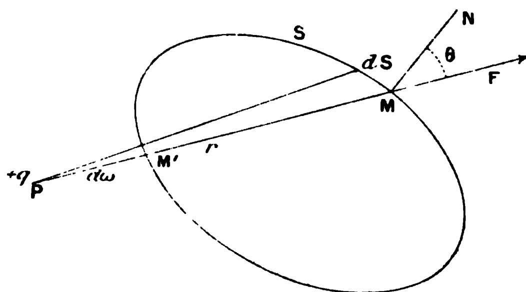


Fig. 6.

mène de l'écoulement des fluides. Si l'on imagine qu'un liquide, à l'état de régime permanent, traverse l'élément dS avec une vitesse F, le produit $F_n dS$ représente le volume de liquide qui coule au travers de l'élément dS pendant l'unité de temps, ou, plus brièvement, le flux de liquide correspondant à cet élément.

Les propriétés suivantes justifieront complètement cette analogie du flux de force et du flux de liquide.

La notion des lignes de force est due à Faraday, et cet éminent physicien a montré tout le parti qu'on en peut tirer dans l'étude des phénomènes électriques. Faraday appelait *nombre de lignes de force* ce que nous désignons ici par *flux de force*. La dénomination de flux semble préférable, d'abord

pour simplifier le langage, et ensuite parce que cette expression correspond mieux au caractère de continuité que présente la grandeur que l'on veut évaluer.

25. Cas d'une surface fermée. — Supposons que le champ F soit produit par une masse q, située en P à la distance r de l'élément de surface dS, et désignons par $d\omega$ l'aire apparente de cet élément vu du point P.

Les relations $F = \frac{q}{r^2}$ et $dS \cos\theta = r^2 d\omega$ donnent

$$F dS \cos\theta = q d\omega.$$

Si l'élément dS fait partie d'une surface *fermée* S, à laquelle la masse q est extérieure, le cône $d\omega$ découpe aussi en M′ un autre élément dS', sur lequel le flux de force a la même valeur $q d\omega$.

Considérant comme positives les composantes normales du champ dirigées vers l'extérieur de la surface S, et comme négatives celles qui sont dirigées vers l'intérieur, les flux de force auront des signes correspondants. La somme algébrique des flux de force relatifs aux éléments dS et dS', déterminés par le même cône $d\omega$, est donc nulle, et il en est de même pour tous les éléments analogues. Par suite, le flux total de force, émané de la masse extérieure q et qui sort de la surface S, a une valeur nulle.

Lorsque la surface continue S n'est pas entièrement convexe, la droite PM peut la couper en un nombre pair de points ; les flux relatifs à tous les éléments déterminés par le cône $d\omega$ ont la valeur constante $q d\omega$, mais on doit les considérer alternativement comme positifs et négatifs, de sorte que leur somme algébrique est encore nulle.

Si la masse q est située dans l'intérieur de la surface S, le flux de force relatif à l'élément dS est aussi $q d\omega$, mais alors ce flux conserve le même signe pour tous les éléments, et le flux total relatif à l'ensemble des cônes $d\omega$ qui correspondent à la surface entière est

$$\varphi = q \int d\omega = 4\pi q.$$

En d'autres termes, *le flux total de force qui émane d'une*

masse électrique, dans toutes les directions, est le produit de cette masse par 4π.

Il est clair que, si la surface S présente des parties concaves, le cône $d\omega$ dirigé dans un sens peut découper un nombre impair d'éléments pour lesquels la somme algébrique des flux de force est encore $qd\omega$.

Supposons maintenant que le système électrique soit constitué par des masses quelconques, les unes extérieures, et les autres intérieures à la surface S.

La composante normale F_n du champ résultant est, en chaque point, la somme algébrique des composantes normales relatives à toutes les masses agissantes ; le flux de force sur l'élément dS est aussi la somme des flux produits par ces différentes masses. Par suite, le flux total relatif à la surface fermée S est la somme des flux qui correspondent séparément à toutes les masses.

Comme le flux produit par chacune des masses extérieures est nul, et que celui d'une masse intérieure q est $4\pi q$, le flux total de force qui sort de la surface est, en désignant par Q la somme des masses intérieures,

$$\varphi = 4\pi\Sigma q = 4\pi Q. \tag{6}$$

Ainsi, *dans un champ électrique, le flux total de force qui sort d'une surface fermée, c'est-à-dire l'excès du flux des forces qui sortent sur le flux des forces qui entrent, est le produit de* 4π *par la quantité d'électricité située à l'intérieur de la surface.*

Ce flux est d'ailleurs la somme des valeurs $F_n dS$ relatives à chaque élément. En remplaçant la composante normale du champ par sa valeur en fonction du potentiel, l'équation (6) peut s'écrire

$$\varphi = 4\pi Q = \int F_n dS = -\int \frac{\partial V}{\partial n} dS. \tag{7}$$

On peut en faire immédiatement une application. Supposons qu'une sphère, soustraite à toute action étrangère, possède une charge électrique Q, distribuée uniformément sur

la surface ou répartie en couches concentriques homogènes. Sur une surface sphérique extérieure de rayon r, le champ F est normal en chaque point, par raison de symétrie, et le flux total de force a pour expression

$$4\pi r^2 F = 4\pi Q, \quad \text{d'où} \quad F = \frac{Q}{r^2}.$$

L'action extérieure de la sphère considérée est donc la même que si toute la masse agissante était concentrée au centre, propriété qu'on avait établie déjà (15) par des considérations directes.

Le potentiel extérieur de la sphère est aussi le même que si toute la masse était concentrée au centre.

26. Équations de Laplace et de Poisson. — Le flux de force qui sort d'un élément de volume $dx\,dy\,dz$ peut s'exprimer en fonction des composantes X, Y et Z du champ électrique et de leurs dérivées.

Le flux qui entre par la face $dy\,dz$ de cet élément de volume est $X\,dy\,dz$, et celui qui sort par la face opposée

$$\left(X + \frac{\partial X}{\partial x}\,dx\right)dy\,dz;$$

pour ces deux faces, l'excès du flux sortant est $\frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$.

En répétant le même raisonnement pour les deux autres systèmes de faces, on voit que le flux total de force qui sort de l'élément a pour expression

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz.$$

Si le milieu renferme des masses agissantes distribuées d'une manière continue, et que ρ soit la densité au point considéré, la masse comprise dans l'élément de volume est $\rho\,dx\,dy\,dz$; comme le flux de force sortant est égal au produit de cette masse par 4π, il en résulte

$$(8) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = 4\pi\rho.$$

Lorsque la densité ρ est nulle, on a

$$(9) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0;$$

c'est ce qu'on appelle l'*équation de continuité* du vecteur F, dont les composantes rectangulaires sont X, Y et Z.

La somme des trois dérivées secondes partielles du potentiel V par rapport aux coordonnées est une quantité qui intervient souvent dans les calculs; en la représentant par ΔV, pour abréger l'écriture, on peut écrire

$$(10) \qquad \Delta V = -4\pi\rho.$$

Si la densité ρ des masses agissantes est nulle au point considéré, l'équation se réduit à

$$(11) \qquad \Delta V = 0.$$

Ainsi, *la somme des dérivées partielles des composantes du champ par rapport aux coordonnées correspondantes*, ou *la somme des trois dérivées secondes partielles du potentiel, prises en signe contraire, est égale en chaque point au produit de 4π par la densité de la masse agissante.*

Sous la seconde forme (11), ce théorème avait été énoncé par Laplace, dans un mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne; l'équation plus générale (10) est due à Poisson.

Dans un corps conducteur en équilibre, le champ doit être nul. Les dérivées premières du potentiel étant toujours nulles, il en est de même des dérivées secondes; il en résulte $\Delta V = 0$ et, par suite, $\rho = 0$. Il ne peut donc exister aucune masse électrique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre, quelles que soient les conditions de l'expérience, et la distribution est purement superficielle (**14**).

Réciproquement, il est aisé de voir que la loi du carré de la distance est la seule qui satisfasse à l'équation de Laplace. En effet, le potentiel V d'une masse unique à la distance r est une fonction $f(r)$ de la distance. En prenant des axes rectan-

gulaires passant par la masse prise comme origine, on a

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}f'(r),$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2}f''(r) + \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)\frac{f'(r)}{r}.$$

La somme des expressions semblables relatives aux trois coordonnées donne

$$\Delta V = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2 f'(r).$$

Pour que cette expression soit nulle, il faut que le produit $r^2 f'(r)$ soit une constante, et l'on peut écrire

$$f'(r) = -\frac{A}{r^2}, \qquad f(r) = \frac{A}{r} + B.$$

Le champ produit par la masse considérée est donc en raison inverse du carré de la distance et le potentiel, à une constante près, en raison inverse de la distance.

27. Dérivées secondes du potentiel sur une surface de niveau. — Si les surfaces de niveau sont des sphères concentriques, le champ F est en raison inverse du carré de la distance r au centre commun, puisque le flux de force est constant au travers des surfaces successives; on a donc

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{A}{r^2},$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{2A}{r^3} = \frac{2F}{r}.$$

Prenant l'axe des z suivant la normale à la surface, les deux autres seront dans le plan tangent; en comptant l'axe des z dans le sens de la force, il vient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{2F}{r},$$

et, par suite, d'après le théorème de Laplace,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{F}{r}.$$

Si la surface de niveau est de forme quelconque, on voit aisément que la dérivée seconde du potentiel suivant la tangente à une section normale est la même que pour le cercle osculateur correspondant. L'axe des z étant toujours normal, et les deux autres suivant les tangentes aux sections principales dont les rayons de courbure sont R_1 et R_2, on aura

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{F}{R_1}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{F}{R_2},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = F\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

28. Formule de Green. — La masse totale Q d'électricité que renferme une surface est la somme des charges ρdv des différents éléments de volume. L'équation (7) peut donc s'écrire, en tenant compte de (10),

$$(12) \qquad \int \frac{\partial V}{\partial n} dS = -\int 4\pi\rho dv = \int \Delta V dv.$$

Cette équation est un cas particulier d'une formule plus générale due à Green.

Considérons l'intégrale

$$\int U \Delta V dv = \iiint U \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz,$$

dans laquelle U et V sont des fonctions finies et continues des coordonnées. Cette intégrale, étendue au volume enveloppé par une surface fermée S, se compose de trois termes semblables, que l'on peut intégrer par parties de la manière suivante :

$$\iiint U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\, dy\, dz = \iint U \frac{\partial V}{\partial x} dy\, dz - \iiint \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} dx\, dy\, dz.$$

Dans le second membre l'intégrale doit être étendue, pour le premier terme, à toute la surface S et, pour le second, au volume limité par cette surface. En opérant de même pour les autres coordonnées, la somme des intégrales relatives à la surface S sera

$$\iint U\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,dy\,dz + \frac{\partial V}{\partial y}\,dz\,dx + \frac{\partial V}{\partial z}\,dx\,dy\right).$$

Or, si l'on considère V comme un potentiel, ce qui n'enlève rien à la généralité de la démonstration, l'expression $-\frac{\partial V}{\partial x}dy\,dz$, ou $X\,dy\,dz$, représente le flux de force qui traverse l'élément de surface $dy\,dz$, c'est-à-dire la projection d'un élément dS de la surface sur un plan perpendiculaire à l'axe des x. Il en est de même pour les autres termes, de sorte que la parenthèse représente, au signe près, le flux de force qui traverse cet élément de surface. Cette parenthèse est donc égale à $-F_n dS$, ou $\frac{\partial V}{\partial n}dS$ et l'on a finalement

$$(13)\quad \int U\Delta V\,dv = \int U\frac{\partial V}{\partial n}dS - \int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial V}{\partial z}\right)dv.$$

Cette formule, due à Green, conduit immédiatement à plusieurs conséquences importantes.

Si l'on permute les fonctions U et V, et que l'on prenne ensuite la différence des expressions analogues, le dernier terme disparaît; il reste alors

$$(14)\qquad \int (U\Delta V - V\Delta U)\,dv = \int\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)dS.$$

En y faisant $U = 1$, on retrouve l'équation précédente (12).

Lorsque les fonctions U et V sont identiques, il vient

$$(15)\quad \int V\Delta V\,dv = \int V\frac{\partial V}{\partial n}dS - \int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dv.$$

Si la fonction V est le potentiel d'un système électrique, la

parenthèse du dernier terme représente le carré du champ F, ce qui donne

$$(16) \qquad \int V \Delta V dv = \int V \frac{\partial V}{\partial n} dS - \int F^2 dv,$$

ou, d'après le théorème de Poisson,

$$(17) \qquad 4\pi \int V \rho dv = -\int V \frac{\partial V}{\partial n} dS + \int F^2 dv.$$

Lorsque les fonctions ne renferment que deux variables x et y, ce qui a lieu, par exemple, dans l'étude des propriétés d'un ensemble de cylindres indéfinis, parallèles à l'axe des z, si l'on appelle dS un élément de surface $dx\,dy$, et ds un élément de contour de la courbe qui limite le système, les équations deviennent

$$(12)' \qquad \int \Delta V dS = \int \frac{\partial V}{\partial n} ds,$$

$$(14)' \qquad \int (U \Delta V - V \Delta U) dS = \int \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds.$$

29. Théorème de Stokes. — Si l'on considère une courbe fermée dans un champ électrique, et deux surfaces différentes ayant cette courbe comme contour commun, le flux de force est le même pour ces deux surfaces, pourvu qu'il n'y ait pas de matière agissante dans l'intervalle; ce flux est donc indépendant de la forme de la surface, et doit pouvoir s'exprimer en fonction des valeurs du champ sur le contour.

Plus généralement, soient F, G, H les composantes rectangulaires d'un *vecteur* J, fonction des coordonnées, c'est-à-dire d'une quantité définie par sa grandeur et sa direction. Imaginons qu'un mobile suive une courbe C dans un sens déterminé. Pour un élément ds du trajet, où le vecteur J fait l'angle ε avec la vitesse du mobile, le produit $J ds \cos\varepsilon$, qui représente le travail élémentaire d'une force J, est égal à la somme des travaux relatifs aux composantes F, G et H. Le travail T correspondant à une étendue finie de la trajectoire,

ou l'intégrale du vecteur suivant cette ligne, a donc l'une des deux expressions

$$(18) \qquad T = \int J ds \cos \varepsilon = \int (F dx + G dy + H dz).$$

Si la courbe C est fermée, on peut imaginer qu'elle forme le contour d'une surface arbitraire S, dont l'une des faces sera considérée comme positive, l'autre négative. Pour fixer les idées, on appellera sens *direct* du mouvement sur la courbe celui d'un mobile qui aurait la face positive à sa gauche.

Supposons maintenant que l'on partage la surface S en un nombre quelconque de parties, et que leurs contours soient parcourus dans le sens direct. Chacune des portions de courbe séparant deux aires voisines sera parcourue dans deux sens différents, suivant qu'elle sera considérée comme appartenant à l'un ou l'autre des contours. Si donc on applique l'intégrale précédente à toutes les parties de la surface, les termes relatifs aux trajets intérieurs disparaissent, il ne reste que les termes correspondant au contour extérieur.

Cette considération permet de transformer l'intégrale T en un flux au travers de la surface S, c'est-à-dire en une intégrale sur la surface.

Appelant X, Y et Z les composantes d'un vecteur F, fonc-

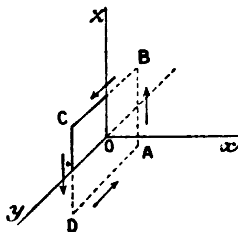


Fig. 7.

tion des coordonnées, de direction telle qu'il entre par la face négative de la surface S, le flux de ce vecteur qui traverse la surface est la somme des flux relatifs aux trois projections de la surface.

Pour un élément de surface ABCD (fig. 7) rectangulaire,

dont les côtés sont dy et dz, le flux du vecteur F est $\mathrm{X}\,dy\,dz$. Le contour de l'élément étant parcouru dans le sens direct, indiqué par les flèches, si F, G et H sont les composantes du vecteur J au centre O de l'élément, la composante parallèle à l'axe des z est égale à $H - \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial y}dy$ sur le côté AB, de longueur dz, et le travail $\left(H - \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial y}dy\right)dz$. Sur le côté opposé CD, où le mouvement a lieu en sens contraire, le travail est $-\left(H + \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial y}dy\right)dz$; la somme de ces travaux est donc $-\frac{\partial H}{\partial y}dy\,dz$.

Sur les deux autres côtés DA et BC, le travail de la composante G est $+\frac{\partial G}{\partial z}dz\,dy$.

Si l'on choisit le vecteur F de façon que le flux au travers de l'élément, c'est-à-dire $\mathrm{X}\,dy\,dz$, soit égal à la ligne intégrale de J le long du contour, il en résulte

$$\mathrm{X}\,dy\,dz = \left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}\right)dy\,dz.$$

En permutant les lettres, on obtiendra une relation analogue pour les autres composantes, ce qui donne

$$(19)\qquad \begin{cases} \mathrm{X} = \dfrac{\partial G}{\partial z} - \dfrac{\partial H}{\partial y}, \\ \mathrm{Y} = \dfrac{\partial H}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial z}, \\ \mathrm{Z} = \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\partial G}{\partial x}. \end{cases}$$

Le flux φ du vecteur F dans la surface considérée, étant égal au travail T du vecteur J sur le contour, pourra donc se représenter par l'une ou l'autre des deux expressions

$$\varphi = \int (F\,dx + G\,dy + H\,dz) = \iint (\mathrm{X}\,dy\,dz + \mathrm{Y}\,dz\,dx + \mathrm{Z}\,dx\,dy),$$

les composantes X, Y et Z étant remplacées par leurs valeurs (19) en fonction des composantes du vecteur J.

Inversement, le flux du vecteur F (X, Y, Z) dans la surface S peut s'exprimer par la ligne intégrale d'un vecteur J le long du contour. Mais ce vecteur n'est pas entièrement déterminé, les équations (19) ne donnant que les différences des dérivées partielles des composantes ; il n'en peut d'ailleurs être autrement, puisqu'il est permis d'ajouter sur le contour un vecteur quelconque dont la ligne intégrale soit nulle.

On a aussi

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right).$$

Par addition et soustraction d'un même terme $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, le second membre peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) - \Delta F = \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \Delta F,$$

en posant

$$\Theta = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}.$$

Le même raisonnement appliqué aux autres coordonnées donne les trois équations

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} &= \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \Delta F, \\ \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} &= \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \Delta G, \\ \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} &= \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Delta H. \end{aligned} \right.$$

Désignant par U une fonction quelconque des coordonnées, les équations (19) seront encore satisfaites si l'on remplace le vecteur primitif J par un autre vecteur J' (F', G', H') dont les composantes sont

$$F' = F + \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad G' = G + \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad H' = H + \frac{\partial U}{\partial z}.$$

On a, en effet, pour l'une quelconque de ces équations,

$$\frac{\partial G'}{\partial z} - \frac{\partial H'}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y},$$

et la valeur Θ' de la fonction Θ relative au vecteur J' est

$$\Theta' = \Theta + \Delta U.$$

Or, on peut toujours égaler à zéro la quantité $\Theta' - \Delta U$, ce qui revient à prendre pour la fonction U le potentiel d'un système dont la densité ρ en chaque point est définie par la condition $\Theta' + 4\pi\rho = 0$. Il en résulte $\Theta = 0$, c'est-à-dire que le vecteur J satisfait à l'équation de continuité; la fonction Θ disparaît alors des équations (20).

Lorsque le vecteur F est un champ électrique, l'expression $X dx + Y dy + Z dz$ est la différentielle exacte d'une fonction des coordonnées, puisqu'elle représente le travail du champ sur l'unité de masse qui décrit le chemin ds dont les projections sont dx, dy et dz, c'est-à-dire la variation correspondante $-dV$ du potentiel entre deux surfaces de niveau.

Les premiers membres des équations (20) sont donc nuls et, si l'on fait $\Theta = 0$, il reste

$$\Delta F = 0, \quad \Delta G = 0, \quad \Delta H = 0.$$

Finalement, on peut représenter le flux de force d'un champ dans une surface par la ligne intégrale d'un vecteur continu J, dont les composantes satisfont à l'équation de Laplace.

30. Tubes de force. — On appelle *tube de force* un canal limité latéralement par des lignes de force et, par suite, orthogonal aux surfaces de niveau.



Fig. 8.

Considérons un tube de force terminé par deux surfaces quelconques S et S' (fig. 8) et appliquons l'équation (7) au

volume ainsi défini. La surface latérale ne donne rien dans l'intégrale, puisqu'en chaque point la composante normale de la force est nulle; l'intégrale se réduit donc aux deux termes fournis par les surfaces terminales.

Supposons d'abord que le canal ne renferme aucune masse électrique. L'intégrale doit être nulle, ce qui donne

$$\int F_n dS + \int F'_n dS' = 0.$$

Les deux termes relatifs aux surfaces terminales sont ainsi égaux en valeurs absolues et de signes contraires, c'est-à-dire que *le flux de force est le même à l'entrée et à la sortie du canal.*

Le flux de force est donc le même à travers une section quelconque d'un canal orthogonal; il se conserve, comme le débit d'un liquide en mouvement dont la vitesse en chaque point serait égale à la force électrique et parallèle à sa direction. C'est une autre traduction de la condition de continuité (9).

Si la section du canal est infiniment petite et les surfaces terminales normales à la force, l'équation se réduit à

$$F dS = F' dS';$$

d'où il résulte que *la force électrique ou le champ en chaque point du tube est en raison inverse de la section.*

31. Théorème de Coulomb. — Considérons sur un conducteur en équilibre un élément de surface dS, et menons à l'extérieur le canal correspondant jusqu'à la rencontre d'une surface de niveau S_1 infiniment voisine. Prolongeant le canal à l'intérieur du conducteur d'une manière quelconque, terminons-le par une surface arbitraire S_2; appliquons ensuite le théorème au volume limité par les surfaces S_1 et S_2 et la surface latérale du canal. La force est nulle sur toute la surface S_2 qui fait partie du conducteur, et la composante normale est nulle sur la surface latérale du canal; il n'y aura donc de flux de force que pour la surface extérieure dS_1. La densité superficielle de l'électricité sur l'élément dS étant σ, la masse totale

comprise dans le volume considéré est σdS. En appelant F la valeur du champ sur l'élément dS_1, il en résulte

$$F dS_1 = 4\pi\sigma dS.$$

Comme les deux surfaces sont infiniment voisines et parallèles, on a $dS_1 = dS$, et il reste

$$F = 4\pi\sigma.$$

Ainsi, *le champ électrique en un point infiniment voisin d'un conducteur en équilibre, quelles que soient d'ailleurs les masses agissantes, est le produit par 4π de la densité électrique au voisinage de ce point.*

C'est une propriété qui avait déjà été établie directement pour la sphère (**15**).

On peut écrire encore

$$\sigma = \frac{F}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}.$$

La densité superficielle à la surface d'un conducteur en équilibre peut ainsi être exprimée en fonction du champ extérieur ou du potentiel.

32. Éléments correspondants. — Considérons enfin un tube de force infiniment étroit situé entre les surfaces de deux conducteurs auxquelles il aboutit normalement.

Les deux éléments de surface dS et dS' découpés par le tube sont dits *correspondants*.

Prolongeons le tube de part et d'autre jusque dans l'intérieur des conducteurs, où nous le supposerons terminé par deux surfaces arbitraires. Le flux de force est nul sur toute la surface du volume ainsi déterminé, puisque la force est tangente le long des parois latérales et nulle aux deux extrémités qui font partie des conducteurs. Quant aux masses électriques, si on désigne par σ et σ' les densités sur les éléments correspondants dS et dS', leur somme est $\sigma dS + \sigma' dS'$. Cette somme doit être nulle, ce qui donne

$$\sigma dS = -\sigma' dS'.$$

Ainsi, *deux éléments correspondants contiennent des quantités d'électricité égales et de signes contraires.*

Si les deux surfaces en regard sont des plans parallèles, les lignes de force sont normales aux plans et les éléments correspondants deviennent égaux; il reste alors

$$\sigma = -\sigma'.$$

Dans ce cas, le champ F est constant entre les deux plans et égal à $4\pi\sigma$; par suite, le potentiel varie dans l'intervalle proportionnellement à la distance à l'une des surfaces. Si l'épaisseur de cet intervalle est e, V et V′ étant les potentiels respectifs des plans S et S′, le champ est aussi égal à $\frac{V-V'}{e}$. Le potentiel U à la distance x du premier plan est alors

$$U = V - (V - V')\frac{x}{e} = V - Fx = V - 4\pi\sigma x.$$

Le champ $4\pi\sigma$ provient de deux actions égales produites respectivement par les deux surfaces électrisées. Il en résulte que l'action extérieure d'un plan électrisé de densité σ est constante, égale à $2\pi\sigma$, et que son potentiel varie comme $-2\pi\sigma x$; il est facile de vérifier directement ces deux théorèmes.

Les densités sur les éléments correspondants sont encore égales et de signes contraires lorsque les deux conducteurs, sans être plans, sont infiniment voisins, parce qu'alors les éléments de surface dS et dS' peuvent être considérés comme égaux entre eux.

33. Champ uniforme. — Lorsque les lignes de force sont parallèles entre elles, les surfaces de niveau sont des plans parallèles. Le flux de force est constant dans un tube cylindrique et il a la même valeur pour deux tubes quelconques de même section, puisque le champ est défini par la différence des potentiels. On dit alors que le champ est *uniforme*.

Réciproquement, si la force électrique dans un champ est constante en grandeur et en direction, les surfaces de niveau sont nécessairement des plans parallèles.

34. Surface électrisée séparant deux milieux. — Supposons enfin qu'une surface électrisée S (fig. 9), n'appartenant pas à

un corps conducteur, sépare deux diélectriques différents, et considérons un élément dS sur lequel la densité est σ.

Menons par le contour de cet élément un canal orthogonal terminé par deux bases égales et parallèles à dS, de hauteur telle que la surface latérale soit infiniment petite par rapport à celles des bases. Le flux de force relatif aux parois de ce

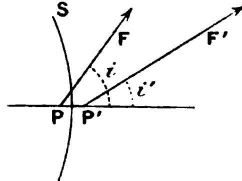


Fig. 9.

cylindre est négligeable par rapport au flux qui traverse les bases. En appelant F et F′ les valeurs du champ dans les deux milieux au voisinage de cet élément, on aura

$$4\pi\sigma dS = F'_n dS - F_n dS,$$
$$4\pi\sigma = F'_n - F_n.$$

Donc *la différence des composantes normales du champ, de part et d'autre d'une surface électrisée, est égale au produit de 4π par la densité sur la surface.*

Ce théorème comprend, comme cas particulier, celui de Coulomb (31) où S est la surface d'un conducteur.

Considérons deux points P et P′ situés au milieu des bases du cylindre précédent. L'action F au point P se compose de l'action de toutes les masses extérieures à l'élément et de l'action $-f$ de cet élément. Quand on passe de P en P′ l'action des masses extérieures ne change pas d'une manière sensible, mais celle de l'élément change de signe et devient $+f$. Comme cette action f est d'ailleurs normale par symétrie, la composante normale du champ varie de $+2f$, ce qui donne

$$F'_n - F_n = 2f = 4\pi\sigma,$$
$$f = 2\pi\sigma.$$

L'action d'un élément de surface sur un point infiniment

voisin est donc la même que celle d'un plan indéfini de même densité (32). C'est encore une propriété qui avait été déjà démontrée pour la sphère (15).

La composante normale du champ étant seule modifiée, les composantes tangentielles de F et F′ restent égales de part et d'autre de la surface. Appelant i et i' les angles de leurs directions avec la normale d'un même côté de la surface, on a

$$F' \sin i' = F \sin i.$$

L'équation précédente donne d'ailleurs

$$F' \cos i' - F \cos i = 4\pi\sigma;$$

on en déduit

$$\frac{\tan g\, i}{\tan g\, i'} = 1 + \frac{4\pi\sigma}{F \cos i} = 1 + \frac{4\pi\sigma}{F_n}.$$

Les forces électriques éprouvent donc une sorte de *réfraction*, lorsqu'elles rencontrent une surface électrisée. On peut remarquer en passant que, la loi de réfraction étant déterminée par le rapport des tangentes des angles de la normale avec les forces, il ne se présentera pas de phénomène analogue à la réflexion totale.

35. **Pression électrostatique.** — Les masses électriques occupent à la surface du conducteur une couche très mince dont l'épaisseur est nécessairement finie. Comme elles ne peuvent exister dans le conducteur lui-même, la couche doit être limitée à la surface et occuper une partie du milieu diélectrique qui l'entoure.

Si S est la surface d'un conducteur, le champ intérieur F est nul; le champ extérieur F′ est normal et égal à $4\pi\sigma$. Comme il se compose de l'action $2\pi\sigma$ de l'élément dS et celle des autres masses, cette dernière est aussi égale à $2\pi\sigma$.

La charge σdS de l'élément ne subit que l'action $2\pi\sigma$ des masses étrangères; l'effort mécanique qu'elle subit est donc

$$2\pi\sigma.\sigma dS = 2\pi\sigma^2 dS,$$

de sorte que l'action p par unité de surface est

$$p = 2\pi\sigma^2.$$

On peut écrire aussi, en appelant $F = 4\pi\sigma$ le champ extérieur au voisinage du conducteur,

$$p = 2\pi\sigma^2 = 2\pi\left(\frac{F}{4\pi}\right)^2 = \frac{F^2}{8\pi} = \frac{1}{2}F\sigma.$$

Ainsi, l'électricité répandue sur chaque unité de surface est poussée vers l'extérieur par une force mécanique égale à $2\pi\sigma^2$, proportionnelle au carré de la densité. Cette *pression électrostatique*, ou *tension électrique*, est contrebalancée par la résistance du milieu diélectrique.

Lorsque les conducteurs sont dans l'air, cette action a pour effet de diminuer la pression atmosphérique à leur surface. Si la pression était primitivement P par unité de surface sur les corps à l'état neutre, elle deviendra après l'électrisation, en chaque point de la surface des conducteurs,

$$P - p = P - 2\pi\sigma^2.$$

Ainsi une bulle de savon isolée doit augmenter de volume par l'électrisation et reprendre son volume primitif quand on la ramène à l'état naturel. Cette remarque suffirait pour expliquer l'expérience dans laquelle Van Marum a constaté que la force ascensionnelle d'un ballon rempli d'hydrogène augmente quand on l'électrise, si l'on était sûr d'avoir éliminé toute autre cause d'action directe [1].

L'ensemble des pressions électrostatiques qui s'exercent normalement en chaque point de la surface d'un conducteur équivaut, en général, à une force et à un couple. Le résultat auquel on arrivera par ce mode de calcul est évidemment identique à celui que donnerait la considération directe des actions des masses extérieures sur les différentes masses électriques du conducteur, que l'on supposerait fixées à la matière pondérable.

[1] Van Marum, *Exp. du Musée Teyler*, t. II, p. 218; Leyde, 1787.

CHAPITRE TROISIÈME

ÉQUILIBRE ÉLECTRIQUE

THÉORÈMES GÉNÉRAUX

36. Émission et absorption de forces par les masses électriques. — Le flux de force qui se propage dans un tube orthogonal reste constant, comme nous l'avons vu (**28**), tant que ce tube ne rencontre aucune masse agissante ; le sens de la propagation est celui vers lequel le potentiel diminue.

Si le tube rencontre une quantité q d'électricité, le flux de force prend, au lieu du passage, un accroissement $4\pi q$, qu'il conserve ensuite, tant que le tube ne rencontre pas de nouvelles masses. Si la masse rencontrée est sur la surface d'un conducteur, cette masse est telle qu'elle réduit à zéro le flux de force propagé par le tube ; on peut donc dire, de deux éléments correspondants $d\mathrm{S}$ et $d\mathrm{S}'$ où les densités sont σ et σ', que l'électricité positive de l'élément $d\mathrm{S}$ *émet* un flux de force $4\pi\sigma d\mathrm{S}$, lequel va *s'absorber* à l'autre bout du tube dans la quantité égale d'électricité négative située sur l'élément $d\mathrm{S}'$.

Dans les idées de Faraday, il n'existerait pas de tubes de force indéfinis ; un tube émanant d'un corps électrisé irait toujours aboutir quelque part sur un autre corps, de manière à induire sur l'élément correspondant une quantité d'électricité égale et de signe contraire. Il ne pourrait, d'après cela, exister nulle part une quantité absolue et indépendante d'électricité, positive ou négative, qui n'aurait pas à l'autre extrémité du tube sa quantité complémentaire.

Aucune ligne de force ne peut exister entre deux points chargés de même électricité. Il n'en peut exister également entre deux points au même potentiel. Enfin, une ligne de force particulière peut correspondre, sur un conducteur, à un point non chargé d'électricité.

37. En dehors des masses agissantes, le potentiel ne peut être maximum ou minimum. — Une masse isolée q concentrée en un point peut être regardée comme une couche répandue sur un conducteur très petit. Si la masse q est positive, le point A qu'elle occupe est un centre d'émission de force pour toutes les directions; si elle est négative, c'est pour toutes les directions un centre d'absorption. Dans les deux cas, les surfaces de niveau voisines sont des surfaces fermées; elles tendent à devenir sphériques, car à une distance très petite r du point A, le potentiel des masses extérieures devient négligeable devant le potentiel de la masse q.

Les surfaces de niveau étant fermées autour de A, le potentiel en ce point est un maximum, si la masse q est positive, et un minimum si elle est négative.

Réciproquement, partout où le potentiel présente un maximum ou un minimum, il y a de l'électricité.

En effet, à partir d'un point A de maximum, le potentiel est décroissant dans toutes les directions, les surfaces de niveau voisines sont nécessairement fermées, et le flux de force φ qui traverse, par exemple, une surface sphérique S très petite comprenant le point A a une valeur finie. Il y a donc dans l'intérieur de cette surface une quantité q d'électricité positive telle que $4\pi q = \varphi$.

De même, un minimum de potentiel est un centre d'absorption de force et il existe en ce point une masse correspondante d'électricité négative.

38. Points et lignes d'équilibre. — Soit V_0 le potentiel en un point fixe P_0, V le potentiel en un point voisin P, situé en dehors des masses agissantes, dont les coordonnées par rapport à des axes passant par le premier sont x, y et z.

On peut développer le potentiel V en fonction des puissances croissantes des coordonnées et écrire

$$V = V_0 + H_1 + H_2 + \cdots\cdots + H_n + \cdots\cdots,$$

le terme H_1 étant une fonction homogène du premier degré des coordonnées du point P, H_2 une fonction du second degré,.... H_n du n degré....

L'équation de Laplace devra être satisfaite séparément pour chacune de ces fonctions et on aura, en général,

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial z^2} = 0.$$

Si la fonction H_1 est identiquement nulle, c'est-à-dire si les trois dérivées partielles du potentiel sont nulles en P_0, ce point est un point singulier de la surface de niveau V_0; la force électrique y est nulle, c'est un *point d'équilibre*.

Pour les points voisins, on pourra négliger les puissances des coordonnées supérieures à la seconde, et l'expression du potentiel se réduit à

$$V = V_0 + H_2.$$

L'équation $H_2 = 0$ représente le cône du second degré des tangentes à la surface de niveau au point d'équilibre P_0.

Si la fonction H_2 est elle-même identiquement nulle, ainsi que quelques-unes des suivantes, et que H_n soit la première fonction du développement qui ne s'évanouisse pas, l'équation $H_n = 0$ représentera, de même, le cône du n^e degré des tangentes à la surface de niveau au point P_0.

Si deux nappes du cône se coupent, chaque ligne d'intersection est tangente à l'intersection des nappes correspondantes de la surface de niveau, c'est-à-dire à une *ligne d'équilibre* qui passe par le point P_0.

I. — *Si la surface de niveau au point P_0 est formée de deux nappes qui se coupent, l'intersection se fait à angle droit.*

Lorsque la surface de niveau est formée de deux nappes seulement, le cône du second degré tangent en un point P_0 de la ligne d'intersection se réduit à deux plans. Si l'on prend la tangente à cette ligne pour axe des z, l'équation du cône $H_2 = 0$ ne renfermera pas de terme en z. Pour satisfaire à l'équation de Laplace, qui se réduit à

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial y^2} = 0,$$

il faut alors que les coefficients des termes en x^2 et y^2 soient égaux et de signes contraires, de sorte que l'équation du cône est de la forme

$$A(x^2 - y^2) + Bxy = 0;$$

elle représente deux plans rectangulaires.

Considérons, comme exemple, le cas d'un conducteur A dont la surface est chargée en partie d'électricité positive et d'électricité négative, comme dans les phenomènes d'influence électrique (6); la ligne de séparation des deux couches est une *ligne neutre*. La force est nulle en tous les points de la ligne neutre et il y a dans le diélectrique une autre surface de niveau, au même potentiel que le conducteur, qui le coupe normalement le long de cette ligne. On remarquera que cette surface de niveau particulière sépare les lignes de force émanant du conducteur A de celles qui viennent y aboutir. On pourrait donc aussi la considérer comme une surface limite des lignes de force.

II. — *Si la surface de niveau est formée de n feuillets se coupant suivant la même ligne, les intersections successives ont lieu sous l'angle* $\frac{\pi}{n}$.

Toutes les fonctions H du développement du potentiel, à partir d'un point P_0 de la ligne d'équilibre sont nulles identiquement jusqu'à celle de degré n, puisque le cône tangent est formé de n nappes. Pour que l'équation $H_n = 0$ représente n plans passant par l'axe de z, elle ne doit pas renfermer de termes en z. L'équation de Laplace se réduit donc à

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial y^2} = 0,$$

ou, en coordonnées polaires, en posant

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_n}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_n}{\partial \theta^2} = 0.$$

La fonction de degré n qui satisfait à cette équation est

$$H_n = A_n r^n \cos(n\theta + \alpha_n).$$

En l'égalant à zéro, la condition $\cos(n\theta + \alpha_n) = 0$ représente n plans passant par l'axe des z et dont les angles successifs sont égaux à $\frac{\pi}{n}$. Les feuillets de la surface de niveau se coupent donc aussi successivement sous le même angle.

39. L'état d'équilibre est unique. — On peut remarquer, d'abord, que *la superposition de deux états d'équilibre est un état d'équilibre.*

En effet, dans chacun des deux états d'équilibre le potentiel est constant sur tous les conducteurs. La superposition des deux systèmes de couches électriques produit en chaque point un potentiel égal à la somme des potentiels relatifs aux deux états primitifs. Le potentiel est donc encore constant sur chacun des conducteurs et l'équilibre existe.

Il en résulte que, si l'on change dans un rapport constant la densité électrique en chaque point, on obtiendra un nouvel état d'équilibre, puisque l'opération revient à superposer deux ou plusieurs états d'équilibre identiques.

Un système de conducteurs A_1, A_2, A_3..... *dont les charges électriques sont toutes nulles séparément, est nécessairement à l'état neutre.*

Désignons, en effet, par V_1, V_2, V_3..... les potentiels de ces différents conducteurs, et soit V_1 le plus grand.

Il ne peut y avoir dans le diélectrique aucun point où le potentiel soit plus élevé que V_1, puisqu'il n'y a pas de maximum de potentiel en dehors des masses agissantes. Le potentiel baisse donc dans tous les sens à partir du conducteur A_1, toutes les lignes de force émanent de ce conducteur et aucune n'y aboutit. Comme la somme des flux de force doit être nulle, puisque, par hypothèse, la charge totale de A_1 est nulle, on voit que tous les flux de force élémentaires sont nuls. La densité est donc nulle sur toute la surface et, par suite, le conducteur n'est pas électrisé.

Le conducteur A_1, étant à l'état neutre, n'exerce aucune action sur les conducteurs voisins; on peut le supprimer et

raisonner de la même manière sur le conducteur suivant A_2. On démontrera ainsi successivement que tous les conducteurs sont à l'état neutre.

Supposons maintenant que les conducteurs $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots$, ayant des charges $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots\ldots$, différentes de zéro, il y ait deux états d'équilibre possibles, tels que les densités sur $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots$, soient $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots\ldots$, dans le premier état et $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3 \ldots\ldots$, dans le second.

En changeant les signes de toutes les masses électriques du deuxième état, on aura encore un état d'équilibre, lequel, superposé au premier, donnera un nouvel état d'équilibre où la charge totale sera nulle sur chacun des conducteurs.

Dans ce cas, la densité doit être nulle partout, d'après la remarque précédente. On a donc $\sigma_1 = \sigma'_1$, $\sigma_2 = \sigma'_2$, $\sigma_3 = \sigma'_3 \ldots\ldots$; par suite, la distribution est la même dans les deux états, et l'équilibre est unique.

Si le système proposé comprenait des masses fixes, on pourrait toujours les supposer sur des conducteurs infiniment petits et rien ne serait changé aux raisonnements. Le théorème est donc général.

40. Surfaces fermées. — La considération des surfaces fermées conduit à plusieurs propriétés très simples.

I. — *Si le potentiel est constant sur une surface fermée* S *ne renfermant pas de masse agissante, il est constant dans tout l'intérieur.*

En effet, le potentiel ne pourrait varier à l'intérieur de la surface S sans atteindre en un point une valeur maximum ou minimum, ce qui est impossible puisqu'il n'y a pas d'électricité (37).

Si la surface considérée est la surface extérieure d'un conducteur, on voit que le potentiel est constant, non seulement dans la masse du conducteur, ce qui est une conséquence déjà déduite des conditions de l'équilibre, mais dans les cavités que celui-ci peut renfermer.

II. — *Si une surface à potentiel constant comprend une portion du diélectrique, le potentiel est constant, non seulement dans l'espace intérieur, mais dans tout l'espace extérieur, en dehors des masses agissantes.*

En effet, le potentiel étant constant à l'intérieur, aucune

ligne de force ne traverse la surface; toutes celles qui pourraient la rencontrer devraient y naître ou s'y absorber, ce qui est impossible, puisque la surface ne porte pas d'électricité. Aucune ligne de force ne rencontre donc la surface.

Puisqu'il n'y a aucune ligne de force rencontrant la surface, le potentiel est constant à l'extérieur dans son voisinage immédiat; on peut donc tracer tout autour une nouvelle surface S' jouissant de la même propriété, sur laquelle on répétera le même raisonnement, et ainsi de suite indéfiniment, à la condition de rester en dehors des masses agissantes.

Ce dernier théorème a été démontré par Gauss, d'une manière différente, au moyen du lemme suivant :

III. — *Si une surface sphérique ne renferme aucune masse agissante, le potentiel au centre est la moyenne des valeurs du potentiel aux différents points de la surface.*

En effet, soit R le rayon de la sphère, q une des masses agissantes située en un point extérieur P à une distance r du centre, et u la distance au point P d'un élément dS de la surface; la valeur moyenne, sur la surface, du potentiel dû à la masse q a pour expression

$$V_m = \frac{1}{4\pi R^2}\int\frac{q\,dS}{u}.$$

L'intégrale représente aussi la valeur en P du potentiel d'une couche homogène de densité q qui recouvrirait la sphère; elle est donc égale (34) à $\frac{4\pi R^2 q}{r}$.

Il en résulte que la valeur moyenne V_m du potentiel sur la sphère est $\frac{q}{r}$, c'est-à-dire égale à la valeur du potentiel de la masse q au centre de la sphère.

Ce raisonnement s'étend évidemment à un système de masses quelconques.

Cela posé, supposons que dans une portion du diélectrique limitée par la surface S, le potentiel ait une valeur constante V; si la valeur du potentiel était différente de V à l'extérieur, il serait toujours possible de tracer une sphère ayant son centre à l'intérieur de S et ne rencontrant à l'extérieur que des

points où le potentiel aurait une valeur toujours plus grande ou toujours plus petite que V; mais alors la valeur moyenne du potentiel sur la sphère serait différente de sa valeur au centre. Le potentiel à l'extérieur de la surface S ne peut donc être différent de V.

IV. — *Lorsqu'une surface fermée* S *enveloppe toutes les masses agissantes et que, sur cette surface, le potentiel a une valeur constante* V, *il a en chacun des points extérieurs une valeur comprise entre* V *et zéro.*

Supposons V positif. Comme le potentiel est nul à l'infini, il ne peut avoir en un point P extérieur à la surface une valeur supérieure à V, sans quoi il y aurait quelque part un maximum de potentiel et, par suite, des masses électriques, ce qui est contraire à l'hypothèse. De même, le potentiel en P ne peut pas être plus petit que zéro, sans quoi il y aurait un minimum. Le potentiel à l'extérieur est donc compris entre V et zéro. Il ne peut même être égal à V, à moins que V lui-même ne soit nul. En effet, il ne peut être égal à V sans être un maximum par rapport aux points voisins ou sans faire partie d'une région à potentiel constant qui s'étendrait jusqu'à la surface S; mais, dans ce dernier cas, d'après le théorème précédent, le potentiel serait constant dans tout le diélectrique et ne pourrait avoir que la valeur zéro, puisqu'il est nul à l'infini.

V. — *Une surface conductrice* S *qui renferme toutes les masses agissantes ne peut avoir d'électricité que d'une seule espèce.*

En effet, soit V le potentiel de la surface que nous supposerons positif. S'il y avait de l'électricité négative en un point A, des lignes de force aboutiraient à ce point et il faudrait qu'il y eut quelque part un point extérieur P où le potentiel eut une valeur supérieure à V, ce qui est impossible d'après le théorème précédent.

VI. — *Lorsque, dans un système en équilibre, un corps conducteur enveloppe diverses masses électriques, la somme algébrique des quantités d'électricité situées à l'intérieur et sur la surface interne du conducteur est nulle.*

Soient q, q', q'',..... les masses comprises à l'intérieur du conducteur A (fig. 10) et Q la masse de la couche répandue sur

la surface interne S ; ajoutons qu'il peut y avoir de l'électricité sur la surface extérieure S′ et d'autres masses situées en dehors. Sur une surface fermée S_1 prise dans le conducteur et comprenant toutes les masses internes, la force est nulle en chaque point.

Le flux de force relatif à cette surface est donc nul et, par conséquent, la somme algébrique des masses qu'elle renferme est nulle. On a donc :

$$Q + q + q' + q'' + \dots = 0, \quad \text{ou} \quad Q + \Sigma q = 0.$$

La couche Q développée par influence sur la surface S est égale et de signe contraire à la somme algébrique des masses comprises dans la cavité. Cette couche *absorbe* le flux de

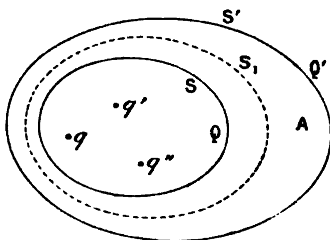


Fig. 10.

force qui émane des masses intérieures. Le système de cette couche et des masses qu'elle comprend donne un potentiel nul et une action nulle en tout point extérieur.

Lorsque le conducteur A est en communication avec le sol, son potentiel est nul ; si donc il n'y a pas d'autres masses agissantes que celles qui sont comprises dans la cavité, la surface extérieure S′ est à l'état neutre et le potentiel est nul partout en dehors de la cavité.

Une masse électrique Q′ mise sur la surface S′ isolée y prend une distribution indépendante des masses intérieures. Elle produira un potentiel constant V′ dans toute l'étendue du conducteur A et des cavités qu'il renferme, et ce potentiel s'ajoutera en chaque point au potentiel déjà existant. Cette masse Q′ n'aura donc aucune influence sur l'équilibre des masses intérieures.

VII. — S'il n'y a pas d'autres masses agissantes que celles qui sont comprises dans la cavité et si le conducteur A était primitivement à l'état neutre, sa charge totale doit rester nulle; en même temps qu'une couche Q sur la surface intérieure S, il se produira une couche égale et contraire Q′ sur la surface extérieure S′ et on aura

$$Q' = -Q = q + q' + q'' + \cdots\cdots = \Sigma q.$$

Cette couche Q′, égale à la somme algébrique des masses intérieures et de même signe, est en équilibre d'elle-même, quelle que soit la position des masses intérieures.

On trouve ainsi la loi de Faraday : *La quantité d'électricité induite par un système électrique sur un corps conducteur qui l'enveloppe est égale à la quantité inductrice.*

VIII. — *L'action que des masses électriques données exercent à l'extérieur d'une surface fermée quelconque est la même que celle d'une couche de même masse répandue sur cette surface suivant une certaine loi.*

Soit Q la somme des masses données, que l'on peut fixer respectivement aux points qu'elles occupent, comme si elles appartenaient à des corps isolants; une surface S de forme quelconque les renferme. Supposons que, pour un instant, on remplace cette surface par un feuillet conducteur infiniment mince relié au sol; la surface interne de ce feuillet se recouvrira d'une masse $-Q$ dont le potentiel pour tous les points extérieurs est égal et de signe contraire à celui des masses intérieures. Une couche $+Q$ distribuée de la même manière sur la surface S aura donc partout à l'extérieur un potentiel égal et de même signe que celui des masses considérées.

En général, cette couche ne sera pas en équilibre d'elle-même, c'est-à-dire qu'elle n'aura pas la distribution qui résulterait de la forme de la surface et de l'action des masses extérieures; les lignes de force ne la coupent pas normalement.

IX. — *La couche* $+Q$ *sera en équilibre d'elle-même, si la surface* S *est une surface de niveau du système primitif.*

Désignons par Q′ l'ensemble des masses extérieures. Les lignes de force du champ à l'extérieur de la surface S ne changent pas quand on remplace les masses intérieures par

la couche Q de même masse distribuée sur la surface; ces lignes étant normales à S par hypothèse, la couche Q qui la recouvre est en équilibre et le potentiel a une valeur constante V.

On pourra donc, pour les points extérieurs, remplacer le système des masses intérieures par une masse égale en équilibre sur une surface de niveau qui l'entoure, la densité étant déterminée en chaque point par la condition

$$\sigma = \frac{F}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}.$$

Cette substitution modifie le champ à l'intérieur de la surface S; dans le cas actuel, le potentiel intérieur est devenu constant et égal à V, puisqu'il est constant sur la surface et que la cavité ne renferme plus d'électricité.

Si le potentiel est constant, le champ est nul; le système extérieur Q′ et la couche Q exercent donc en chaque point de l'intérieur de S des actions égales et contraires; une couche — Q exercerait des actions égales et de même signe que celle des masses Q′. On peut donc, pour tous les points intérieurs à la surface de niveau S, substituer à l'action des masses extérieures celle d'une couche en équilibre égale aux masses intérieures et de signe contraire.

X. — Il en résulte les théorèmes suivants :

Si l'on considère une surface de niveau S dans un système électrique quelconque, on peut :

1° *Pour tous les points extérieurs, remplacer les masses intérieures par une masse* Q, *égale et de même signe, en équilibre sur cette surface;*

2° *Pour les points intérieurs, remplacer les masses extérieures par la même masse* Q *changée de signe, c'est-à-dire par une masse égale et contraire aux masses intérieures, cette couche étant encore en équilibre.*

41. Théorème de Gauss. — Étant donnés deux systèmes électriques, l'un formé de masses $q_1, q_2, q_3, \ldots$ dont le potentiel est V, l'autre de masses $q'_1, q'_2, q'_3, \ldots\ldots$ et de potentiel V′, on aura

$$\sum qV' = \sum q'V,$$

c'est-à-dire que *la somme des masses élémentaires du premier système, multipliées respectivement par la valeur du potentiel du second système au point que chacune d'elles occupe, est égale à la somme analogue relative aux masses du second système;* les sommes doivent être remplacées par des intégrales si les masses occupent une étendue finie.

Cette proposition est une identité; car si l'on remplace les potentiels par leurs valeurs en fonction des masses et des distances, les deux membres de l'équation représentent la somme des produits obtenus en multipliant chaque masse d'un système par une masse de l'autre système et divisant le produit par la distance qui les sépare.

On peut aussi remarquer que les sommes considérées désignent le travail qu'il faudrait dépenser pour amener respectivement en présence l'un de l'autre, depuis l'infini jusqu'à la position qu'ils occupent, les deux systèmes supposés rigides; dans l'un et l'autre cas, ce travail est évidemment le même.

Lorsque les deux systèmes sont formés des mêmes conducteurs A_1, A_2, A_3,..... en équilibre électrique, le potentiel est constant sur chaque conducteur; si leurs charges sont respectivement Q_1, Q_2, Q_3,..... et Q'_1, Q'_2, Q'_3....., dans les deux états, l'équation devient

$$Q_1V'_1 + Q_2V'_2 + Q_3V'_3 + \ldots = Q'_1V_1 + Q'_2V_2 + Q'_3V_3 + \ldots$$

42. Corollaires. — Les théorèmes suivants, comme l'a montré M. Bertrand [1], peuvent être considérés comme des corollaires du théorème de Gauss.

I. — *Si un conducteur* A *à l'état neutre, isolé ou non, est soumis à l'action d'une masse électrique* q *placée successivement en deux points* P *et* P' *du diélectrique, le potentiel dû à la charge induite en* A *sera le même au point* P' *dans le premier cas qu'au point* P *dans le second.*

Remarquons d'abord qu'on peut toujours considérer un point quelconque du diélectrique comme le centre d'une sphère conductrice infiniment petite, puisque la charge que prend cette sphère est toujours nulle, et donne toujours en son centre un potentiel égal à zéro.

[1] J. Bertrand, *Journal de physique* (1), t. III, p. 73; 1874.

Si le corps A est en communication avec le sol, on aura à considérer les deux états d'équilibre suivants :

		Potentiels.	Charges.
1°	Sphère P	U	q
	Sphère P′	V	o
	Corps A	o	x
2°	Sphère P	V′	o
	Sphère P′	U′	q
	Corps A	o	x'

Le théorème de Gauss, appliqué à ces deux états, se réduit à

$$qV' = qV, \quad \text{ou} \quad V' = V.$$

Si le corps A est isolé, son potentiel n'est pas égal à zéro, mais sa charge totale est nulle dans les deux états et le résultat final est le même.

II. — *Si, de deux conducteurs* A *et* B, *chacun est porté successivement au potentiel* V, *l'autre étant en communication avec le sol et par suite au potentiel zéro, la quantité d'électricité développée par influence sur le dernier est la même dans les deux cas.*

On a, en effet, dans les deux états :

		Potentiels.	Charges.
1°	A	V	x
	B	o	$-Q$
2°	A	o	$-Q'$
	B	V	x

Le théorème de Gauss donne encore

$$Q'V = QV, \quad \text{ou} \quad Q' = Q.$$

43. Théorème d'Earnshaw. — *Un corps électrisé ne peut pas être en équilibre stable dans un champ électrique.*

Soit un corps électrisé A placé dans un champ produit par

des masses extérieures, et supposons fixées toutes les masses, y compris celle de A.

Désignons par q la charge d'un élément de volume de A en un point P où le potentiel des masses extérieures est V. L'énergie potentielle du corps dans le champ, c'est-à-dire le travail qu'il faudrait dépenser pour l'y amener depuis l'infini, a pour expression

$$W = \sum qV, \tag{1}$$

Pour qu'il y ait équilibre stable, il faut que dans une direction quelconque la dérivée de l'énergie soit nulle ou positive.

Soient x, y, z, les coordonnées du point P, ξ, η, ζ celles d'un point P_0, pris à l'intérieur du corps A, et a, b, c celles du point P par rapport à trois axes nouveaux parallèles aux premiers et passant par le point P_0; on aura

$$x = a + \xi,$$
$$y = b + \eta,$$
$$z = c + \zeta.$$

Le potentiel V peut être considéré comme une fonction de a, b, c et de ξ, η, ζ. Si le corps A est astreint à se déplacer parallèlement à lui-même, les quantités a, b, c restent constantes et, par suite,

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2}. \tag{2}$$

Cette somme étant nulle pour chacun des termes qV du second membre de l'équation (1), puisque V représente le potentiel des masses extérieures, on aura aussi

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} = 0.$$

L'énergie W est donc une fonction des coordonnées du point P_0 et cette fonction satisfait à l'équation de Laplace, tant que l'équation (2) est elle-même satisfaite. On peut sup-

poser que le point P_0 reste compris à l'intérieur d'une sphère de rayon r assez petit pour que le corps considéré A ne rencontre aucune des masses extérieures. Pour tout déplacement parallèle à l'un des rayons de cette sphère, la variation d'énergie potentielle sera

$$dW = \frac{\partial W}{\partial r}\, dr.$$

L'équation de Green (26), appliquée à la surface de cette sphère, donne

$$\int \frac{\partial W}{\partial r}\, dS = \int \Delta W dv = 0.$$

L'intégrale du premier membre devant être nulle, il en résulte que la dérivée $\frac{\partial W}{\partial r}$ est négative pour certaines directions et positive pour d'autres ; par conséquent le corps A n'est pas en équilibre, et il tend à se déplacer vers les régions pour lesquelles l'énergie W diminue.

Il y a équilibre si la dérivée $\frac{\partial W}{\partial r}$ est toujours nulle, c'est-à-dire si l'énergie est constante ou passe par un maximum ou un minimum absolu. On a alors

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \sum q \frac{\partial V}{\partial x} = -\sum qX = 0,$$

et, de même, pour les autres coordonnées.

Les composantes X, Y, Z du champ produit par les masses extérieures peuvent être développées en fonction des puissances croissantes des coordonnées a, b, c et des composantes X_0, Y_0, Z_0 relatives au point P_0, ce qui donne

$$X = X_0 + H_1 + H_2 + \ldots\ldots + H_n + \ldots\ldots,$$

les termes $H_1, H_2, \ldots\ldots H_n \ldots$ étant des fonctions homogènes des degrés $1, 2 \ldots\ldots n \ldots$ des coordonnées a, b et c. Il en résulte

$$\sum qX = \sum q(X_0 + H_1 + H_2 + \ldots\ldots + H_n) = 0.$$

Pour que cette équation soit satisfaite, il est nécessaire que tous les coefficients du développement soient nuls ; cette condition exige d'abord que toutes les dérivées de X soient nulles, puisque la position du point P_0 est arbitraire, et ensuite que l'on ait

$$o = X_0 \sum q = X_0 Q.$$

Il faut donc, ou que la masse totale Q du corps A soit nulle, ou que les composantes X_0 Y_0 et Z_0 du champ soient nulles elles-mêmes.

Ainsi, pour qu'un corps électrisé soit en équilibre, il faut que le champ soit nul ou que, le champ étant uniforme, la charge électrique du corps soit nulle.

Nous avons supposé pour cette démonstration que l'électricité était fixée sur le corps A et que les masses extérieures formaient elles-mêmes un système rigide. Le théorème s'applique, à plus forte raison, au cas où le système renfermerait des corps conducteurs. Si l'équilibre stable n'existe pas quand on introduit des liaisons dans le système, il existe encore moins lorsqu'on supprime ces liaisons, par exemple, lorsque les corps électrisés sont en partie conducteurs, ce qui laisse plus de jeu au déplacement des masses électriques.

ÉQUILIBRE DES CONDUCTEURS

44. Conditions d'équilibre. — Le problème général de l'équilibre électrique, quand il ne s'agit que des corps conducteurs, peut s'énoncer ainsi :

Les conducteurs étant donnés de forme et de position, les uns isolés, les autres en communication avec le sol, les premiers chargés d'une quantité donnée d'électricité, déterminer le potentiel en chaque point.

Le problème revient à déterminer une fonction V des coordonnées soumise aux conditions suivantes :

1° La fonction doit devenir nulle à l'infini et prendre une

valeur constante sur chacun des conducteurs, cette valeur étant zéro sur tous les conducteurs non isolés;

2° La fonction satisfait à l'équation de Laplace dans toute l'étendue diélectrique et à l'intérieur des conducteurs, puisque la densité électrique est nulle en tous ces points;

3° En chaque point de la surface des conducteurs la densité superficielle est déterminée par le théorème de Coulomb (**31**), de sorte que la charge totale Q de l'un des conducteurs a pour expression

$$Q = \int \sigma dS = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{dV}{dn}\, dS.$$

Ces trois conditions sont suffisantes, puisqu'elles déterminent un état d'équilibre satisfaisant aux données de la question, et qu'il n'y a pour le système qu'un seul état d'équilibre.

Le problème présente le plus souvent de grandes difficultés au point de vue mathématique. Il n'a été résolu d'une manière complète que dans un petit nombre de cas particuliers, dont nous étudierons plus loin les principaux, mais on peut déduire de l'énoncé plusieurs propriétés remarquables.

45. Remarques. — Supposons d'abord que, parmi tous les conducteurs en présence $A_1, A_2, A_3, \ldots$, un seul A_1, étant isolé, ait reçu une charge Q, et que tous les autres soient en communication avec le sol.

Lorsque l'équilibre est établi, le potentiel a une valeur constante V_1 sur le conducteur A_1, et il est nul sur tous les autres conducteurs. Supposons $V_1 > 0$.

Dans toute l'étendue du diélectrique le potentiel ne peut être ni supérieur à V_1 ni inférieur à zéro, et il est compris entre V_1 et o (**40**, IV). Il en résulte que les conducteurs en communication avec le sol ne possèdent que de l'électricité négative; car si leur surface présentait des régions positives, il en partirait des lignes de force qui se dirigeraient vers des points où le potentiel serait plus faible, c'est-à-dire négatif, et ces points n'existent pas.

Toutes les lignes de force du champ émanent donc exclusivement du conducteur A_1; les unes vont aboutir aux conducteurs en communication avec le sol, les autres s'éloignent

indéfiniment. Il en résulte que la somme des charges négatives de ces conducteurs est une fraction seulement de celle qui existe sur A_1 ; les deux charges ne seraient égales que si l'un des conducteurs en communication avec le sol entourait complètement A_1.

Supposons maintenant qu'il y ait en présence du conducteur A_1 d'autres conducteurs isolés A_2, A_3,....., d'abord à l'état neutre et dont la charge totale est ainsi restée nulle.

Le potentiel est encore positif et plus petit que V_1 dans toute l'étendue du diélectrique. Il a une valeur constante sur chacun des autres conducteurs ; cette valeur est positive, puisque tous les conducteurs ont une partie de leur surface chargée d'électricité positive, qu'il en émane, par conséquent, des lignes de force, et que ces lignes de force se propagent vers des régions où le potentiel est partout positif.

Soit A_2 celui des conducteurs isolés dont le potentiel V_2 est le plus élevé ; une portion de sa surface est négative, il reçoit donc des lignes de force. Aucune de ces lignes de force ne lui vient du sol, ni, par hypothèse, des autres conducteurs, dont le potentiel est plus faible ; toutes proviennent donc du conducteur A_1, et par suite V_2 est plus petit que V_1. Comme, d'ailleurs, les lignes de force reçues par A_2 ne forment pas la totalité de celles qui sont émises par A_1, chacune des couches positive et négative qui forment la charge nulle de A_2 est plus petite que la charge totale de A_1.

On raisonnerait de même pour tous les autres conducteurs ; ainsi, le suivant par ordre de grandeur du potentiel, A_3 par exemple, reçoit des lignes de force de A_1 et de A_2 et ces dernières peuvent être considérées comme provenant indirectement de A_1. Sur chacun des conducteurs isolés, la charge négative est donc moindre que la charge positive de A_1, à moins que l'un d'eux ne forme une surface fermée enveloppant complètement le conducteur A_1.

46. Relations entre les charges et les potentiels. — Désignant toujours par A_1, A_2, A_3,....., les conducteurs, soient Q_1, Q_2, Q_3,...., leurs charges respectives et V_1, V_2, V_3,....., les potentiels correspondants.

Supposons d'abord tous les conducteurs isolés, à l'état neutre et au potentiel zéro. Si nous donnons à l'un d'eux A_1,

une charge positive égale à l'unité, son potentiel devient α_{11}, et ceux des autres conducteurs sont respectivement $\alpha_{21}, \alpha_{31}, \ldots.$. Si, au lieu d'une charge égale à l'unité, on donnait à A_1 la charge Q_1, tous les potentiels seraient multipliés par Q_1, c'est-à-dire respectivement $\alpha_{11}Q_1, \alpha_{21}Q_1, \alpha_{31}Q_1, \ldots.$ De même, si l'on décharge A_1 et qu'on donne à A_2 la charge Q_2, les potentiels deviendront $\alpha_{12}Q_2, \alpha_{22}Q_2, \alpha_{32}Q_2, \ldots.$; et ainsi de suite. Or l'état final, quand tous les conducteurs reçoivent simultanément leurs charges respectives, est la superposition de tous les états obtenus ainsi successivement; on aura donc, pour exprimer le potentiel de chacun des conducteurs, une équation de la forme

$$(1) \qquad V_m = \alpha_{m1}Q_1 + \alpha_{m2}Q_2 + \alpha_{m3}Q_3 + \ldots,$$

et, par suite, autant d'équations semblables qu'il existe de conducteurs dans le système.

On en conclut le théorème suivant :

Dans un système électrique quelconque en équilibre, les potentiels des divers conducteurs peuvent s'exprimer linéairement en fonction des charges.

Parmi les p^2 coefficients des équations (1), dans le cas de p conducteurs, le coefficient α_{mm} exprime le potentiel du conducteur A_m quand il est chargé de l'unité d'électricité, tous les autres étant à l'état neutre; un coefficient tel que α_{nm} désigne le potentiel que prend, en même temps, un des conducteurs tel que A_n.

Il est facile de voir que ces derniers coefficients satisfont à la condition

$$(2) \qquad \alpha_{nm} = \alpha_{mn}.$$

En effet, considérons les deux états successifs où chacun des conducteurs A_m et A_n est seul chargé de l'unité d'électricité, tous les autres étant à l'état neutre; le théorème de Gauss (**41**) donne immédiatement l'équation (2).

La remarque faite plus haut (**45**) montre que tous les coefficients α sont positifs et qu'un coefficient tel que α_{mn} n'est jamais supérieur à α_{mm} ou α_{nn}.

Si l'on résout les équations (1) par rapport aux charges, on aura p équations de la forme

$$(3) \qquad Q_m = \gamma_{m1}V_1 + \gamma_{m2}V_2 + \cdots\cdots + \gamma_{mp}V_p,$$

contenant p^2 coefficients dont la signification est évidente.

Le coefficient γ_{mm} exprime la charge qu'il faut donner au conducteur A_m pour le porter à l'unité de potentiel, tous les autres étant au potentiel zéro. Ce coefficient, qui joue un grand rôle dans la théorie de l'électricité, est appelé la *capacité* du conducteur A_m; nous y reviendrons dans un instant.

Un coefficient tel que γ_{nm} exprime la charge que prend, en même temps, par induction, le conducteur A_n en communication avec le sol; on pourrait l'appeler le *coefficient d'électricité induite* sur A_n par A_m.

L'application du théorème de Gauss, dans le cas de deux états successifs où chacun des conducteurs A_m et A_n est porté à l'unité de potentiel, les autres communiquant avec le sol, montre que ces coefficients sont encore égaux deux à deux et qu'on a la condition

$$\gamma_{mn} = \gamma_{nm},$$

qui n'est qu'une extension du théorème démontré plus haut (**42**, II) pour deux conducteurs.

Si on se reporte à la remarque du n° **45**, il est facile de voir que, tandis que les coefficients γ_{mm}, qui expriment les capacités, sont tous positifs, les coefficients d'électricité induite, tels que γ_{nm} sont tous négatifs; de plus, que la somme de tous ceux qui sont relatifs à l'induction exercée par un même conducteur n'est jamais supérieure, en valeur absolue, à la capacité de ce conducteur lui-même. Par exemple, on a toujours

$$\gamma_{mm} + (\gamma_{1m} + \gamma_{2m} + \cdots\cdots + \gamma_{pm}) > 0,$$

à moins que l'un des conducteurs A_n en communication avec le sol n'enveloppe complètement le conducteur A_m. Dans ce cas, on aurait

$$\gamma_{mm} + \gamma_{nm} = 0,$$

et les $p-2$ autres coefficients relatifs au conducteur A_m, tels que $\gamma_{1m}, \gamma_{2m}, \ldots \gamma_{pm}$, seraient nuls.

47. Analogie thermique de l'équilibre électrique. — Il est intéressant de rapprocher du problème que nous venons de traiter, deux autres problèmes relatifs à des phénomènes tout différents mais qui, au point de vue analytique, présentent l'analogie la plus complète; celui de la propagation de la chaleur dans un milieu homogène et celui du mouvement permanent d'un liquide incompressible et sans frottement.

En résumé, le problème électrique est caractérisé par l'existence d'une fonction des coordonnées V qui, s'annulant à l'infini, a une valeur constante sur chacun des conducteurs, et satisfait pour tous les points du diélectrique à l'équation de Laplace $\Delta V = 0$.

En désignant par X, Y et Z les composantes du champ en un point P, la quantité

$$\Delta V = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$

représente le flux total de force qui sort de l'unité de volume pris en ce point, et l'équation $\Delta V = 0$ exprime que ce flux est nul dans le diélectrique ou à l'intérieur d'un conducteur, c'est-à-dire là où il ne se trouve pas d'électricité. C'est la condition de continuité du champ (**26**).

Imaginons maintenant que, dans un problème d'électricité statique, on remplace le milieu isolant par un milieu conducteur de la chaleur, homogène et *isotrope*, c'est-à-dire qui jouisse des mêmes propriétés dans toutes les directions, et chacun des conducteurs électrisés par des sources qui dégagent ou absorbent de la chaleur, de manière à maintenir sur les surfaces des températures constantes, égales respectivement en valeur numérique aux potentiels primitifs, de sorte que pour chacun de ces conducteurs ont ait $t = V$.

Une fois l'équilibre établi, chaque point du milieu sera à une température déterminée et l'on pourra tracer des surfaces *isothermes*, c'est-à-dire d'égale température ou d'égal niveau thermique. Il est évident que la température d'un point P compris entre deux surfaces isothermes S et S′ est indépendante

de la situation des sources, et qu'elle resterait la même, les sources étant supprimées, si l'on maintenait constantes d'une autre manière les températures t et t' de ces deux surfaces.

L'hypothèse de Fourier consiste d'abord à admettre, ce que l'on peut considérer comme la simple traduction des faits, que la chaleur se propage de proche en proche, que l'état thermique d'un point n'a d'influence sensible que sur les points très voisins et que les points les plus chauds tendent à élever la température des points les plus froids. Fourier admet, en outre, que les échanges de chaleur ne dépendent que des différences de température et non de leurs valeurs absolues. Cette hypothèse équivaut, en dernière analyse, à choisir une échelle particulière des températures.

Le flux de chaleur qui traverse un élément dS d'une surface isotherme S (fig. 11) est, par raison de symétrie, normal à cette surface et à toutes les surfaces isothermes qu'il ren-

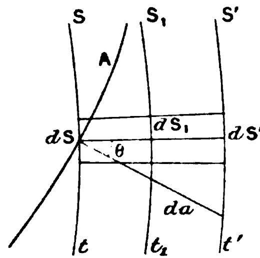


Fig. 11.

contre. Le flux de chaleur $d\varphi$ qui, dans l'unité de temps, va de l'élément dS à l'élément correspondant dS' d'une surface infiniment voisine à la distance e, est proportionnel à la surface dS, à la différence infiniment petite de température $t-t'$, à un coefficient h qui ne dépend que de la nature du milieu, enfin à une fonction $f(e)$ de la distance de ces éléments.

On peut donc écrire

$$d\varphi = h\,dS\,\frac{t-t'}{f(e)}.$$

Si l'on considère une surface intermédiaire S_1 à la tempé-

rature t_1, le flux de chaleur qui va de dS en dS' passe d'abord par l'élément dS_1 à la distance e_1, ce qui donne

$$d\varphi = h\,dS\,\frac{t-t_1}{f(e_1)} = h\,dS\,\frac{t-t'}{f(e)}.$$

Comme les différences de température $t-t_1$ et $t-t'$ sont proportionnelles aux distances normales, par raison de continuité, la fonction f est simplement proportionnelle à la distance. Le flux de chaleur entre deux éléments correspondants infiniment voisins, en appelant dt la variation de température comptée dans le sens du flux de chaleur et dn la distance des éléments, peut donc être exprimée par la formule suivante :

$$d\varphi = -k\,dS\,\frac{dt}{dn}.$$

Le coefficient k est le *coefficient de conductibilité* du milieu. Il représente le flux de chaleur par unité de surface entre deux plans parallèles distants de l'unité et dont la différence de température serait de 1°.

Dans le cas actuel, le flux par unité de surface en chaque point a pour valeur

$$\varphi = -k\,\frac{dt}{dn};$$

il est proportionnel à la dérivée de la température par rapport à la normale à la surface isotherme correspondante.

Le flux de chaleur est le même au travers d'un élément dA d'une surface quelconque A limité au même canal. En appelant θ l'angle que fait cet élément avec la surface de niveau et da la portion de la normale à l'élément dA comprise entre les surfaces S et S', on a

$$d\varphi = -k\,dA\,\frac{dt}{dn}\cos\theta = -k\,dA\,\frac{dt}{dn}\,\frac{dn}{da} = -k\,dA\,\frac{\partial t}{\partial a}.$$

Le flux au travers d'un élément de surface quelconque est

donc proportionnel à la dérivée partielle de la température dans le milieu par rapport à la normale à cette surface.

Puisque l'équilibre est établi, le flux total de chaleur correspondant à une surface fermée quelconque ne renfermant pas de source doit être nul. Soient u, v et w les composantes du flux en un point P, et $dx\,dy\,dz$ un élément de volume au même point; le flux qui entre par l'une des surfaces $dy\,dz$ est $u\,dy\,dz$, celui qui sort par la surface opposée est égal à $\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)dy\,dz$, la différence est $dx\,dy\,dz\,\frac{\partial u}{\partial x}$; le flux total qui sort de l'élément est donc

$$dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-k\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz.$$

Ce flux devant être nul, il en résulte

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=-k\Delta t=0.$$

Il est évident d'ailleurs que l'action du système n'est plus sensible à de grandes distances et que la température t qu'il détermine est nulle à l'infini.

La fonction t satisfait ainsi, pour chaque point du milieu et pour les limites, aux mêmes conditions que la fonction V. On voit, de plus, que si la constante k est égale à l'unité, les valeurs numériques du flux de force électrique et du flux de chaleur pendant l'unité de temps sont en chaque point identiques dans les deux problèmes.

48. Analogie hydrodynamique. — Considérons maintenant le problème correspondant d'hydrodynamique. Supposons que l'espace occupé primitivement par le diélectrique soit rempli par un liquide incompressible et sans frottement; supposons, en outre, que les conducteurs soient remplacés par des surfaces poreuses de telle sorte que le liquide ait en chaque point de leur surface une vitesse normale et égale à la valeur primitive de la force électrique au même point. L'ensemble des trajectoires des molécules qui ont traversé au même instant l'élément dS de la surface d'un conducteur

forment un *filet liquide*, qui s'en détache normalement et présente le même débit dans toutes les sections. Comme il n'y a nulle part accumulation de liquide, le flux qui pénètre dans un élément de volume $dx\,dy\,dz$ pris en un point quelconque P est égal à celui qui en sort; or, si on désigne par u, v, w les composantes de la vitesse au point P, cette condition s'exprime encore par l'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Le mouvement est d'ailleurs insensible à l'infini; on voit donc que la vitesse en chaque point dépend d'une fonction des coordonnées satisfaisant aux mêmes conditions que le potentiel ou la température. Partout les lignes de flux coïncideront avec les lignes de force du problème électrique correspondant et en chaque point la force électrique et la vitesse du liquide auront la même valeur numérique.

La corrélation que nous venons d'établir présente un grand intérêt; car, s'il est clair que les difficultés analytiques sont exactement les mêmes dans les trois espèces de problèmes, il n'en est pas moins vrai que certaines conséquences se présentent plus naturellement dans un certain ordre d'idées et tout résultat obtenu dans un cas peut être immédiatement transporté, avec sa traduction spéciale, dans les deux autres. On en trouvera plusieurs exemples par la suite.

49. Capacités électriques. — Nous avons appelé (46) *capacité d'un conducteur, la charge qu'il faut lui communiquer pour le porter à l'unité de potentiel, quand tous les conducteurs qui l'entourent sont en communication avec le sol.*

Il résulte de cette définition que la capacité d'un conducteur dépend non seulement de sa forme, mais de la forme et de la position de tous les conducteurs qui l'entourent.

Nous représenterons cette constante par la lettre C. Si, les conditions restant les mêmes, on donne au conducteur une charge Q, son potentiel sera évidemment, en vertu du principe de la superposition des états d'équilibre,

$$V=\frac{Q}{C},\qquad \text{d'où}\qquad Q=CV.$$

Le problème qui consiste à déterminer la capacité d'un conducteur, dans une circonstance donnée, revient à chercher l'état de l'équilibre du système formé par le conducteur en question et tous les conducteurs qui l'entourent, ceux-ci étant en communication avec le sol; il se confond donc avec le problème général de l'équilibre.

Le mot *capacité* a été emprunté, par analogie, à la théorie de la chaleur; mais il est important de remarquer que, tandis que la capacité calorifique d'un corps ne dépend que de la nature et du poids de ce corps, la capacité électrique d'un conducteur ne dépend ni de sa nature, ni de son poids, mais seulement de sa forme extérieure et de la forme et de la position de tous les conducteurs voisins. La capacité électrique n'est donc point, comme la capacité calorifique, une constante pour le corps considéré.

50. Sphère. — Surfaces concentriques. — Quand on électrise une sphère conductrice soustraite à toute action étrangère, la charge se distribue à la surface suivant une couche uniforme, par raison de symétrie, et le potentiel de la sphère est égal au quotient de la charge Q par le rayon R (**34**); on a alors

$$Q = RV.$$

La capacité de la sphère est donc égale au rayon R. On voit par là que la capacité électrostatique d'un conducteur est une quantité *linéaire*.

Supposons qu'une sphère conductrice A, de surface S et de rayon R, soit entourée par un conducteur A′ limité à deux surfaces sphériques S_1 et S', concentriques à la première, dont les rayons intérieur et extérieur sont R_1 et R'.

La sphère A ayant une charge Q, l'enveloppe A′ possède une charge $-Q$ sur la surface interne S_1; nous admettrons, en outre, qu'il existe sur la face externe S' une charge Q'.

Dans la sphère A, le potentiel V est constant et le même qu'au centre, c'est-à-dire

$$V = Q\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right) + \frac{Q'}{R'}.$$

Sur un point de l'enveloppe A′ les charges $\pm Q$ des sur-

faces S et S_1 ont un potentiel nul ; le potentiel V' ne dépend que de la couche extérieure Q' et il est le même qu'au centre de la sphère S' supposée homogène, c'est-à-dire $\frac{Q'}{R'}$; il en résulte

$$V - V' = Q\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right)$$

Si l'enveloppe A' a été maintenue isolée pendant la charge du noyau A, $Q' = Q$. La capacité C_1 de la sphère A relativement à cette disposition est donc

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'}.$$

Si l'enveloppe A' communique au sol, $Q' = 0$. En appelant e l'épaisseur $R_1 - R$ du diélectrique, la capacité C est alors

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} = \frac{e}{RR_1}.$$

Quelle que soit la charge supplémentaire Q', la différence du potentiel $V - V'$ ne dépend que de la charge interne Q. La capacité du système, rapportée à cette différence des potentiels, conserve la même valeur.

Si l'épaisseur e du diélectrique est très petite par rapport au rayon R, on peut remplacer le produit RR_1 par R^2, ce qui donne

$$C = \frac{R^2}{e} = \frac{4\pi R^2}{4\pi e} = \frac{S}{4\pi e}.$$

C'est là une expression qui s'appliquera à tout autre système formé de deux surfaces voisines à distance constante.

51. Couches ellipsoïdales. — *Si un conducteur terminé par la surface d'un ellipsoïde est couvert d'une couche homogène de densité* ρ *limitée elle-même par une seconde surface homothétique à la première, l'action de la couche sur un point intérieur quelconque* P *est nulle* (Newton).

Supposons, en effet, cette couche très mince et menons par le point P (fig. 12) une corde MM'. Les portions de cette

corde comprises entre les deux ellipsoïdes ont la même longueur l. Si l'on appelle θ l'angle de cette corde avec la normale N au point M, l'épaisseur h de la couche est $l\cos\theta$. Un cône d'ouverture angulaire $d\omega$ ayant son sommet au point P découpe au voisinage du point M un élément de surface dS, dont la charge est $dSh\rho = \rho l dS\cos\theta$. L'action de cet élément sur le point P est

$$\frac{\rho l dS\cos\theta}{r^2} = \rho l d\omega;$$

elle est égale à celle qu'exerce l'élément opposé dS' découpé par le même cône au point M' et, par suite, le champ intérieur est nul.

La densité superficielle au point M est $\sigma = h\rho$. Appelant

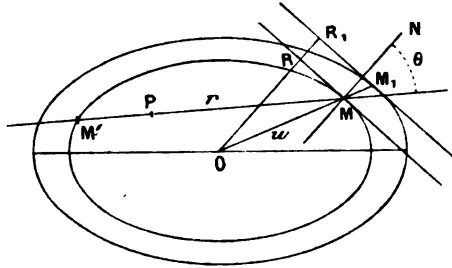


Fig. 12.

$1+\alpha$ le rapport de similitude des deux ellipsoïdes, soient p et p_1 les perpendiculaires OR et OR₁ abaissées du centre commun sur les plans tangents aux points M et M₁ situés sur le rayon vecteur OM, lesquels sont parallèles, on a

$$p_1 = p(1+\alpha), \qquad h = p_1 - p = p\alpha, \qquad \sigma = p\rho\alpha.$$

La densité σ est donc en chaque point proportionnelle à la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent.

L'ellipsoïde étant représenté par l'équation

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

la perpendiculaire p est donnée par l'expression

$$(5) \qquad \frac{1}{p^2} = \left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2,$$

et les cosinus directeurs de la normale sont respectivement

$$\frac{px}{a^2}, \quad \frac{py}{b^2}, \quad \frac{pz}{c^2}.$$

D'autre part, en désignant par v le volume $\frac{4}{3}\pi abc$ de l'ellipsoïde, la charge totale est

$$Q = v\left[(1+\alpha)^3 - 1\right]\rho = 3v\rho\alpha = 4\pi abc\,\frac{\sigma}{p},$$

et les densités aux extrémités des axes sont respectivement

$$\frac{\sigma_a}{a} = \frac{\sigma_b}{b} = \frac{\sigma_c}{c} = \frac{Q}{4\pi abc}.$$

Pour une même charge Q, ces densités sont proportionnelles aux longueurs des axes correspondants ([1]).

Comme le potentiel intérieur est constant, il suffit d'en calculer la valeur au centre; on a donc, en appelant u le rayon vecteur OM,

$$V = \int \frac{\sigma dS}{u} = \frac{Q}{3v}\int \frac{p dS}{u}.$$

et la capacité de l'ellipsoïde est

$$(6) \qquad \frac{1}{C} = \frac{V}{Q} = \frac{1}{3v}\int \frac{p dS}{u} = \frac{1}{4\pi abc}\int \frac{p dS}{u}.$$

([1]) Cette propriété permet d'expliquer ce qu'on appelle le *pouvoir des pointes*. Sur un ellipsoïde très allongé, en forme de double pointe, si les quantités Q et v restent constantes, la densité au sommet des pointes peut croître sans limite, et la tension électrostatique serait proportionnelle au carré de la longueur du grand axe. Dès que la tension atteint une certaine valeur, l'électricité passe du conducteur sur les masses d'air qui l'entourent, et celles-ci, étant électrisées, s'échappent d'abord suivant la direction des lignes de force en produisant les phénomènes connus de l'*aigrette* et du *vent électrique*. La réaction qui s'exerce sur la pointe produit une force en sens contraire qui agit sur le conducteur; c'est l'expérience du *tourniquet électrique*.

Le problème de l'ellipsoïde présente un intérêt capital en Mécanique céleste et a donné lieu à de nombreux travaux.

L'équation générale

$$(7) \qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$$

représente, suivant la valeur de λ, un système triplement orthogonal ([1]) de surfaces homofocales, des ellipsoïdes si les trois dénominateurs sont positifs, des hyperboloïdes à une ou deux nappes dans le cas contraire. Si ces surfaces passent par un même point M (x, y, z), les valeurs correspondantes de λ seront déterminées par les trois racines de l'équation (7).

A l'extérieur de l'ellipsoïde (4) considéré, le champ est normal à la surface, c'est-à-dire tangent aux deux hyperboloïdes homofocaux, et la ligne de force correspondante est l'intersection de ces deux surfaces.

Considérons la surface de niveau S' qui correspond au potentiel $V+dV$; cette surface est encore normale à la ligne de force qui passe par le point primitif M et aux hyperboloïdes homofocaux correspondants; c'est donc un ellipsoïde homofocal au premier, et le champ extérieur ne change pas si l'on porte sur cette surface la charge primitive distribuée suivant la même loi. Il en résulte ce théorème (Maclaurin) :

Deux couches électriques de même masse en équilibre sur des ellipsoïdes homofocaux ont le même champ extérieur.

([1]) Pour démontrer que ces surfaces sont orthogonales, remarquons que les cosinus directeurs de la normale sont respectivement proportionnels à $\frac{x}{a^2+\lambda}$, $\frac{y}{b^2+\lambda}$ et $\frac{z}{c^2+\lambda}$. La condition pour que les normales relatives à deux surfaces définies par les racines λ_1 et λ_2 soient perpendiculaires, est

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)}=P=0.$$

L'équation (7) étant satisfaite par les valeurs λ_1 et λ_2, la différence des premiers membres donne

$$x^2\left(\frac{1}{a^2+\lambda_1}-\frac{1}{a^2+\lambda_2}\right)+\ldots\ldots=(\lambda_2-\lambda_1)P=0,$$

ce qui exige $P=0$, puisque les racines λ_1 et λ_2 sont inégales.

Si dn désigne la distance normale de deux surfaces de niveau infiniment voisines S et S', on a

$$(8) \qquad -\frac{dV}{dn} = F = 4\pi\sigma = p\frac{Q}{abc}.$$

La distance dn des surfaces est donc en raison inverse de la perpendiculaire p.

D'une manière générale (¹), le champ extérieur F en un point quelconque P s'obtiendra en considérant l'ellipsoïde (7) homofocal de l'ellipsoïde primitif (4), dont la valeur de λ est la racine positive de cette équation dans laquelle on remplacera les coordonnées par celles du point P. Le champ est encore donné par l'équation (8), dans laquelle on remplacera a^2, b^2 et c^2 par $a^2+\lambda$, $b^2+\lambda$ et $c^2+\lambda$; la valeur de p étant ainsi définie par l'équation (5), ses cosinus directeurs sont

$$\frac{px}{a^2+\lambda}, \quad \frac{py}{b^2+\lambda}, \quad \frac{pz}{c^2+\lambda}.$$

Si dx, dy et dz sont les projections de la normale $dn = PP'$ comprise entre la surface de niveau S de potentiel V qui passe par le point P et la surface infiniment voisine S' de potentiel $V+dV$, et $d\lambda$ étant la variation correspondante du paramètre, on a

$$dx = \frac{px}{a^2+\lambda}dn,$$

$$d.\frac{x^2}{a^2+\lambda} = \frac{2x\,dx}{a^2+\lambda} - \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}d\lambda = (2p\,dn - d\lambda)\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}.$$

En répétant la même opération sur les trois termes de l'équation (7) et faisant la somme, il en résulte

$$(2p\,dn - d\lambda)\frac{1}{p^2} = 0, \qquad d\lambda = 2p\,dn,$$

(¹) Thomson and Tait, *Natural Philosophy*, 523; 1883.

et l'équation (8) devient

$$(9) \qquad -dV = \frac{Q}{2} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Supposons maintenant que l'on mette une couche $+Q$ en équilibre sur la surface S et une couche $-Q$ sur la surface S'; le potentiel extérieur de l'ensemble des deux couches est nul. Les potentiels intérieurs de chacune d'elles sont respectivement V et $-(V+dV)$; le potentiel intérieur à la surface S est donc constant et égal à $-dV$.

Ce problème correspond au cas d'un conducteur S, autour duquel serait une enveloppe conductrice non isolée, de surface intérieure S'. La capacité du système est alors

$$C = \frac{Q}{-dV} = 2\frac{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}{d\lambda}.$$

En particulier, si la surface S n'est autre que l'ellipsoïde (4) et que le grand axe de la surface S' soit $2a'$, on a $d\lambda = a'^2 - a^2$, $\lambda = 0$ et, par suite,

$$C = \frac{2abc}{a'^2 - a^2} = \frac{bc}{a' - a}.$$

Le potentiel extérieur de cet ellipsoïde, déterminé par l'équation (9), est d'ailleurs, en remplaçant Q par $4\pi abc\frac{\sigma}{p}$,

$$(10) \qquad V = -2\pi\frac{abc\sigma}{p}\int_{\infty}^{\lambda}\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

En prenant ainsi l'infini pour l'une des limites de l'intégrale, le potentiel tendra vers zéro à une très grande distance de l'ellipsoïde.

52. Ellipsoïde homogène. — L'équation (10) permet de déterminer le potentiel extérieur d'un ellipsoïde homogène ou formé de couches homothétiques homogènes. Les demi-axes de l'ellipsoïde étant a, b, c, considérons une surface intérieure S homothétique ($a\theta$, $b\theta$, $c\theta$) et une surface infiniment

voisine S′ définie par $\theta+d\theta$. Le rapport de similitude des deux ellipsoïdes correspondants est $1+\frac{d\theta}{\theta}$. Si la densité du milieu dans cette couche est ρ, la densité superficielle équivalente est

$$\sigma = p\rho\frac{d\theta}{\theta}$$

Remplaçant a, b, c par leurs nouvelles valeurs, la partie dV du potentiel extérieur due à cette couche est alors

$$(11)\quad dV = -2\pi abc\rho\theta^2 d\theta\int_\infty^\lambda \frac{d\lambda}{[(a^2\theta^2+\lambda)(b^2\theta^2+\lambda)(c^2\theta^2+\lambda)]^{\frac{1}{2}}}.$$

La valeur de λ est ici une fonction de θ déterminée par

$$(12)\qquad \frac{x^2}{a^2\theta^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2\theta^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2\theta^2+\lambda}=1,$$

ou, en posant $\lambda=\theta^2 u$, d'où $d\lambda=\theta^2 du$,

$$(13)\qquad \frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=\theta^2.$$

Il en résulte

$$dV = -2\pi abc\rho\theta d\theta\int_\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}},$$

et, en remplaçant $2\theta d\theta$ par sa valeur tirée de (13),

$$\frac{dV}{\pi abc\rho}=\left[\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}\right]du\int_\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}$$

Pour étendre cette expression à l'ellipsoïde entier, on doit faire varier θ de zéro à l'unité, c'est-à-dire la variable u, dans l'intégration correspondante, de l'infini à la valeur q déterminée par l'équation

$$(14)\qquad \frac{x^2}{a^2+q}+\frac{y^2}{b^2+q}+\frac{z^2}{c^2+q}=1.$$

Le potentiel extérieur de l'ellipsoïde est donc

$$\frac{V}{\pi abc} = \int_{\infty}^{q} \rho \left[\frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2} \right] du \int_{\infty} \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}.$$

Lorsque l'ellipsoïde est homogène, cette expression se simplifie, car l'intégration par parties donne

$$\int \frac{du}{(a^2+u)^2} \int_{\infty} f(u)\, du = -\frac{1}{a^2+u} \int_{\infty} f(u)\, du + \int \frac{f(u)\, du}{a^2+u}.$$

Entre les limites $u = \infty$ et $u = q$, le second membre devient

$$-\frac{1}{a^2+q} \int_{\infty}^{q} f(u) du + \int_{\infty}^{q} \frac{f(u) du}{a^2+u} = \frac{1}{a^2+q} \int_{q}^{\infty} f(u) du - \int_{q}^{\infty} \frac{f(u)}{a^2+u} du.$$

Si l'on répète la même opération pour les autres axes et que l'on porte ces valeurs dans l'expression du potentiel, en tenant compte de (14), il reste

$$\frac{V}{\pi\, abc \rho} = \int_{q}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} \right) \right] \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}.$$

Tel est le potentiel au point extérieur x, y, z d'un ellipsoïde homogène de densité ρ.

La composante du champ parallèle à l'axe des x est alors

$$X = 2\pi abc \rho x \int_{q}^{\infty} \frac{du}{(a^2+u)\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}},$$

et de même pour les autres composantes.

Pour la surface même de l'ellipsoïde, on doit faire $q = 0$. Si l'on pose alors

$$U = \int_{0}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}},$$

il en résulte

$$\frac{\partial U}{\partial (a^2)} = -\frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} \frac{du}{(a^2+u)\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}.$$

Les composantes du champ à la surface de l'ellipsoïde peuvent donc s'écrire

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= -4\pi abc\rho\frac{\partial U}{\partial(a^2)}x = \rho L x,\\ Y &= -4\pi abc\rho\frac{\partial U}{\partial(b^2)}y = \rho M y,\\ Z &= -4\pi abc\rho\frac{\partial U}{\partial(c^2)}z = \rho N z.\end{aligned}\right.$$

Ces composantes en un point sont respectivement proportionnelles aux coordonnées correspondantes.

Les coefficients L, M et N sont d'ailleurs déterminés par les rapports des axes de l'ellipsoïde et indépendants de leurs grandeurs absolues. En effet, si on multiplie ces axes par le même facteur θ, la valeur de L ne change pas, car on peut écrire,

$$-2\frac{\partial U}{\partial(a^2)} = \theta^3\int_0^\infty \frac{du}{(a^2\theta^2+u)\sqrt{(a^2\theta^2+u)(b^2\theta^2+u)(c^2\theta^2+u)}};$$

il en résulte, en posant $u=\theta^2 v$,

$$L = 2\pi abc\int_0^\infty \frac{dv}{(a^2+v)\sqrt{(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)}}.$$

Les actions de deux ellipsoïdes homogènes semblables et de même densité sur des points de leur surface semblablement placés sont donc simplement proportionnelles à leurs dimensions linéaires.

En un point situé dans l'intérieur de l'ellipsoïde, le champ ne dépend que du noyau limité à la surface homothétique qui passe par le point, puisque l'action de la couche extérieure est nulle.

En appelant V_0 le potentiel au centre, le potentiel intérieur V_i est donc

$$(16)\qquad V_i = V_0 - \frac{\rho}{2}(Lx^2 + My^2 + Nz^2).$$

53. Ellipsoïdes de révolution. — Dans le cas général, les coefficients L, M et N sont des fonctions elliptiques.

Si l'ellipsoïde est de révolution autour du petit axe c, c'est-à-dire de forme planétaire, on a, en appelant e l'excentricité,

$$a = b, \quad c^2 = a^2(1 - e^2),$$

$$(17) \begin{cases} N = \dfrac{4\pi}{e^2}\left[1 - \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e} \arc\sin e\right] = \dfrac{4\pi}{e^2}\left[1 - \dfrac{c}{a}\dfrac{\arc\sin e}{e}\right], \\ L = M = \dfrac{2\pi}{e^2}\left[\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e}\arc\sin e - (1-e^2)\right] = \dfrac{2\pi}{e^2}\dfrac{c}{a}\left(\dfrac{\arc\sin e}{e} - \dfrac{c}{a}\right). \end{cases}$$

Lorsque l'ellipsoïde a la forme d'un disque circulaire très aplati, l'excentricité est voisine de l'unité et l'on peut écrire

$$N = 4\pi, \quad L = M = \pi^2 \frac{c}{a} = \pi^2\sqrt{1-e^2}.$$

Pour un ovoïde, dont le grand axe est a, on a

$$(18) \begin{cases} M = N = \dfrac{2\pi}{e^2}\left[1 - \dfrac{1-e^2}{2}\mathfrak{L}.\dfrac{1+e}{1-e}\right] = \dfrac{2\pi}{e^2}\left[1 - \dfrac{b^2}{2a^2}\mathfrak{L}.\dfrac{1+e}{1-e}\right] \text{(1)}, \\ L = 4\pi\,\dfrac{1-e^2}{e}\left[\dfrac{1}{2e}\mathfrak{L}.\dfrac{1+e}{1-e} - 1\right] = \dfrac{4\pi}{e^2}\cdot\dfrac{b^2}{a^2}\left[\dfrac{1}{2e}\mathfrak{L}.\dfrac{1+e}{1-e} - 1\right], \end{cases}$$

ce qui donne, pour un ellipsoïde très allongé, en faisant e très voisin de l'unité,

$$M = N = 2\pi,$$
$$L = 4\pi\frac{b^2}{a^2}\left(\mathfrak{L}.\frac{2a}{b} - 1\right).$$

Quand on fait $e = 0$, les valeurs (17) et (18) se réduisent d'ailleurs à

$$L = M = N = \frac{4\pi}{3},$$

c'est-à-dire au coefficient trouvé pour la sphère (16).

Lorsque la surface d'un conducteur est ellipsoïdale, sa capacité déterminée par l'équation (6) est aussi une fonction

(1) Nous désignerons par le symbole $\mathfrak{L}$. les logarithmes népériens.

elliptique; elle peut également s'exprimer par les fonctions ordinaires quand l'ellipsoïde est de révolution.

L'axe de révolution étant a, si l'on prend comme élément de surface dS la zône décrite par un élément ds de la courbe méridienne, on a, en faisant $c = b$,

$$dS = 2\pi y\,ds = 2\pi y \frac{ds}{dx}\,dx = 2\pi \frac{b^2}{p}\,dx,$$

$$p\,dS = 2\pi b^2 dx.$$

On voit par là que la charge $p\,dS$ d'électricité est la même sur toutes les zones d'égale hauteur, ce qui avait déjà lieu pour la sphère; on peut dire que la densité linéaire rapportée à l'axe de rotation est constante.

Dans ce cas, la capacité de l'ellipsoïde devient

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi abc}\int \frac{p\,dS}{u} = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

On a alors $b^2 = a^2(1-e^2)$, ce qui donne

$$x^2 + y^2 = b^2 + e^2 x^2,$$

et la capacité correspondante C_a devient

$$\frac{1}{C_a} = \frac{1}{2ae}\left[\mathfrak{L}.\left(ex + \sqrt{b^2 + e^2 x^2}\right)\right]_{-a}^{+a} = \frac{1}{2ae}\,\mathfrak{L}.\,\frac{1+e}{1-e}.$$

Si l'ellipsoïde est de révolution autour du petit axe b, on a

$$\frac{1}{C_b} = \frac{1}{2b}\int \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad x^2 + y^2 = a^2\left(1 - e^2\frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$\frac{1}{C_b} = \frac{1}{2b}\cdot\frac{b}{ae}\left[\arcsin\frac{ey}{b}\right]_{-b}^{+b} = \frac{\arcsin e}{ae}.$$

Chacune de ces formules se réduit à $C = a$, lorsque l'excentricité est nulle, c'est-à-dire quand l'ellipsoïde devient une sphère.

54. Plateaux. — Un plateau elliptique peut être considéré comme un ellipsoïde très aplati. On a alors, à la limite

$$\frac{c^2}{v^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{a^2b^2}(a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2).$$

La densité sur le plateau a pour expression

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2b^2 - (b^2x^2 + a^2y^2)}};$$

les lignes d'égale densité sont des ellipses concentriques et homothétiques.

Pour un plateau circulaire de rayon a, la densité à une distance r du centre est

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

L'excentricité e est alors égale à l'unité et la valeur de C_b donne, pour la capacité du plateau,

$$C = \frac{2a}{\pi} = \frac{a}{1,571}.$$

55. Condensateurs. — On a vu, par les exemples précédents de surfaces sphériques concentriques ou de surfaces homofocales, qu'une enveloppe conductrice A′ permet d'accumuler ou de *condenser* sur un conducteur A, pour une même différence de potentiel, une quantité d'électricité plus grande que si cette enveloppe n'existait pas. Le même effet serait produit sur un conducteur quelconque A par la présence d'un second conducteur A′ en communication avec le sol, ou isolé mais avec une charge nulle, puisque ce conducteur diminue la valeur du potentiel de A pour une charge déterminée. On donne le nom de *condensateur* à un ensemble de conducteurs séparés par un diélectrique et disposés de manière à augmenter dans une proportion notable la capacité de l'un d'eux. Les deux corps A et A′ constituent ce qu'on appelle les *armatures*

du condensateur, l'un d'eux A étant le *collecteur* et l'autre A' le *condenseur*.

La *force condensante* d'un condensateur est le rapport qui existe entre la charge du collecteur, lorsqu'il fait partie de l'appareil de condensation, et la charge qu'il prendrait, pour le même potentiel, s'il était éloigné de tout autre conducteur; c'est donc le rapport des capacités du collecteur dans ces deux circonstances. Pour un condensateur sphérique à surfaces concentriques, dont l'armature extérieure communique au sol, la force condensante a pour valeur :

$$\frac{C}{R} = \frac{R}{e}.$$

L'idée de force condensante ne présente d'ailleurs aucun intérêt dans les applications; la seule grandeur qu'il importe de connaître, c'est la capacité d'un condensateur.

56. Jarres électriques. — On appelle *bouteille de Leyde*, ou *jarre électrique*, un flacon de verre dont on a couvert, par une feuille métallique, la surface intérieure et la surface extérieure, en laissant le verre à nu au voisinage de l'ouverture, pour que les feuilles métalliques ne communiquent pas entre elles. C'est un condensateur dont le verre forme le diélectrique et les feuilles de métal les armatures. Une tige conductrice passant par le goulot de la bouteille communique avec l'armature intérieure. Cet ensemble constitue un condensateur presque fermé, la petite zone qu'on est obligé de supprimer sur la surface extérieure, pour permettre la communication avec l'intérieur, n'ayant qu'une influence négligeable.

Il est facile de voir que l'expression trouvée (**50**) pour des surfaces sphériques concentriques très voisines, s'applique également à une bouteille de Leyde de forme quelconque, d'épaisseur constante très petite, dont les armatures couvrent toute la surface à l'intérieur et à l'extérieur.

Soient S et S' (fig. 13) les surfaces opposées des deux armatures, U et U' leurs potentiels. L'armature extérieure entourant complètement l'armature intérieure, les masses électriques sur ces deux surfaces sont égales et de signes contraires (**40**, VI). Pour un point P du diélectrique, le champ

a pour valeur, en appelant σ la densité en M de la couche interne et supposant l'épaisseur e très petite,

$$F = \frac{U - U'}{e} = 4\pi\sigma.$$

La charge d'un élément dS de la surface est σdS, et la charge totale a pour expression

$$Q = \int \sigma dS = \frac{U - U'}{4\pi} \int \frac{dS}{e}.$$

Si l'épaisseur e est constante, on a simplement, en appelant V la différence des potentiels $U - U'$,

$$Q = \frac{U - U'}{4\pi} \cdot \frac{S}{e} = \frac{VS}{4\pi e}.$$

La charge ne dépend que de la différence des potentiels et

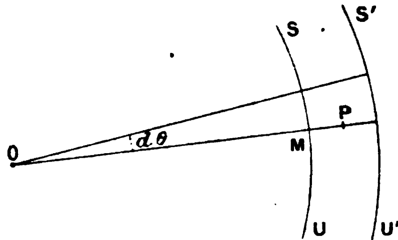


Fig. 13.

nullement de leurs valeurs absolues; ce résultat était facile à prévoir puisque la force elle-même ne dépend que de cette différence.

La capacité de la bouteille, c'est-à-dire la charge qui correspond à une différence de potentiel égale à l'unité entre les armatures, est alors

$$C = \frac{S}{4\pi e}.$$

57. Cylindres concentriques circulaires. — Supposons que les courbes S et S' (fig. 13) représentent les sections droites

des surfaces de deux cylindres concentriques à bases circulaires de rayons a et a' aux potentiels U et U'. Menons par l'axe commun O deux plans qui forment l'angle dièdre infiniment petit $d\theta$, et coupons ce dièdre par deux plans perpendiculaires à l'axe. Toutes les lignes de force étant normales à l'axe commun, par raison de symétrie, le volume ainsi déterminé est un tube de force; les surfaces qu'il intercepte sur les deux cylindres sont entre elles comme les arcs dS et dS', ou comme les rayons a et a'. Les valeurs F et F' du champ aux distances a et a' satisfont à la condition

$$F\,dS = F'\,dS', \qquad \text{ou} \qquad Fa = F'a' = A.$$

Le champ dans le diélectrique est donc en raison inverse de la distance à l'axe.

Si V est le potentiel à une distance quelconque r, on a

$$\frac{A}{r} = -\frac{dV}{dr}, \qquad \text{ou} \qquad V = -A\,\mathcal{L}.r + C.$$

Les potentiels de cette forme sont dits *logarithmiques*.

Si les surfaces S et S' sont des conducteurs dont on donne les potentiels U et U', on en déduit

$$U - U' = -A\,\mathcal{L}.\frac{a}{a'} = A\,\mathcal{L}.\frac{a'}{a},$$

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{U - U'}\,\mathcal{L}.\frac{a'}{a}.$$

D'autre part, la densité électrique σ à la surface du cylindre intérieur a pour expression

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}F = \frac{A}{4\pi a}.$$

Soit S l'étendue de la surface $2\pi a l$ du cylindre intérieur comprise entre les deux plans normaux à l'axe et distants de l; la masse Q d'électricité distribuée sur cette surface est

$$Q = S\sigma = \frac{AS}{4\pi a} = \frac{Al}{2},$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{2}{l}\,\frac{1}{U - U'}\,\mathcal{L}.\frac{a'}{a}.$$

La capacité C d'un condensateur cylindrique par unité de longueur est donc

$$\frac{1}{C} = 2\mathcal{L}.\frac{a'}{a}.$$

Ce problème est très important pour la pratique, parce qu'il correspond précisément au cas des câbles télégraphiques, qui sont formés de fils conducteurs entourés d'une couche isolante garantie elle-même par une armature métallique.

58. Condensateurs plans. — Si les surfaces S et S′ (fig. 13) sont des plans conducteurs parallèles indéfinis, les lignes de force sont des droites parallèles entre elles, normales aux surfaces considérées et le champ est uniforme (33). Lorsque ces surfaces appartiennent à deux plateaux parallèles assez rapprochés, le champ reste sensiblement uniforme à une distance des bords très grande par rapport à l'épaisseur du diélectrique et l'on peut écrire, en désignant encore par V la différence des potentiels U — U′,

$$F = \frac{V}{e} = 4\pi\sigma.$$

La pression électrostatique (35), c'est-à-dire l'action qui s'exerce sur l'unité de surface, est

$$p = 2\pi\sigma^2 = \frac{V^2}{8\pi e^2};$$

elle est proportionnelle au carré de la différence de potentiel et en raison inverse du carré de la distance.

Si une partie de la surface S, d'étendue a, située à une grande distance des bords, est seule mobile et que, communiquant toujours avec la surface générale pour conserver le même potentiel, elle soit maintenue dans le même plan par une force antagoniste, cette surface a aura une couche électrique uniforme et la force P nécessaire pour résister à l'attraction électrique a pour expression

$$P = pa = \frac{a}{8\pi}\frac{V^2}{e^2}.$$

La détermination des quantités P, a et e permet d'évaluer

la différence de potentiel V. Lord Kelvin a utilisé cette propriété dans la construction de ses électomètres absolus; il appelle *plateau de garde* (guard-plate) la portion de la surface S qui entoure la partie mobile pour y maintenir une distribution uniforme.

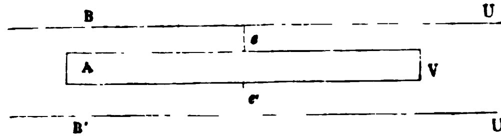


Fig. 14.

Supposons maintenant qu'un plateau A conducteur, au potentiel V (fig. 14), soit placé entre deux conducteurs B et B' terminés par des surfaces parallèles à celles du plateau, l'un à la distance e et au potentiel U, l'autre à la distance e' et au potentiel U'.

Pour les points assez éloignés des bords, les densités σ et σ' sur la face supérieure et la face inférieure du plateau A sont encore définis par les différences de potentiel correspondantes $V - U$ et $V - U'$, de sorte que la charge qui correspond à l'unité de surface du plateau est

$$\sigma + \sigma' = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{V-U}{e} + \frac{V-U'}{e'}\right).$$

En négligeant l'influence des bords, la charge totale du plateau A d'étendue S est donc

$$Q = \frac{S}{4\pi}\left(\frac{V-U}{e} + \frac{V-U'}{e'}\right).$$

Si les potentiels U et U' sont égaux, il reste simplement

$$Q = \frac{(V-U)S}{4\pi}\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e'}\right),$$

de sorte que la capacité de ce condensateur est

$$C = \frac{S}{4\pi}\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e'}\right).$$

59. Capacité d'un ensemble de conducteurs. — Considérons différents conducteurs, dont les capacités électriques sont respectivement C_1, C_2,....., disposés de manière que leur influence réciproque soit nulle, ce qui est le cas des jarres et des condensateurs fermés. Tous ces conducteurs étant électrisés au même potentiel, si on les réunit à l'aide de conducteurs dont la capacité est négligeable, par exemple des fils fins, il n'y aura aucun échange électrique entr'eux, et leur potentiel commun ne changera pas.

Ils constituent alors un conducteur unique dont la charge est égale à la somme des charges primitives. La capacité électrique de l'ensemble C est donc égale à la somme des capacités des conducteurs séparés.

Si les potentiels des conducteurs primitifs ont des valeurs différentes, V_1, V_2,....., les charges correspondantes sont

$$Q_1 = V_1 C_1, \quad Q_2 = V_2 C_2, \; \ldots\ldots$$

Toutes ces charges étant distribuées normalement sur le conducteur unique formé par l'ensemble, le potentiel V sera

$$VC = V_1 C_1 + V_2 C_2 + \ldots\ldots,$$
$$V = \frac{V_1 C_1 + V_2 C_2 + \ldots\ldots}{C_1 + C_2 + \ldots\ldots}.$$

On remarquera l'analogie de cette relation avec celle qui lie les températures et les capacités calorifiques lorsqu'on fait le *mélange* de plusieurs corps à températures différentes.

Cette combinaison de conducteurs est fréquemment utilisée dans les expériences, soit pour modifier les capacités employées, soit, sous le nom de *méthode des mélanges*, pour déterminer les rapports des capacités.

60. Batteries. — On appelle ainsi le système formé par plusieurs jarres ou condensateurs reliés entre eux.

Si ces condensateurs sont sensiblement fermés, comme les bouteilles de Leyde ordinaires, l'action extérieure de chacun d'eux est inappréciable et on peut les rapprocher sans qu'il y ait entre eux d'influence réciproque.

La communication peut se faire de deux manières :

1° On réunit, d'une part, toutes les armatures intérieures entre elles et, d'autre part, toutes les armatures extérieures; on dit alors que les jarres sont réunies en *surface* ou en *batterie*. L'ensemble constitue un condensateur dont la capacité est égale à la somme des capacités de toutes les jarres séparées. Si la batterie renferme p jarres identiques de capacité c, la capacité C de la batterie est

$$C = pc.$$

2° Toutes les jarres étant isolées, on réunit l'armature extérieure de chacune d'elles avec l'armature intérieure de la suivante; on charge l'armature intérieure de la première bouteille au potentiel V_1, l'armature extérieure de la dernière étant au potentiel V_{p+1} et toutes les armatures intermédiaires restent isolées; c'est la disposition en *série* ou en *cascade*.

Comme les deux armatures de chaque bouteille jouent le même rôle, il est plus commode de disposer autrement les communications. L'armature intérieure de la 1re jarre étant isolée, on réunit les armatures extérieures de la 1re et de la 2e, les armatures intérieures de la 2e et de la 3e, les armatures extérieures de la 3e et de la 4e....., et ainsi de suite.

61. Charge en cascade. — Supposons, pour fixer les idées, que l'on adopte la première disposition. La première jarre reçoit sur son armature intérieure une charge q et prend un potentiel V_1; il se produit sur la surface en regard de l'armature extérieure une charge $-q$ égale et contraire. Le conducteur formé par cette armature et l'armature intérieure de la seconde jarre étant resté isolé, il prend une charge $+q$ qui se distribue normalement sur ce conducteur, comme si les charges internes n'existaient pas, et y établit un potentiel V_2. La plus grande partie de cette charge se porte sur l'armature interne de la seconde bouteille dont la capacité est considérable par rapport au reste du conducteur considéré. En continuant le raisonnement, on voit que les armatures intérieures de toutes les bouteilles ont des charges successivement décroissantes, mais la diminution est très lente et on peut considérer toutes les bouteilles comme ayant la même charge interne $+q$, les potentiels successifs étant $V_1, V_2, \ldots, V_{p+1}$.

Si la batterie renferme p jarres, dont les capacités successives sont $C_1, C_2, \ldots, C_p$, on peut donc écrire

$$\frac{q}{C_1} = V_1 - V_2, \quad \frac{q}{C_2} = V_2 - V_3, \ldots \frac{q}{C_p} = V_p - V_{p+1}.$$

Ajoutant toutes ces équations membre à membre, les potentiels intermédiaires disparaissent et il reste

$$q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_p}\right) = V_1 - V_{p+1}.$$

Par rapport à la différence $V = V_1 - V_{p+1}$ des potentiels extrêmes, la capacité C de la batterie est donc

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_p}.$$

Si les jarres sont identiques, la capacité de la batterie est devenue p fois plus faible que celle de chacune d'elles.

Cet arrangement paraît défectueux puisqu'il a pour effet de diminuer beaucoup la capacité de la batterie; toutefois il présente des avantages précieux dans certaines expériences. Les bouteilles de Leyde ne peuvent supporter qu'une différence de potentiel limitée, au delà de laquelle la décharge s'effectue directement entre les armatures le long de la surface du verre et quelquefois à travers le verre lui-même qui est alors percé par une étincelle. A l'aide d'une batterie en cascade, on peut distribuer la différence totale de potentiel par échelons sur les bouteilles successives.

Telle est, par exemple, la disposition adoptée pour les machines de Holtz ordinaires, où l'on augmente la capacité des conducteurs en mettant chacun d'eux en communication avec l'armature intérieure d'une bouteille de Leyde ; mais on a soin de réunir ces bouteilles par leurs armatures extérieures pour en constituer une cascade, de manière à conserver la différence de potentiel maximum et, par suite, la distance explosive maximum que comporte le jeu de la machine.

Quand on dispose d'un grand nombre de bouteilles, on peut encore en former plusieurs batteries groupées en surface

que l'on réunit ensuite en cascade. On utilise ainsi en totalité la plus différence de potentiel que comporte le jeu d'une machine et on obtient le maximum d'effet avec la moindre dépense d'électricité.

62. Influence réciproque de deux conducteurs isolés. — Méthode de Murphy. — Pour déterminer la distribution de l'électricité sur deux conducteurs A et B isolés, ayant des charges Q_a et Q_b, et soumis seulement à leur influence réciproque, il suffit de connaître pour chacun d'eux :

1° La capacité et la distribution d'électricité à la surface quand il est soustrait à toute influence extérieure;

2° La distribution de l'électricité induite sur la surface quand, mis en communication avec le sol, il est soumis à l'influence d'une masse électrique placée en un point quelconque à l'extérieur.

Soit q la capacité propre du conducteur A, c'est-à-dire la charge qui lui donnerait l'unité de potentiel.

Fixons cette masse, dont la distribution est connue, et plaçons dans la position voulue le conducteur B en communication avec le sol. Celui-ci sera au potentiel zéro et se chargera d'une masse connue d'électricité contraire $-q'$.

Fixons, de même, la masse $-q'$ sur B. Isolons ce conducteur et mettons le premier en communication avec le sol; ce dernier prendra une masse q_1 et sera au potentiel zéro.

Fixant de nouveau la masse $+q_1$ sur A, on obtiendra sur B une couche induite $-q''$, etc.

En continuant ainsi, on obtiendra successivement sur les deux conducteurs des masses $q, q_1, q_2 \ldots$, pour le premier, et $-q', -q'', -q''' \ldots$, pour le second, chacune d'elles tendant vers zéro assez rapidement.

La superposition de toutes les couches $q, q_1, q_2 \ldots$, sur A et de toutes les couches $-q', -q'', -q''' \ldots$, sur B donne un état d'équilibre avec un potentiel nul sur B et égal à l'unité sur A. En effet, les couches successives q et $-q'$, q_1 et $-q'' \ldots$, considérées deux à deux, donnent sur B un potentiel nul; les couches $-q'$ et q_1, $-q''$ et $q_2, \ldots$ donnent de même sur A un potentiel nul. Il ne reste donc à considérer sur le premier conducteur que la masse q, laquelle produit un potentiel égal à l'unité.

En posant

$$C_a = q + q_1 + q_2 + \cdots\cdots,$$
$$C'_a = q' + q'' + q''' + \cdots\cdots,$$

on voit que C_a représente la capacité du conducteur A isolé, en présence du conducteur B réuni au sol et $-C'_a$ le coefficient d'électricité induite sur B (46).

Multiplions ces deux masses par V_a; les charges respectives $C_a V_a$ et $-C'_a V_a$ correspondent à un état d'équilibre avec un potentiel nul sur B et égal à V_a sur A.

Renversant le rôle des conducteurs, on obtiendra, de même, les masses $C_b V_b$ sur B et $-C'_b V_b$ sur A correspondant à un nouvel état d'équilibre, avec un potentiel nul sur A et égal à V_b sur B.

On doit remarquer, en outre, que les coefficients C'_a et C'_b sont égaux entre eux (42, II); on les représentera par le même symbole C_{ab}.

La superposition des deux systèmes donne un nouvel état d'équilibre avec addition des potentiels sur chacun des conducteurs, c'est-à-dire le potentiel V_a sur A et V_b sur B. Les charges totales Q_a et Q_b des deux conducteurs sont alors

$$Q_a = C_a V_a - C_{ab} V_b,$$
$$Q_b = C_b V_b - C_{ab} V_a.$$

Si l'on connaît les coefficients C, ces équations permettent de calculer les masses totales des deux conducteurs en fonction des potentiels.

On peut aussi en déduire les potentiels en fonction des charges, ce qui donne

$$V_a = \frac{C_b Q_a + C_{ab} Q_b}{C_a C_b - C_{ab}^2} = K_a Q_a + K_{ab} Q_b,$$

$$V_b = \frac{C_a Q_b + C_{ab} Q_a}{C_a C_b - C_{ab}^2} = K_b Q_b + K_{ab} Q_a.$$

63. Action réciproque de deux conducteurs. — La méthode précédente donne ainsi la distribution de l'électricité sur les deux conducteurs, puisque la densité finale en chaque point

est la somme des densités relatives aux différentes couches superposées, et que, par hypothèse, on connaît la loi de distribution pour chacune d'elles. On a donc tous les éléments nécessaires pour calculer l'action qui s'exerce entre eux.

La composante X parallèle à une direction déterminée provient de l'action de chacune des deux couches C_aV_a et $-C_{ab}V_b$ du corps A sur les deux couches C_bV_b et $-C_{ab}V_a$ du corps B. Les potentiels étant supposés positifs, l'action de C_aV_a est formée de deux termes, l'un répulsif proportionnel au produit V_aV_b, l'autre attractif proportionnel à V_a^2.

L'action de $-C_{ab}V_b$ comprend aussi deux termes, l'un attractif et l'autre répulsif, proportionnels à V_b^2 et à V_aV_b.

En désignant par a, b et c des coefficients qui dépendent de la forme des corps et de leur distance, la composante X de leur action réciproque, considérée comme répulsive, a donc une expression de la forme

$$X = 2cV_aV_b - aV_a^2 - bV_b^2.$$

Si les conducteurs A et B sont symétriques par rapport à un plan, les coefficients a et b relatifs à une direction perpendiculaire à ce plan sont égaux et la formule devient

$$X = 2cV_aV_b - a(V_a^2 + V_b^2).$$

Les trois composantes rectangulaires de l'action de deux corps et les couples de rotation auront des expressions de même forme; on déterminera ainsi, soit la résultante unique, soit la résultante et le couple ou les deux résultantes par lesquelles on peut remplacer l'action réciproque.

En réalité les calculs nécessaires pour déterminer les capacités C_a, C_b et C_{ab}, ainsi que les coefficients a, b et c, sont extrêmement pénibles, même dans les cas les plus simples. Nous indiquerons plus tard l'application qu'en a faite lord Kelvin à l'influence réciproque de deux sphères.

CHAPITRE QUATRIÈME

DE L'ÉNERGIE

TRAVAIL DES FORCES ÉLECTRIQUES

64. Energie électrique. — Lorsqu'on met en communication avec le sol différents conducteurs électrisés, le système revient de lui-même à l'état neutre en produisant un travail qui est nécessairement positif. Un système quelconque de conducteurs électrisés possède donc une énergie disponible correspondant à ce travail ; c'est une énergie *potentielle*, que l'on peut appeler simplement *énergie électrique*.

L'électrisation d'un système exige la dépense d'une quantité de travail égale à l'énergie potentielle qu'acquiert le système dans ce nouvel état.

Quand on établit une communication entre deux conducteurs, il se produit en général un changement dans la distribution des masses électriques, et cette modification correspond à un travail positif. L'énergie électrique d'un système de conducteurs est donc égale ou supérieure à celle du système que l'on obtiendrait en ajoutant des communications quelconques entre les conducteurs.

Lorsque le système renferme un corps isolant électrisé, on peut considérer les différentes masses électriques dont ce corps est chargé comme appartenant à des conducteurs infiniment petits ; l'énergie diminue si l'on établit une communication entre ces masses. L'énergie d'un système de corps, dont chacun possède une masse déterminée, est donc minimum quand ils sont tous conducteurs.

On peut évaluer l'énergie potentielle d'un système, soit par le travail dépensé pendant l'électrisation, soit par le travail fourni dans la décharge.

65. Conducteur unique. — Considérons d'abord un conducteur unique de capacité C, et supposons qu'on lui ait déjà communiqué la charge Q qui le porte au potentiel V. Pour augmenter la charge de dQ, il faut amener de l'infini ou de la surface du sol, jusque sur ce conducteur, une quantité dQ d'électricité, et le travail que l'on doit dépenser pour cette opération est égal à VdQ.

L'accroissement dW de l'énergie du conducteur est donc

$$dW = VdQ = \frac{QdQ}{C} = \frac{1}{2C}\, d.Q^2.$$

Comme la constante d'intégration est nulle, l'énergie qui correspond à la charge Q est

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV. \tag{1}$$

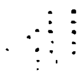
Ainsi *l'énergie électrique d'un conducteur unique est proportionnelle au carré de la charge ou au carré du potentiel.*

66. Système de conducteurs. — Soit maintenant un nombre quelconque de conducteurs A_1, A_2, A_3, ... ayant des charges Q_1, Q_2, Q_3, ... avec des potentiels V_1, V_2, V_3, ...

Si l'on multiplie la densité en chaque point par x, on obtient un nouvel état d'équilibre dans lequel les charges totales et les potentiels sont multipliés par ce même facteur x. Le conducteur A_1 possède la charge xQ_1 au potentiel xV_1, le conducteur A_2 la charge xQ_2 au potentiel xV_2, etc.

En donnant à x l'accroissement dx, les masses et les potentiels sont multipliés par $x + dx$, et l'accroissement de charge qui en résulte sur le conducteur A_1 est $Q_1 dx$. Le travail correspondant est $Q_1\, dx.\, xV_1$, ou $Q_1 V_1\, xdx$. Appliquant la même règle aux autres conducteurs, on voit que l'accroissement d'énergie du système est

$$dW = (Q_1V_1 + Q_2V_2 + \cdots\cdots)\, xdx = xdx \sum QV.$$



Entre deux valeurs x_0 et x_1 la variation d'énergie est

$$W_1 - W_0 = \frac{x_1^2 - x_0^2}{2} \sum QV.$$

Si l'on fait $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$, ce qui revient à supposer qu'on est parti de l'état neutre pour arriver à l'état considéré en premier lieu, il reste simplement

$$W = \frac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2 + \cdots\cdots) = \frac{1}{2}\sum QV.$$

Donc *l'énergie d'un système de conducteurs est égale à la demi-somme des produits de chaque masse par le potentiel correspondant*. C'est la généralisation du résultat obtenu pour un conducteur unique.

Un conducteur qui reste isolé pendant la charge s'électrise seulement par influence et sa charge totale est nulle; il n'y a donc pas, dans la somme des produits QV, de terme qui corresponde à un conducteur isolé.

De même, un conducteur maintenu en communication avec le sol est resté au potentiel zéro et ne donne aucun terme dans l'expression de l'énergie.

Il faut remarquer cependant que ces deux sortes de conducteurs interviennent en modifiant par influence les capacités et, par suite, les potentiels des corps électrisés.

Enfin, la même formule convient aussi au cas des corps isolants électrisés d'une manière quelconque, chacun des éléments de volume des corps isolants pouvant être considéré comme un conducteur infiniment petit sur lequel serait distribuée la masse électrique correspondante. Dans ce cas, la somme qui précède devient une intégrale; en appelant ρ la densité électrique et V le potentiel sur un élément de volume dv, l'énergie du système a pour expression

$$W = \frac{1}{2}\int V dQ = \frac{1}{2}\int V\rho\, dv.$$

L'énergie accumulée par l'électrisation sur un système de conducteurs est dépensée au moment de la décharge et peut

être transformée en un travail mécanique ou en un effet équivalent : chaleur dégagée, actions chimiques, etc.

Si l'électricité était une substance matérielle, les masses qui constituent les couches électriques acquerraient pendant la décharge une certaine force vive, en vertu de laquelle elles dépasseraient, comme un pendule, leur position d'équilibre, de manière à restituer au système une fraction de l'énergie primitive; il se produirait une succession de décharges alternativement de sens contraires jusqu'à ce que la chaleur dégagée sur les conducteurs ait épuisé l'énergie totale disponible, et l'équilibre final ne serait atteint qu'après un certain nombre d'oscillations. L'expérience montre que dans certaines conditions les décharges ont, en effet, un caractère oscillatoire manifeste; mais nous verrons que ces oscillations s'expliquent par une cause toute différente. On n'en peut donc rien conclure en faveur de l'hypothèse qui attribuerait une certaine inertie aux masses électriques et il n'existe, dans l'état actuel de la science, aucun fait décisif qui vienne à l'appui de cette hypothèse.

67. Décharge des batteries. — Batterie en surface. — Nous avons vu (**60**) que la capacité d'une série de jarres en batterie est égale à la somme des capacités de chacune d'elles.

Décharge totale. — L'énergie dépensée pendant la décharge complète de la batterie est donnée encore par l'expression (1).

Si la décharge se traduit finalement sous forme de chaleur, le nombre de calories dégagées est le quotient de l'énergie W par l'équivalent mécanique de la calorie (**17**).

Si la batterie est formée de p jarres identiques, de capacité c, la formule devient

$$W = \frac{1}{2p} \cdot \frac{Q^2}{c} = \frac{1}{2} pcV^2.$$

Lorsque les deux armatures sont isolées et que la décharge se fait par une communication établie entre elles, l'énergie dégagée a la même expression, si V désigne la différence des potentiels des armatures.

Pour une charge donnée, l'énergie ou la chaleur dégagée est en raison inverse du nombre des jarres; pour une même

différence de potentiel, l'énergie est proportionnelle au nombre des jarres.

Décharge incomplète. — Considérons deux batteries de capacités C_1 et C_2, la première chargée d'une masse Q et la seconde à l'état neutre, les armatures extérieures communiquant au sol. Supposons qu'au lieu de décharger la première, on joigne les deux armatures intérieures de manière à constituer une batterie unique de capacité $C_1 + C_2$; la décharge est dite *incomplète*. L'énergie potentielle W_1 de la première batterie avant la décharge et l'énergie W_2 du système après la décharge sont

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1}, \quad W_2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1 + C_2} = W_1 \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

L'énergie dépensée dans la décharge est donc

$$W_1 - W_2 = W_1\left(1 - \frac{C_1}{C_1 + C_2}\right) = W_1 \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

68. Batterie en cascade. — L'inverse de la capacité C d'une batterie disposée en cascade est la somme des inverses des capacités des différentes jarres qui la constituent (61).

L'expression de l'énergie potentielle du système ne comprend que le terme relatif à la première jarre, puisque tous les autres conducteurs sont restés isolés ou en communication avec le sol pendant la charge (66).

Si la cascade se compose de p jarres identiques, de capacité c, la capacité C est p fois moindre, ce qui donne, pour l'énergie,

$$W = \frac{1}{2} p \frac{Q^2}{c} = \frac{1}{2}\frac{cV^2}{p}.$$

Pour une charge donnée, l'énergie de la cascade sera p fois celle d'une seule bouteille; mais, pour une même différence de potentiel, elle sera p fois moindre. C'est l'inverse de ce qui avait lieu pour la batterie en surface.

Toutes ces lois relatives à la décharge des batteries ont été trouvées expérimentalement par Riess.

En résumé, quand on opère à potentiel constant, c'est-à-dire avec une *source* d'électricité, la meilleure combinaison que l'on puisse faire avec un nombre déterminé de bouteilles, pour obtenir le maximum d'énergie pendant la décharge, consiste à les réunir en surface, pourvu toutefois que les bouteilles puissent supporter la différence de potentiel maximum de la source. Si, au contraire, on dispose d'une charge limitée, il y a tout avantage à mettre la batterie en cascade.

Le premier cas est le plus fréquent, c'est celui qui se présente avec les machines électriques ; mais, comme ces appareils produisent habituellement des potentiels très élevés, il y a souvent intérêt à choisir une combinaison convenable des bouteilles suivant les deux systèmes, afin d'utiliser ces potentiels élevés en économisant la charge.

X **69. Expression des actions électriques par l'énergie.** — Lorsqu'on change la position relative des corps électrisés qui constituent un système, sans établir entre eux de communication conductrice, on provoque en général un travail positif ou négatif des forces électriques et, par suite, une variation d'énergie du système.

Si les déplacements produits correspondent à un travail $d\mathrm{T}$ des forces électriques, ce travail est emprunté à l'énergie primitive, de sorte que la variation correspondante $d\mathrm{W}$ satisfait à la condition

$$(2) \qquad d\mathrm{T} + d\mathrm{W} = 0.$$

Abandonnés aux actions électriques, les corps se déplacent de manière que l'énergie tende vers un minimum.

Supposons que l'un des corps d'un système électrique se déplace parallèlement à lui-même d'une quantité dx suivant la direction de l'axe des x. La composante des forces qui le sollicitent dans cette direction étant X, le travail électrique est Xdx et l'énergie du système a changé de $\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x}dx$. L'équation (2) donne alors, en répétant la même opération pour les autres coordonnées,

$$(3) \qquad X = -\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}.$$

Les composantes X, Y, Z sont liées à l'énergie W par les mêmes relations que les composantes X, Y, Z d'un champ électrique au potentiel V.

Si le corps considéré tourne autour de l'axe des x d'un angle $d\alpha$, et que A soit le couple moteur des actions électriques relatif à cet axe, le travail du couple est $A d\alpha$ et la variation d'énergie $\frac{\partial W}{\partial \alpha} d\alpha$. On aura donc aussi, en désignant par B, et C les couples relatifs aux autres axes, par β et γ les angles de rotation correspondants,

$$(4) \qquad A = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}, \quad B = -\frac{\partial W}{\partial \beta}, \quad C = -\frac{\partial W}{\partial \gamma}.$$

Si l'énergie W est connue pour tous les états du système, les équations (3) et (4) détermineront la force résultante $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ et le couple résultant $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ auxquels se réduit l'action du système sur l'un des corps.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de deux conducteurs A et B, dont on a déterminé les charges par la méthode de Murphy (62). L'énergie de système est

$$W = \frac{1}{2}(Q_a V_a + Q_b V_b) = \frac{1}{2}(C_a V_a^2 + C_b V_b^2 - 2 C_{ab} V_a V_b).$$

Pour calculer la composante X de leur action réciproque, on peut évidemment supposer que les potentiels restent constants. Les capacités C sont des fonctions de la position relative des deux corps. En désignant par des accents leurs dérivées partielles par rapport à la direction x suivant laquelle l'un des corps a été déplacé, on aura

$$X = \frac{1}{2}(2 C'_{ab} V_a V_b - C'_a V_a^2 - C'_b V_b^2).$$

C'est une expression de même forme que celle qui a été obtenue (63) par la considération directe des actions des couches électriques. Le calcul des couples donnerait des expressions analogues.

70. Déplacement des conducteurs. — Pour un système de conducteurs, la variation d'énergie relative au déplacement d'un ou plusieurs d'entre eux est

$$dW = d.\frac{1}{2}\Sigma QV = \frac{1}{2}\Sigma Q dV + \frac{1}{2}\Sigma V dQ.$$

Si la charge Q reste *constante* sur chacun des conducteurs, le dernier terme est nul et il reste simplement

$$dW = \frac{1}{2}\Sigma Q dV.$$

Le déplacement spontané tend donc à se faire de manière que les potentiels diminuent, ou au moins que la somme des produits de chacune des charges par la variation de potentiel correspondante soit négative.

Il en serait de même pour les corps isolants si l'on assimile chacun de leurs éléments de volume à un petit conducteur.

Si les potentiels restent *constants*, chacun des conducteurs étant relié à une source électrique située en dehors du champ d'action, la variation d'énergie du système est

$$dW = \frac{1}{2}\Sigma V dQ.$$

D'autre part, le travail dépensé par la source qui augmente de dQ la charge d'un conducteur, à potentiel constant V, est égal à VdQ.

Le travail total fourni par l'ensemble des sources est $\Sigma V dQ$, c'est-à-dire double de l'accroissement d'énergie du système. Ce travail se partage donc à chaque instant en deux parties égales : l'une qui accroît l'énergie du système, l'autre qui représente le travail des forces électriques correspondant au mouvement relatif des conducteurs.

Le dernier travail est positif si le système est abandonné à lui-même ; il est emprunté, ainsi qu'une quantité égale de surcroit d'énergie, aux sources qui maintiennent les potentiels constants.

Dans ce cas, abstraction faite des sources, l'énergie du système tend vers un maximum.

71. Système de trois conducteurs symétriques. — Nous en ferons une application au problème suivant, qui peut servir de base à la théorie des électromètres symétriques.

Considérons un système de conducteurs comprenant d'abord deux cylindres fixes A et B (fig. 15) de même axe et de même rayon, séparés par une petite distance et indéfinis, le premier vers la gauche et le second vers la droite, puis un cylindre C concentrique aux précédents, mobile dans le sens de cet axe, la longueur du cylindre intérieur C étant d'ailleurs assez grande pour que la densité électrique à chacune de ses extrémités ne dépende que du conducteur fixe le plus voisin. Les potentiels respectifs V_1, V_2 et V de ces trois conducteurs sont supposés constants.

Fig. 15.

Si le cylindre C glisse sur son axe d'une quantité dx, vers la droite par exemple, la distribution de l'électricité, sur les différentes surfaces voisines de l'ouverture et aux extrémités, n'est pas modifiée; on a simplement, de ce côté, augmenté d'une quantité proportionnelle à dx la surface sur laquelle la densité électrique est uniforme et définie par la différence des potentiels des conducteurs voisins. La moitié de droite du cylindre mobile aura donc gagné une certaine quantité d'électricité, et le cylindre fixe B une quantité égale d'électricité contraire; l'effet inverse se sera produit de l'autre côté.

En appelant c la capacité par unité de longueur du cylindre intérieur dans la région de densité uniforme, les variations de charge dQ_1, dQ_2 et dQ des trois conducteurs sont

$$dQ_1 = -c(V_1 - V)\,dx, \qquad dQ_2 = c(V_2 - V)\,dx,$$
$$dQ = -(dQ_1 + dQ_2) = c(V_1 - V_2)\,dx.$$

La variation d'énergie relative à cette déformation est alors

$$\frac{\partial W}{\partial x}dx = \frac{c\,dx}{2}\Big[(V_1 - V_2)V + (V_2 - V)V_2 - (V_1 - V)V_1\Big]$$
$$= c\,dx(V_1 - V_2)\Big[V - \frac{1}{2}(V_1 + V_2)\Big].$$

La résultante X des actions de A et B sur C est, par raison de symétrie, parallèle à l'axe commun et le travail accompli Xdx est égal à la variation d'énergie; on en déduit

$$X = \frac{\partial W}{\partial x} = c(V_1 - V_2)\Big[V - \frac{1}{2}(V_1 + V_2)\Big].$$

On peut, d'ailleurs, exprimer le coefficient c en fonction des données du problème. Lorsque les cylindres sont circulaires, le rayon extérieur a du conducteur C et le rayon intérieur a' des conducteurs A et B suffisent pour déterminer la capacité c par unité de longueur (57).

PRINCIPES GÉNÉRAUX

72. Conservation de l'énergie. — Lord Kelvin (1) a montré que les principes de thermodynamique, c'est-à-dire la conservation de l'énergie et le principe de Carnot, permettent d'établir un certain nombre de relations générales s'appliquant aux différentes propriétés des corps.

Toutes les fois qu'un corps perd de la chaleur ou change de dimensions, sous la seule influence des actions intérieures, il effectue un travail, calorifique ou mécanique, qui correspond à une perte d'énergie.

L'énergie potentielle d'un corps est le travail total qu'il pourrait effectuer par un refroidissement indéfini et par une extension ou une contraction sans limites, suivant que les

(1) Sir W. Thomson, *Phil. mag.* [5], t. V, p. 4; 1878.

forces moléculaires sont répulsives ou attractives. Il n'existe aucun moyen d'évaluer cette énergie totale, mais on peut en mesurer les changements à partir d'un état initial.

L'état mécanique d'un corps solide homogène, qui reste homogène après une déformation quelconque, peut être défini par six variables indépendantes, par exemple les côtés et les angles d'un parallélipipède ou les six éléments (axes et directions) d'un ellipsoïde qui renfermeraient toujours la même portion du corps.

L'énergie potentielle U d'un corps, à partir de l'état initial, est une fonction déterminée de son état mécanique et de sa température.

Lorsque ce corps reçoit une quantité dQ d'énergie calorifique, il éprouve en général une déformation et un changement dT de température. Si l'une des variables seulement x est devenue $x + dx$ (ou si les liaisons du système sont telles que l'état mécanique soit défini par une seule variable x), on peut écrire

$$dQ = a\,dx + c\,dT. \tag{1}$$

Les coefficients a et c ont une signification physique évidente. En les divisant par l'équivalent mécanique de la calorie, le premier a représente la chaleur latente relative au changement d'état défini par la variable x, et le second c la capacité calorifique pour un état mécanique constant.

Le travail mécanique $d\mathfrak{T}$ du corps qui correspond à la déformation dx, peut aussi se représenter par

$$d\mathfrak{T} = b\,dx. \tag{2}$$

Si le corps est en repos dans les deux états, ou si sa force vive n'a pas changé, l'accroissement d'énergie potentielle est

$$dU = dQ - d\mathfrak{T} = (a - b)\,dx + c\,dT. \tag{3}$$

Pour un cycle fermé, le corps revenant à son état primitif, l'énergie potentielle reprend la même valeur; la quantité dU

est donc la différentielle exacte d'une fonction des variables indépendantes x et T, ce qui donne la condition

$$(4) \qquad \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial T} - \frac{\partial b}{\partial T}.$$

Cette équation peut être considérée comme traduisant le principe de la conservation de l'énergie, ou l'équivalence mécanique de la chaleur.

73. Principe de Carnot. — Lorsque le cycle des transformations est fermé et *réversible*, c'est-à-dire que les changements inverses peuvent avoir lieu dans les mêmes circonstances, il résulte du principe de Carnot que la somme des quotients de l'énergie calorifique absorbée (ou dégagée), pendant chaque transformation infiniment petite, par la température absolue correspondante est nulle.

L'expression $\frac{dQ}{T}$ étant aussi une différentielle exacte, il en résulte la condition

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{a}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{T}\right),$$

$$(5) \qquad \frac{\partial a}{\partial T} - \frac{a}{T} = \frac{\partial c}{\partial x}.$$

En associant les deux principes, par les équations (4) et (5), on en déduit

$$(6) \qquad a = T\frac{\partial b}{\partial T}.$$

Si l'état mécanique du corps était défini par plusieurs variables indépendantes, on obtiendrait par le même raisonnement une série de relations analogues en combinant chacune des variables avec la température.

74. Conséquences thermiques. — Cette équation (6) conduit à plusieurs remarques importantes.

Si le corps éprouve une transformation *adiabatique*, c'est-

à-dire sans gain ni perte de chaleur, on fera $dQ = o$; les équations (1), (6) et (2) montrent alors que le corps est en même temps le siège d'une variation de température dT donnée par la relation

$$c\,dT = -a\,dx = -T\frac{\partial b}{\partial T}dx = -T\frac{\partial}{\partial T}(d\mathfrak{E}).$$

Suivant que le dernier terme est positif ou négatif, il en est de même pour la variation de température dT : le corps s'échauffe ou se refroidit. En d'autres termes, quand la déformation est telle que le travail des forces extérieures $-d\mathfrak{E}$ nécessaire pour la produire augmenterait avec la température, c'est-à-dire quand cette déformation équivaut à celle qui résulterait d'une diminution de température, le travail extérieur est accompagné d'un échauffement du corps; il y a refroidissement si le travail extérieur produit un effet de même sens qu'une élévation de température.

Par analogie avec la loi de Lenz, relative aux courants induits, on voit que la variation de température tend à s'opposer au travail extérieur.

C'est ainsi qu'un gaz s'échauffe quand on le comprime et se refroidit quand on le dilate, puisque le gaz, à pression constante, se contracte quand on le refroidit et se dilate quand on l'échauffe.

Comme les corps solides se dilatent, en général, lorsque la température s'élève, il en résulte aussi que la compression uniforme d'un corps solide l'échauffe et qu'une décompression le refroidit.

Il en est autrement pour les corps dont la dilatation est anormale, tels que l'eau à une température inférieure à 4° et l'iodure d'argent aux températures ordinaires. La compression de ces corps produit un abaissement de température.

De même encore, un fil métallique tordu doit se refroidir quand on le tord davantage (si l'on admet comme certain que le coefficient de torsion diminue quand la température augmente). Un fil tordu doit aussi s'échauffer, indépendamment du travail extérieur produit, quand on le laisse se détordre.

Dans chaque cas, l'énergie calorifique absorbée ou dégagée Q se déduit du travail extérieur et des propriétés du corps.

75. Transformations non réversibles. — Lorsque la série des transformations cesse d'être entièrement réversible, le principe de Carnot n'est plus applicable. Dans ce cas, la somme des quotients des quantités de chaleur absorbées par la température correspondante est toujours négative pour un cycle fermé.

Quand un système passe de l'état 1 à l'état 2, dans un cycle non fermé, par des transformations réversibles, on peut écrire

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} = S_2 - S_1.$$

La fonction S, que Clausius désigne sous le nom d'*entropie*, est déterminée, à une constante près, par l'état du système, car le second membre doit s'annuler si l'on revient du second état au premier par une transformation quelconque également réversible.

Si la transformation considérée n'est pas réversible, l'intégrale des quantités de chaleur absorbées est moindre et l'on a

$$(7) \qquad \int_1^2 \frac{dQ}{T} = S_2 - S_1 - N.$$

La quantité N est toujours positive; elle correspond à ce que Clausius appelle les transformations *non compensées*.

Lorsque le système est à température uniforme et invariable, c'est-à-dire ne subit que des transformations isothermiques, si l'on pose $NT = \mathfrak{E}'$, la quantité $\mathfrak{E}'$ est un travail, nécessairement positif, que l'on peut appeler *non compensé*, $T(S_2 - S_1)$ étant le travail *compensé*. Il en résulte :

1° Toute transformation isothermique d'un système est réversible si le travail compensé est nul, et non réversible si ce travail est positif.

2° Un système est en équilibre stable si aucune transformation isothermique possible ne correspond à un travail compensé positif.

Pour une transformation isothermique, on a donc, en remplaçant dQ par sa valeur tirée de (3),

$$\mathfrak{E}' = NT = T(S_2 - S_1) - (U_2 - U_1) - \int_1^2 d\mathfrak{E}.$$

Lorsque les forces extérieures admettent un potentiel E, auquel cas leur travail ne dépend que des états initial et final du système, le dernier terme est égal à la diminution correspondante $E_1 - E_2$ du potentiel. Si l'on pose

$$(8) \qquad \Omega = U - TS + E,$$

il en résulte

$$\mathfrak{G}' = \Omega_1 - \Omega_2.$$

La fonction Ω est ce que M. Duhem appelle le *potentiel thermodynamique*. Ce potentiel ne dépend pas uniquement de l'état du système, car les fonctions U, E et S ne sont déterminées qu'à des constantes près α, β et γ; Ω est donc une fonction de l'état du système et de la quantité $\alpha + \gamma - \beta T$, c'est-à-dire d'une fonction linéaire de la température à coefficients constants, mais arbitraires.

Si le travail extérieur est toujours nul, comme pour une pression uniforme et des volumes invariables, le potentiel électrodynamique se réduit à $U - TS$. Cette expression représente l'*énergie libre* de Von Helmholtz; sa valeur, prise en signe contraire, est aussi la fonction caractéristique H de M. Massieu.

La pression extérieure restant uniforme et constante, si le volume v change, on a

$$(9) \qquad d\mathfrak{G} = p\,dv = d(pv).$$

On peut alors prendre $E = pv$, ce qui donne

$$(10) \qquad \Phi = U - TS + pv.$$

Cette valeur Φ du potentiel thermodynamique représente, en signe contraire, la fonction caractéristique H′ de M. Massieu.

Pour une transformation infiniment petite du système, le travail non compensé est du second ordre et l'on a

$$(11) \qquad dS = \frac{dQ}{T}.$$

Si l'on désigne par C l'énergie correspondante à la capacité calorifique d'un corps, et que la transformation provienne

uniquement d'un gain de chaleur, on a $dQ = C dT$, $dS = \frac{\partial S}{\partial T} dT$ et, par suite,

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T}. \tag{12}$$

Pour une pression extérieure uniforme et constante, on peut écrire, en tenant compte de (3) et (9),

$$T dS = dU + p dv.$$

Avec cette relation, la différentielle de (10) donne

$$d\Phi = d(U - TS) + d(pv) = - S dT - p dv + d(pv),$$
$$d\Phi = - S dT + v dp;$$

par suite

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} = - S, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p} = v. \tag{13}$$

Remarquons encore que, pour un mélange ou une combinaison qui renferme des quantités m et m_1 de deux corps différents, le potentiel thermodynamique Φ', l'entropie S', la capacité calorifique C' et le volume V' du mélange peuvent être représentés par des expressions de la forme

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi' &= m\varphi + m_1 \varphi_1, \\ S' &= ms + m_1 s_1, \\ C' &= mc + m_1 c_1, \\ V' &= mv + m_1 v_1. \end{aligned} \right. \tag{14}$$

dans lesquelles les facteurs φ, s, c, v sont respectivement les dérivées partielles du premier membre correspondant par rapport à la variable m. En effet, quand on multiplie les poids m et m_1 par un facteur quelconque, toutes les grandeurs considérées relatives au mélange doivent être multipliées par le même facteur. On en déduit

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial T \partial m} = \frac{\partial \varphi}{\partial T}, \quad \frac{\partial^2 S'}{\partial T \partial m} = \frac{\partial s}{\partial T}, \quad \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial p \partial m} = \frac{\partial \varphi}{\partial p}.$$

Si l'on prend les dérivées par rapport à m des équations (12) et (13) appliquées au mélange, elles donnent aussi

$$c = \mathrm{T}\frac{\partial s}{\partial \mathrm{T}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{T}} = -s, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = v.$$

76. Conservation de l'électricité. — Lorsqu'un système de corps, soustrait à toute communication extérieure, est le siège de phénomènes électriques, la quantité totale d'électricité qu'il possède reste invariable (5). En d'autres termes, une quantité d'électricité peut être considérée comme indestructible par toute autre cause que par une quantité d'électricité égale et de signe contraire.

On doit à M. Lippmann (1) d'avoir montré que ce principe conduit à des conséquences analogues à celles du théorème de Carnot; associé avec la conservation de l'énergie, il donne l'explication d'un certain nombre de phénomènes connus et permet d'en prévoir d'autres non encore observés.

Dans un cycle de transformations fermé, la somme des quantités d'électricité que reçoit un corps le long du cycle doit être nulle; il en résulte que le gain élémentaire d'électricité dq est la différentielle exacte d'une fonction des variables indépendantes.

Pour une transformation de nature déterminée, le phénomène ne dépend que de deux variables indépendantes, le potentiel x et une variable y, qui définit les conditions mécaniques extérieures, telles que l'intensité d'une force, la pression extérieure, etc. On peut donc écrire

$$dq = \mathrm{C}dx + h\,dy; \tag{15}$$

le facteur C représente la capacité électrique du corps, pour un état déterminé, et h le coefficient de variation de charge à potentiel constant.

Le principe de la conservation de l'électricité se traduit par la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}. \tag{16}$$

(1) G. Lippmann, *Ann. de ch. et de phys.* [5]. t. V, p. 515; 1875.

D'autre part, en appelant u une fonction des variables x et y, qui définit les dimensions du corps, le travail extérieur produit $d\mathfrak{E}$ est de la forme $y\,du$, et l'on a

$$du = a\,dx + b\,dy, \tag{17}$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}. \tag{18}$$

L'accroissement d'énergie dû à la charge dq étant $x\,dq$, la variation totale de l'énergie potentielle du système est

$$dU = x\,dq - y\,du = (Cx - ay)\,dx + (hx - by)\,dy. \tag{19}$$

Pour un cycle fermé, le système revient à son état primitif, et l'énergie U reprend la même valeur; l'expression dU est donc aussi une différentielle exacte, ce qui donne

$$x\frac{\partial C}{\partial y} - a - y\frac{\partial a}{\partial y} = h + x\frac{\partial h}{\partial x} - y\frac{\partial b}{\partial x},$$

ou, en tenant compte de (16) et (17),

$$a = -h. \tag{20}$$

Si le coefficient h est positif, c'est-à-dire si la charge électrique, à potentiel constant, croît avec y, il résulte de l'équation (17) que, pour les mêmes conditions mécaniques ($dy = 0$), la fonction u diminue proportionnellement au potentiel.

En d'autres termes, on retrouve cette règle que l'électrisation tend à s'opposer au travail des forces extérieures.

Nous ferons, avec M. Lippmann, une série d'applications de ce principe. La suivante peut être traitée immédiatement et servira d'exemple.

77. Dilatation électrique du verre. — Une bouteille de Leyde se dilate lorsqu'elle est électrisée et se contracte dès qu'on la décharge. Ce phénomène curieux, entrevu par Volta, a été mis en évidence par Govi [1], et M. Duter [2] a montré que la dilatation du verre est proportionnelle au carré de la différence de potentiel des armatures.

Considérons l'expérience sous la forme que lui a donnée

[1] Govi, *C. R. de l'Acad. des sc.*, t. LXXXVII, p. 857; 1878.
[2] Duter, *Ibid.*, p. 828, 960 et 1036.

M. Righi [1] : un condensateur cylindrique formé par un tube de verre de longueur u, couvert d'étain sur ses deux faces et tendu dans le sens de la longueur par un poids. La différence de potentiel des armatures étant x et le poids tenseur y, l'accroissement de charge est donné par l'équation (15).

D'autre part, si la longueur u est considérée comme une fonction de x et y, le coefficient a, qui est positif, définit l'allongement électrique et b l'allongement mécanique.

Enfin, le travail extérieur produit par le corps est $-y\,du$, c'est-à-dire que l'on doit changer les signes de a et b dans l'équation (19); l'équation (20) donne alors

$$a = h.$$

Il résulte ainsi de l'équation (15) qu'à différence de potentiel constante, la charge électrique augmente avec le poids tenseur; à charge constante, la différence de potentiel diminue quand le poids tenseur augmente, c'est-à-dire quand on allonge le tube.

Comme l'allongement est proportionnel au carré de la différence de potentiel, d'après l'expérience, on peut le représenter par kx^2, ce qui donne

$$a = \frac{\partial u}{\partial x} = 2kx = h,$$

et, par suite, d'après l'équation (16),

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 2k, \qquad C = C_0 + 2ky.$$

La capacité électrique du condensateur croît donc proportionnellement au poids tenseur. La tension diminue l'épaisseur du verre, et l'attraction électrique des armatures produirait un effet analogue, mais il ne semble pas que les deux phénomènes soient de même ordre.

[1] RIGHI, *Sulla dilatazione...*; Bologna, 1879. — *Journal de phys.*, t. IX, p. 203; 1880.

CHAPITRE CINQUIÈME

DES DIÉLECTRIQUES

78. Rôle du milieu diélectrique. — Jusqu'ici nous avons raisonné dans l'hypothèse que les actions s'exercent à distance entre les masses électriques, et considéré le diélectrique comme un milieu inerte à travers lequel agissent les forces, mais dénué par lui-même de toute propriété active.

D'un autre côté, il paraît aujourd'hui bien démontré que la chaleur est un mouvement vibratoire dont la propagation s'effectue par l'intermédiaire d'un milieu élastique; or nous avons vu que le problème de l'équilibre électrique et celui de la propagation de la chaleur dans l'état permanent sont définis par les mêmes propriétés mathématiques.

N'est-il pas permis de supposer que dans les deux cas l'analogie est plus intime; qu'elle se poursuit jusque dans le mécanisme des actions élémentaires, et qu'il n'y a d'autre différence dans les deux ordres de phénomènes que celles que nous introduisons nous-mêmes dans l'interprétation physique des lois? S'il en est ainsi, la production des forces électriques doit pouvoir s'expliquer par la seule action du milieu.

Telle est l'idée que Faraday a cherché à mettre en lumière et qui l'a guidé constamment dans ses travaux. Il n'y a pas lieu de chercher ici à démontrer ou infirmer l'exactitude de l'un ou de l'autre de ces points de vue, mais seulement d'établir leur équivalence pour l'explication des phénomènes.

Maxwell a montré, en effet, que les vues de Faraday ont une signification mathématique profonde, qu'elles conduisent aux mêmes lois générales que la notion des fluides et qu'elles ouvrent de nouveaux horizons pour la conception des phénomènes physiques.

79. Expression de la force par les pressions. — Nous avons déjà considéré comme évident (35) que *l'action qui s'exerce sur un conducteur est la résultante des pressions électriques sur toute sa surface*; ce théorème peut être envisagé d'un autre point de vue.

La pression $p = 2\pi\sigma^2$, par unité de surface, en un point d'un conducteur où la densité est σ, est toujours dirigée vers l'extérieur, quel que soit le signe de l'électricité.

Pour chaque élément de la surface, la pression pdS est la résultante des actions exercées, sur la masse σdS de cet élément, par toutes les masses extérieures au conducteur et par celles qui la recouvrent. Pour la surface entière, l'ensemble des pressions équivaut à toutes les actions exercées sur le conducteur, tant par les masses extérieures que par son électricité propre. Mais les actions qu'exercent les unes sur les autres les diverses masses électriques du conducteur ont une résultante nulle puisque, l'équilibre existant, ces masses peuvent être considérées comme fixées sur le conducteur, auquel cas leurs actions élémentaires s'annulent deux à deux; l'ensemble des pressions équivaut donc aux seules actions des masses extérieures.

I. — *Quand un système électrique est entouré par une surface de niveau, l'action qu'il subit équivaut à l'ensemble des pressions qui s'exerceraient sur une couche égale à la charge totale du système, en équilibre sur cette surface.*

Supposons qu'une surface de niveau S_1 partage toutes les masses agissantes en deux systèmes, l'un intérieur Q_1, l'autre extérieur Q_2. Nous avons vu (40, X) que, pour tous les points extérieurs à S_1, on peut remplacer les masses intérieures par une couche de même masse totale Q_1, en équilibre sur la surface. Inversement, le système extérieur Q_2 agira sur cette couche Q_1, fixée sur la surface S_1, comme il agirait sur les masses intérieures, supposées liées entre elles de manière à former un système rigide.

Or, en vertu de la remarque précédente, l'action des masses extérieures sur la couche S_1 et, par suite, sur le système Q_1 des masses intérieures, équivaut à l'ensemble des pressions électrostatiques de cette couche.

Comme l'action totale du système Q_1 sur tous les corps

extérieurs est égale et de signe contraire à l'action que subit ce système, on voit aussi que l'action du système Q_1 sur les corps extérieurs équivaut à l'ensemble des pressions élémentaires sur la surface S_1, chacune d'elles étant comptée vers l'intérieur.

II. — *L'action réciproque de deux systèmes* Q_1 *et* Q_2, *est égale à l'action de deux couches* $+Q_1$ *et* $-Q_1$ *distribuées sur deux surfaces de niveau* S_1 *et* S_2 *qui comprennent* Q_1 *et laissent en dehors* Q_2.

Considérant, en effet, deux surfaces de niveau S_1 et S_2 (fig. 16) aux potentiels V_1 et V_2, qui remplissent ces condi-

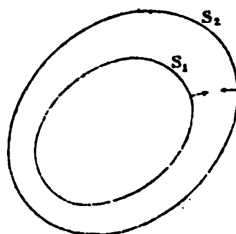


Fig. 16.

tions, disposons sur la surface S_1 une couche $+Q_1$ en équilibre, et une couche $-Q_1$ en équilibre sur S_2; la couche S_1 peut remplacer le système intérieur $+Q_1$ pour tous les points extérieurs à S_1 et la couche S_2 équivaut au système extérieur Q_2 pour tous les points compris dans la surface S_2.

L'ensemble de ces deux couches donne d'ailleurs un potentiel constant $V_1 - V_2$ à l'intérieur de S_1 et un potentiel nul à l'extérieur de S_2; enfin un potentiel variable de $V_1 - V_2$ à zéro dans l'espace intermédiaire. Le champ électrique est donc nul partout, sauf dans cet espace, où il conserve la même valeur en chaque point, que l'on considère les deux systèmes primitifs Q_1 et Q_2, ou les couches équivalentes distribuées sur les surfaces S_1 et S_2.

L'action de la surface électrisée S_1 sur la couche S_2 est ainsi la même que sur le système Q_2; celle de S_2 la même sur S_1 que sur Q_1; l'action réciproque de ces surfaces est donc la même que celle des systèmes primitifs Q_1 et Q_2.

Mais nous savons, par les théorèmes précédents, que les actions éprouvées par les surfaces S_1 et S_2 équivalent à l'ensemble des pressions électriques $p_1 dS_1$ et $p_2 dS_2$ qui s'exercent sur les éléments de ces surfaces. En désignant par F_1 et F_2 les valeurs du champ électrique dans le milieu intermédiaire, au voisinage des éléments considérés, ces pressions sont (**35**),

$$p_1 dS_1 = \frac{1}{8\pi} F_1^2 dS_1,$$

$$p_2 dS_2 = \frac{1}{8\pi} F_2^2 dS_2.$$

Les premières sont dirigées vers l'extérieur de la surface S_1, les secondes vers l'intérieur de la surface S_2; les deux systèmes de forces normales $p_1 dS_1$ et $p_2 dS_2$ sont équivalents et de signes contraires, comme étant l'action et la réaction.

80. Elasticité du diélectrique. — L'action réelle qui s'exerce entre les deux surfaces électriques S_1 et S_2 peut être considérée comme provenant des actions élémentaires qui s'exercent directement et à distance entre les différentes masses électriques qui les recouvrent, prises deux à deux. C'est l'hypothèse qui a servi de base à tous nos calculs jusqu'à présent. Mais il est permis d'admettre aussi que cette action se transmet par l'intermédiaire du milieu ambiant en vertu

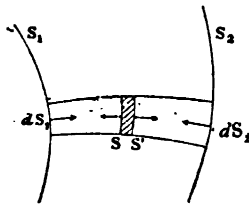


Fig. 17.

d'une élasticité spéciale, comme le croyait Faraday, élasticité qui se traduirait par une tension des lignes de force et une répulsion latérale. On peut essayer d'abord de rendre compte des phénomènes dans cet ordre d'idées.

Considérons, pour cela, un canal orthogonal entre les deux surfaces S_1 et S_2. Le flux de force émané de dS_1 (fig. 17) va

s'absorber dans l'élément correspondant dS_2; ces éléments dS_1 et dS_2 se trouvent dans le même état que s'ils étaient reliés par des cordons élastiques parallèles aux lignes de force et tirant les deux éléments l'un vers l'autre avec une force égale à p_1 par unité de surface sur dS_1 et à p_2 sur dS_2.

Prenons dans le canal un élément de volume terminé par deux surfaces de niveau infiniment voisines S et S', distantes de dn, et supposons-le solidifié. Cet élément de volume doit être considéré comme soumis à deux tensions tirant extérieurement sur ses bases et dont la résultante est

$$dR = p'dS' - p\,dS = \frac{1}{8\pi}(F'^2 dS' - F^2 dS).$$

Les propriétés des tubes de force donnent d'abord

$$F\,dS = F'dS',$$
$$F'^2 dS' - F^2 dS = (F' - F)\,F\,dS.$$

D'autre part, les deux surfaces S et S' étant à la distance infiniment petite dn, on peut écrire

$$F' - F = \frac{dF}{dn}\,dn;$$

il en résulte

$$dR = \frac{F\,dS}{8\pi}\,\frac{dF}{dn}\,dn = \frac{1}{2}\,dS\,dn\,\frac{d}{dn}\left(\frac{F^2}{8\pi}\right) = dS\,dn\,\frac{1}{2}\,\frac{dp}{dn}.$$

En appelant R la résultante relative à l'unité de volume du diélectrique en un point, on a

$$R = \frac{1}{2}\,\frac{dp}{dn}.$$

Le système mécanique est donc le même que si les actions s'exerçaient sur le diélectrique et que la force par unité de volume fût déterminée par un potentiel égal en chaque point à $-\frac{p}{2}$; l'élément de volume tend à être entraîné dans la direction vers laquelle la fonction p va en augmentant.

Mais dans ces conditions l'élément de volume ne peut être en équilibre; il est donc nécessaire de faire intervenir d'autres forces. Pour les déterminer, il est utile de considérer le problème d'hydrostatique correspondant.

Lorsque, dans un liquide en équilibre, la pression en chaque point est représentée par une fonction p_1 des coordonnées, la résultante des pressions sur une surface fermée est égale à la résultante d'un système de forces ayant un potentiel p_1 et agissant sur le volume tout entier limité par cette surface.

Il suffit, pour s'en assurer, de remarquer que sur un élément de volume dv, limité par deux surfaces d'égale pression et par des surfaces orthogonales, formant un cylindre infiniment petit de base dS et de hauteur dn, la résultante des pressions est

$$dR_1 = -dS\frac{dp_1}{dn}\,dn = -dv\,\frac{dp_1}{dn},$$

expression dans laquelle $\frac{dp_1}{dn}$ est la dérivée de la pression par rapport à la normale à la surface de niveau. Cette force, ou *poussée*, agit normalement à la surface de niveau et dans le sens vers lequel les pressions diminuent. Elle est d'ailleurs, en vertu de l'équilibre, égale et directement opposée à la résultante de toutes les forces extérieures sur le même volume, par exemple au poids du liquide qu'il renferme, s'il s'agit d'un liquide soumis à la seule action de la pesanteur.

Dans le problème d'électricité, la résultante des forces qui s'exercent sur un élément de volume $dS\,dn$, en vertu des tensions que nous avons considérées le long des lignes de force, est égale à $dS\,dn\,\frac{1}{2}\frac{dp}{dn}$ et dirigée dans le sens vers lequel la force ou la fonction p augmente.

Pour établir l'équilibre, nous admettrons, en outre, qu'il existe en chaque point dans le diélectrique une sorte de pression hydrostatique p_1. La surface entière de l'élément de volume étant soumise à cette pression, dont la résultante est dR_1, la condition d'équilibre est

$$\frac{1}{2}\frac{dp}{dn} - \frac{dp_1}{dn} = 0, \quad \text{ou} \quad p = 2p_1.$$

L'action réelle qui s'exerce sur l'élément du volume $dS\,dn$ comprend donc une *pression* latérale $p_1 = \frac{1}{2}p$ et une *tension* sur les bases dS égale à $p - p_1$, c'est-à-dire encore $\frac{p}{2}$.

Il resterait à faire un pas important, celui de concevoir la structure mécanique du milieu capable de donner lieu à de telles réactions.

81. Tension et répulsion des lignes de force. — Si l'on considère une couche terminée par deux surfaces de niveau électrisées sur lesquelles on imagine les masses électriques capables de remplacer l'action des corps extérieurs à la couche, les deux surfaces s'attireront avec une force égale à la résultante générale des tensions. En divisant cette couche en deux par une surface orthogonale, il s'exercera entre les deux fragments une *répulsion* égale à la résultante des pressions latérales.

Il est facile d'étendre ces considérations au cas où la seconde surface de niveau n'envelopperait pas la première.

On peut donc imaginer que *les corps conducteurs sont reliés l'un à l'autre par des fils élastiques tendus suivant les lignes de force et qui se repoussent entre eux.*

Il est à remarquer cependant que la tension d'un de ces fils n'est pas constante dans toute sa longueur, puisqu'elle est en chaque point proportionnelle au carré du champ.

Cette représentation matérielle des phénomènes peut être un guide utile dans un grand nombre d'applications.

Les propriétés qui précèdent sont la traduction mathématique de l'idée suivant laquelle Faraday se représentait l'état des diélectriques et qu'il résumait lui-même dans les deux paragraphes suivants de ses *Expérimental Researches*, série XI, § 1297-1298 :

« L'action inductive qu'on peut concevoir comme s'exerçant dans la direction même des lignes de force qui relient les surfaces terminales de deux conducteurs électrisés, serait accompagnée d'une action latérale ou transverse à ces mêmes lignes et qui correspondrait à la dilatation ou la répulsion à laquelle elles semblent obéir. Autrement dit, la force attractive qui s'exerce entre les particules du diélectrique dans la direction

même de l'induction est accompagnée d'une force répulsive agissant dans une direction transverse.

« L'induction semble consister en un certain état de polarisation des particules déterminé par l'action du corps électrisé, état dans lequel les particules seraient positives d'un côté, négatives de l'autre, et seraient disposées régulièrement les unes par rapport aux autres, et en relation avec la surface ou les particules mêmes du corps inducteur. Cet état est un état de contrainte, qui est établi et se maintient seulement par l'action d'une force, et qui se détend et fait place à l'état naturel sitôt que la force cesse d'agir. Il n'y a d'ailleurs que dans les corps isolants que cet état peut se maintenir sous l'action d'une quantité fixe d'électricité, attendu que ce sont les seuls où les particules peuvent rester polarisées. »

82. Energie du milieu. — Dans cet ordre d'idées, toute l'énergie du système électrique doit résider, non pas à la surface des conducteurs, mais dans le milieu diélectrique, et il est facile d'en calculer la valeur en chaque point.

L'énergie totale d'un système (66) peut s'écrire, en tenant compte de l'équation de Poisson,

$$W = \frac{1}{2}\int V\rho\, dv = -\frac{1}{8\pi}\int V\Delta V\, dv.$$

Jusqu'ici l'énergie est évaluée en fonction des masses électriques elles-mêmes. Pour en modifier la signification, il suffira d'appliquer la formule de Green (28)

$$\int V\Delta V\, dv = \int V\frac{\partial V}{\partial n}\, dS - \int F^2 dv$$

au volume limité par une sphère de très grand rayon r comprenant le système électrisé que l'on envisage. Le premier terme du second membre doit être étendu à la surface de cette sphère. Le potentiel V, à mesure qu'on s'éloigne, tend à devenir en raison inverse de r; le facteur $\frac{\partial V}{\partial n}$ représente, au signe près, la composante normale du champ et devient en raison inverse de r^2. Comme la surface elle-même est propor-

tionnelle à r^2, cette intégrale est en raison inverse de la distance r et tend vers zéro.

Le second membre de la formule de Green se réduit alors au deuxième terme; il en résulte

$$W = \frac{1}{8\pi} \int F^2 dv.$$

Si l'on considère l'énergie du système comme localisée dans chaque élément de volume du milieu, la quantité d'énergie w par unité de volume est alors

$$w = \frac{1}{8\pi} F^2 = p.$$

Donc *l'énergie d'un système électrique par unité de volume est égale en chaque point à la pression électrostatique.*

83. Pouvoir inducteur spécifique. — Si le diélectrique joue ainsi le rôle essentiel dans les phénomènes, on doit s'attendre à ce que tous les milieux ne se comportent pas exactement de la même manière.

On sait, en effet, depuis Franklin, combien le choix du verre a d'importance pour la construction des batteries. Cavendish avait fait beaucoup d'expériences pour déterminer directement le rôle comparatif des différents corps employés comme isolants dans les condensateurs, mais ces expériences étaient encore inédites et ignorées lorsque Faraday publia ses importants travaux.

Faraday a constaté que, si l'on fait communiquer les armatures de deux bouteilles de Leyde sphériques de mêmes dimensions, dans l'une desquelles la couche d'air isolante a été remplacée par un diélectrique solide, comme du soufre fondu ou de la résine, une quantité déterminée d'électricité portée sur ce système de conducteurs ne se partage pas en parties égales entre les deux bouteilles. Celle dont le diélectrique est solide prend une charge plus grande.

Le phénomène est général et obéit à une loi très simple. La charge que prend un condensateur fermé, à diélectrique solide ou liquide, est dans un rapport constant avec la charge

qu'il prendrait, pour la même différence de potentiel, si le diélectrique était remplacé par une couche d'air.

Le rapport ainsi déterminé est ce que Faraday appelle *le pouvoir inducteur spécifique* du diélectrique. C'est, comme on voit, le nombre par lequel il faut multiplier la capacité d'un condensateur à air pour avoir celle du même condensateur dans lequel la lame d'air aura été remplacée par le diélectrique en question.

84. Absorption électrique. — La détermination de cette constante présente, pour la plupart des corps, de grandes difficultés, par suite de l'intervention d'un phénomène auquel Faraday a donné le nom d'*absorption électrique*, et qui a la même cause que la charge résiduelle des condensateurs. La capacité d'un condensateur, dans lequel le diélectrique est un corps solide, se présente comme une fonction du temps; elle est croissante et paraît tendre vers une limite à mesure que la durée de la charge augmente. Inversement, quand on décharge le condensateur, l'électricité disponible qui disparaît dans la décharge est quelquefois loin d'atteindre la totalité de celle qu'il possède; on sait, d'ailleurs, qu'on peut à des intervalles successifs obtenir un nombre plus ou moins grand de décharges d'intensités décroissantes.

Il paraît difficile, dans l'état actuel de la science, de rendre un compte exact de cette propriété. Tout semble indiquer qu'elle est due à un changement progressif dans la structure du diélectrique, déformation qui devient permanente, comme dans un corps imparfaitement élastique, et à la suite de laquelle le corps ne revient pas immédiatement à son état primitif quand la cause a cessé d'agir.

Ce qui confirme cette manière de voir, c'est que toutes les circonstances qui, dans les cas d'une déformation mécanique, facilitent le retour d'un corps à l'état normal, comme les chocs, les variations rapides de température, etc., paraissent accélérer également la disparition de la charge résiduelle et le retour à l'état neutre.

85. Polarisation du diélectrique. — Le rôle des isolants dans les condensateurs conduit à penser que la structure du milieu diélectrique intervient pour une part importante dans le mécanisme des phénomènes.

Poisson explique le magnétisme à l'aide d'une hypothèse qui a été transportée aux phénomènes électriques par Mossotti et adoptée ensuite par Faraday. Cette hypothèse consiste à admettre que le milieu magnétique ou diélectrique est formé de particules, sphériques par exemple, absolument conductrices, disséminées dans un milieu non conducteur.

« Qu'on se figure tout l'espace qui environne une sphère comme constitué par un diélectrique tel que l'essence de térébenthine ou l'air, parsemé de conducteurs sphériques, comme des balles de fusil, tous isolés les uns des autres, et l'on aura, tant au point de vue de la constitution que des propriétés, l'image exacte de ce que je considère comme étant la constitution et les propriétés du diélectrique lui-même. Si on charge la sphère, tous ces petits conducteurs prendront deux pôles; si on la décharge, ils retourneront à l'état naturel pour se polariser de nouveau toutes les fois qu'on viendra à la recharger. » (Faraday, *Experimental Researches*, série XIV, § 1679.)

Sans faire aucune hypothèse sur la constitution du milieu, Lord Kelvin (¹) considère comme un fait expérimental que chaque élément de volume est transformé par l'induction en un petit aimant dans le cas du magnétisme et, pour l'électricité, en une sorte d'aimant électrique dont l'action extérieure équivaut à celle de deux masses égales et de signes contraires infiniment voisines. On retrouve ainsi toutes les conséquences mathématiques de l'hypothèse de Poisson.

Un diélectrique placé dans un champ se polarise et la somme algébrique des masses qui constituent la charge est nulle. Nous savons d'ailleurs (**40**, VIII) que, quel que soit l'état d'un corps électrisé, l'action qu'il exerce sur un point extérieur est égale à celle d'une couche de même masse totale distribuée sur la surface suivant une certaine loi; dans le cas actuel, la couche équivalente est donc formée de deux nappes ayant des masses égales et de signes contraires.

86. Potentiel d'un élément de volume. — On admettra donc qu'un élément de volume quelconque dv du diélectrique, détaché des parties voisines sans que son état soit modifié, ne renferme aucun excès de l'une ou l'autre des deux électricités; la

(¹) Sir W. Thomson, *Reprint of papers*, p. 340 (1849).

charge totale étant nulle, l'action extérieure de cet élément se réduit à celle de deux masses égales et de signes contraires $+q$ et $-q$ (fig. 18) dont les centres de gravité sont à une distance infiniment petite h. Le produit $qh = dm$ représente le *moment électrique* de cet élément de volume ; c'est un vecteur dirigé suivant la droite h des centres, ou l'axe électrique, de

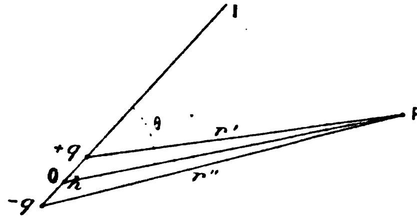


Fig. 18.

$-q$ à $+q$. Soit O le milieu de la distance h et OI la direction du moment électrique.

En un point P dont les distances aux masses $+q$ et $-q$ sont respectivement r' et r'', le potentiel δV de cet élément de volume est

$$\delta V = \frac{q}{r'} - \frac{q}{r''} = q\,\frac{r'' - r'}{r'r''}.$$

Si θ est l'angle des droites OP et OI, on peut évidemment remplacer la différence $r'' - r'$ par $h\cos\theta$ et le produit $r'r''$ par le carré de la distance $OP = r$, ce qui donne

$$\delta V = \frac{qh\cos\theta}{r^2} = \frac{dm}{r^2}\cdot\cos\theta.$$

Appelant a, b, c les cosinus directeurs de la droite OI par rapport à trois axes rectangulaires et α, β, γ ceux de la droite OP, on a

$$\cos\theta = a\alpha + b\beta + c\gamma,$$

$$\delta V = (a\alpha + b\beta + c\gamma)\frac{dm}{r^2} = \alpha\,\frac{a\,dm}{r^2} + \beta\,\frac{b\,dm}{r^2} + \gamma\,\frac{c\,dm}{r^2}.$$

Le potentiel de l'élément de volume est donc la somme des potentiels dus aux trois projections adm, bdm et cdm du moment électrique.

On peut encore traduire cette propriété d'une autre manière. Imaginons que l'on mène par le point O une surface perpendiculaire à OI, dont l'aire soit numériquement égale à dm. L'angle $d\omega$ sous lequel cette surface sera vue du point P est égal à $\frac{dm}{r^2}\cos\theta$, ce qui donne

$$\delta V = d\omega.$$

Le potentiel d'un élément de volume en un point est donc l'angle sous lequel on verrait une surface égale à son moment et normale à l'axe électrique.

87. **Définition et propriétés de la polarisation.** — Nous appellerons *intensité d'électrisation* I, ou simplement *polarisation* du diélectrique en un point, le rapport du moment électrique dm d'un élément de volume dv au volume lui-même :

$$I = \frac{dm}{dv}.$$

Cette polarisation est une grandeur géométrique, dirigée suivant l'axe électrique.

Si l'on désigne par A, B, C les composantes rectangulaires Ia, Ib et Ic de la polarisation, le potentiel δV au point P d'un élément de volume situé en O peut s'écrire :

$$\delta V = \frac{I\cos\theta}{r^2}dv = \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{r^2}dv = \alpha\frac{A dv}{r^2} + \beta\frac{B dv}{r^2} + \gamma\frac{C dv}{r^2}.$$

Appelant x, y, z les coordonnées du point O et ξ, η, ζ celles du point P, on a

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2,$$

$$\alpha = \frac{\xi - x}{r} = -\frac{\partial r}{\partial x} = r^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Remplaçant ainsi les autres cosinus directeurs β et γ par des expressions analogues, on peut écrire

$$\delta V = \left[A \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + B \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + C \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \right] dv.$$

Le potentiel total d'un système de diélectriques en un point quelconque est l'intégrale de cette expression étendue au volume entier du système.

Si l'on remplace l'élément dv par $dx\,dy\,dz$, chacun des termes de l'intégrale peut être intégré par parties :

$$\iiint A \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) dx\,dy\,dz = \iint \frac{A}{r}\, dy\,dz - \iiint \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial x}\, dx\,dy\,dz.$$

Répétant la même transformation sur les autres termes, on obtient l'expression générale

$$V = \iint \frac{A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy}{r} - \iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

La première intégrale doit être étendue à la surface des diélectriques et la seconde à l'espace qu'ils occupent.

On voit aisément que le numérateur du premier terme représente le flux de polarisation qui traverse l'élément de surface dS. Si θ est l'angle de la polarisation I avec la normale à l'élément considéré, on a

$$I\,dS\cos\theta = A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy$$

et, par suite,

$$(1) \qquad V = \int \frac{I\cos\theta}{r}\, dS - \int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dv.$$

Dans la notion des fluides, si la densité est ρ sur un élément de volume du diélectrique et σ sur la surface, le potentiel en un point est

$$V = \int \frac{\sigma\,dS}{r} + \int \frac{\rho}{r}\, dx\,dy\,dz.$$

On peut donc poser

$$(2) \qquad \sigma = I\cos\theta,$$

$$(3) \qquad \rho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right).$$

La densité superficielle σ est la projection sur la normale de la polarisation au même point.

La densité cubique ρ est égale et de signe contraire à la somme des dérivées partielles des composantes de la polarisation par rapport aux axes correspondants.

Les deux équations importantes (2) et (3) peuvent d'ailleurs être établies directement sans recourir à la transformation des intégrales.

Supposons d'abord que dans un milieu diélectrique la polarisation soit *uniforme*, c'est-à-dire constante en grandeur et en direction. Dans une baguette cylindrique de section a parallèle à la polarisation, le moment électrique d'un élément de longueur dl est $I\,a\,dl$; cet élément équivaut à deux masses égales et de signes contraires $q = Ia$ situées sur les faces terminales, c'est-à-dire à deux couches extrêmes dont la densité serait uniforme et égale à $\pm I$. Quand on coupe la baguette par une section droite, il se produit donc sur les faces en regard des couches égales et contraires, de densité $\pm I$. Si la polarisation n'est pas constante, la densité des couches ainsi formées varie d'un point à l'autre.

Considérons maintenant, dans un diélectrique, l'effet de la composante A de la polarisation. Sur une baguette parallèle à l'axe des x et de section rectangulaire $dy\,dz$, la section faite à la distance x donne des charges $q = A\,dy\,dz$; à la distance $x+dx$, les charges sont $q' = \left(A + \frac{\partial A}{\partial x}dx\right)dy\,dz$. L'élément $dx\,dy\,dz$ a ainsi sur ses faces extrêmes des charges $-q$ et $+q'$. Comme la charge totale doit être nulle, il existe dans l'intérieur de ce volume une quantité d'électricité

$$+q - q' = -\frac{\partial A}{\partial x}dx\,dy\,dz.$$

Répétant le même raisonnement pour les autres composantes, on voit que la charge par unité de volume est

$$\rho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right).$$

D'autre part, si la baguette considérée découpe sur la surface un élément dS et que A soit la valeur en ce point de la composante de la polarisation, elle y apporte une quantité d'électricité $A\,dy\,dz$. Les autres composantes produiront, de même, sur cet élément de surface des charges $B\,dz\,dx$ et $C\,dx\,dy$; la charge totale est donc $I\,dS\cos\theta$ et la densité superficielle $\sigma = I\cos\theta$.

Partant d'un autre point de vue, on peut aussi considérer la polarisation I comme une fonction des coordonnées et les quantités σ et ρ, définies par les équations (2) et (3), comme des grandeurs purement mathématiques; on leur conservera le nom de densités, sans attacher à cette expression sa signification littérale.

Lorsque la polarisation est uniforme, la densité ρ est nulle partout et l'électricité existe seulement sur les surfaces.

88. Action dans une cavité. — Si l'on imagine qu'une petite cavité soit creusée dans un diélectrique sans troubler sa polarisation, la création de cette cavité a pour effet de produire à sa surface une couche superficielle dont la densité en chaque point est égale à la projection normale de la polarisation.

Dans l'intérieur de la cavité, le potentiel et le champ électrique dus à l'ensemble du système ne sont pas modifiés, puisque l'action des parties voisines tend vers zéro (**16**), mais on doit tenir compte des couches nouvelles distribuées à la surface, dont le champ intérieur dépend de la forme de la cavité et de son orientation.

On peut admettre que la polarisation est constante en grandeur et en direction dans toute l'étendue de l'élément de volume qui a été supprimé.

Supposons d'abord que la cavité soit un cylindre à bases circulaires de rayon a dont la hauteur $2h$ est parallèle à la polarisation. La densité de la couche superficielle est nulle sur la face latérale et $\sigma = \pm I$ sur les deux bases; leur action au centre

du cylindre est le double de l'action f d'un disque circulaire homogène de rayon a sur un point de l'axe à la distance h.

Si l'on considère sur la base positive un élément de surface dS situé à l'extrémité du rayon u, sa distance r au centre du cylindre est

$$r^2 = h^2 + u^2,$$

et la composante parallèle à l'axe de l'action exercée en ce point est

$$df = \frac{I\,dS}{r^2} \cdot \frac{h}{r}.$$

Prenant pour l'élément dS la couronne $2\pi u\,du$, on a

$$df = 2\pi I h \frac{u\,du}{r^3} = 2\pi I h \frac{dr}{r^2} = -2\pi I h\, d\left(\frac{1}{r}\right).$$

Le champ intérieur F_i des deux couches, qui est parallèle à la polarisation, est donc

$$F_i = 2f = 4\pi I \left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}\right).$$

Deux cas sont particulièrement utiles à considérer.

Si le cylindre est très allongé, la hauteur h étant très grande par rapport au rayon a de la base, la valeur de f tend vers zéro; le champ réel dans la cavité dépend uniquement des masses extérieures. Il en sera de même pour une petite cavité cylindrique de section quelconque et pour une fente étroite formée par deux surfaces parallèles aux lignes de polarisation.

Si le cylindre a la forme d'un disque plat d'épaisseur infiniment petite par rapport à son diamètre, on a simplement $F_i = 4\pi I$ et les composantes parallèles aux axes sont respectivement $4\pi A$, $4\pi B$ et $4\pi C$. Ces valeurs conviennent également au cas d'une fente étroite limitée par deux surfaces orthogonales aux lignes de polarisation.

Enfin, pour une fente étroite dont la normale fait l'angle θ avec la direction de polarisation, le champ intérieur est normal à la fente et égale à $4\pi I \cos\theta$.

89. Induction électrostatique. — Dans le cas d'une fente

orthogonale aux lignes de polarisation, la valeur totale F_1 du champ intérieur prend le nom d'*induction électrostatique*; c'est la résultante du champ primitif F et du champ F_i produit par les couches superficielles de la cavité. Les composantes X_1, Y_1, et Z_1 de ce champ sont donc

$$(4)\qquad \begin{cases} X_1 = X + 4\pi A, \\ Y_1 = Y + 4\pi B, \\ Z_1 = Z + 4\pi C. \end{cases}$$

Le champ F étant défini par le potentiel primitif V, on a toujours

$$(5)\qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\rho.$$

On déduit alors des équations (4), en tenant compte des équations (3) et (5),

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} + \frac{\partial Z_1}{\partial z} = 4\pi\rho - 4\pi\rho = 0.$$

L'induction électrostatique F_1 satisfait donc à la condition de continuité.

Si l'on considère des lignes et des tubes d'induction, comme pour les lignes de force, il en résulte que le *flux d'induction* est constant dans un tube d'induction, même quand on traverse la surface de séparation de diélectriques différents.

90. Polarisation proportionnelle au champ. — La polarisation du diélectrique, étant due à l'action des corps électrisés, doit être parallèle au champ, par raison de symétrie, au moins tant que le milieu est isotrope. Admettons, en outre, qu'elle soit proportionnelle au champ et qu'on ait $I = kF$, k étant ce qu'on peut appeler le *coefficient de polarisation;* il en résulte

$$(6)\qquad A = kX, \qquad B = kY, \qquad C = kZ,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = k\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

On a donc, par les équations (3) et (5),

$$-\rho = k4\pi\rho, \quad \rho(1+4\pi k) = 0, \quad \rho = 0.$$

Dans ce cas, la densité électrique par unité de volume est nulle en tous les points; il n'y a d'électricité sensible que sur les surfaces qui séparent des milieux différents.

L'induction devient alors

$$(7) \qquad F_1 = F + 4\pi I = (1+4\pi k)F = KF.$$

Quand on ne change pas de milieu, les flux d'induction sont proportionnels aux flux de force et obéissent à la même loi de conservation.

Dans les gaz, le coefficient k est sensiblement nul et l'induction se confond avec le champ.

Le coefficient $K = 1 + 4\pi k$ représente le *pouvoir inducteur spécifique* du diélectrique.

Considérons, en effet, un condensateur dont les armatures sont séparées par un diélectrique. Pour simplifier le raisonnement, on supposera qu'une couche d'air infiniment mince détache le diélectrique des armatures. La densité électrique sur l'élément dS de l'armature intérieure étant σ, la force électrique, aussi bien que l'induction, dans la couche d'air voisine est $F = 4\pi\sigma$; le flux d'induction relatif à cet élément dS est $F dS$. Si F' est le champ dans le diélectrique, l'induction est KF', le flux d'induction relatif au même élément est $KF' dS$ et l'on a

$$F = KF'.$$

Le champ F' est le même que si le diélectrique était remplacé par un gaz, ou mieux par le vide, à la condition de substituer à la densité σ une densité *apparente* σ', telle que $\sigma = K\sigma'$, et l'on aurait $F' = 4\pi\sigma'$.

Or, la force F' est définie par les potentiels des armatures et la distance qui les sépare. Pour la même différence de potentiel, les charges Q et Q' du condensateur, suivant que l'intervalle est occupé par un diélectrique ou entièrement

vide, sont dans le rapport des densités correspondantes σ et σ', ce qui donne

$$Q = KQ'.$$

Inversement, si la charge reste constante dans les deux cas, la différence de potentiel doit être divisée par K, quand on introduit un diélectrique.

La polarisation du diélectrique au voisinage de l'élément dS étant

$$I = kF' = 4\pi k\sigma' = (K - 1)\sigma',$$

la surface du diélectrique possède une couche électrique dont la densité est $-I$; la densité apparente σ' est la somme algébrique $\sigma - I$, c'est-à-dire

$$\sigma' = \sigma - (K - 1)\sigma' = \frac{\sigma}{K}.$$

On peut dire que le flux de force $F dS = 4\pi\sigma dS = 4\pi K\sigma' dS$ émis par l'élément dS de l'armature se partage en deux parties, dont l'une $4\pi(K - 1)\sigma' dS$ est absorbée à la surface du diélectrique, de sorte que la fraction de flux perdue est

$$\frac{K - 1}{K} = 1 - \frac{1}{K} = \frac{4\pi k}{1 + 4\pi k}.$$

91. Variation des potentiels due à l'introduction d'un diélectrique. — Si l'on introduit (70) un corps conducteur dans un champ électrique produit par des conducteurs isolés et électrisés, la présence de ce corps nouveau a pour effet de diminuer la différence des potentiels primitifs. L'introduction d'un diélectrique solide ou liquide donne à un degré moindre le même résultat.

Considérons, comme exemple, un cas particulier, celui d'un conducteur A (fig. 19), chargé d'une quantité Q_1 d'électricité, et situé à l'intérieur d'un conducteur fermé B, leurs potentiels respectifs étant V_1 et V_2.

L'équilibre étant établi, fixons les masses électriques sur A et B et introduisons dans l'intervalle une couche diélec-

trique C, de pouvoir inducteur K, dont les surfaces interne et externe S et S′ soient des surfaces de niveau du système primitif, où les potentiels étaient respectivement V et V′. Il est facile de voir que l'équilibre n'est pas troublé quand on met sur les surfaces S et S′ des charges électriques $-Q$ et $+Q$ distribuées comme elles le seraient si, ce milieu étant conducteur, la charge primitive de A eût été $+Q$.

En effet, les charges $+Q$ et $-Q$ sur C donnent un potentiel nul à l'extérieur de la couche et constant dans la cavité intérieure; les conducteurs A et B restent donc en équilibre.

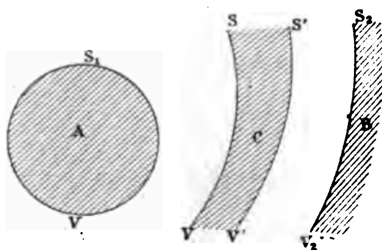


Fig. 19.

La forme des surfaces de niveau dans les régions intermédiaires n'est pas modifiée et le champ électrique conserve en chaque point la même direction.

Entre les surfaces S_2 et S′ la variation de potentiel reste la même que si la couche C n'existait pas; il en est ainsi également entre les surfaces S et S_1.

Pour établir la condition relative au diélectrique, considérons le flux de force $4\pi\sigma_1 dS_1$ émis par l'élément dS_1 de la surface S_1. La fraction absorbée sur l'élément correspondant dS de la couche $-Q$ doit être égale à $1-\frac{1}{K}$. Le rapport des charges totales a donc la même valeur

$$\frac{Q}{Q_1}=1-\frac{1}{K}.$$

Comme la force F, après avoir traversé la surface S, devient K fois moindre, cette diminution persiste dans tout l'in-

tervalle des surfaces S et S′, de sorte que la différence des potentiels entre ces deux surfaces est elle-même devenue K fois moindre.

Finalement, la chute de potentiel entre les conducteurs A et B est maintenant

$$V_1 - V + \frac{V - V'}{K} + V' - V_2 = V_1 - V_2 - \left(1 - \frac{1}{K}\right)(V - V').$$

Le dernier terme représente la perte de potentiel du conducteur A. Cette perte serait égale à $V - V'$ si le corps interposé C était conducteur. On est ainsi conduit à considérer le pouvoir inducteur spécifique des conducteurs comme ayant une valeur infinie.

Dans le cas actuel, l'effet du diélectrique est une fraction constante $1 - \frac{1}{K}$ de celui que produirait un conducteur de mêmes dimensions, mais ce résultat simple tient aux conditions particulières de l'expérience.

Si le diélectrique occupe tout l'espace compris entre les conducteurs A et B, on a $V = V_1$ et $V' = V_2$ et la différence finale des potentiels des conducteurs devient $\frac{V_1 - V_2}{K}$; c'est le résultat trouvé précédemment (**83**).

On peut supposer ainsi que le diélectrique est formé d'une série de feuillets infiniment minces, limités par des surfaces de niveau, chargés sur les faces qui se touchent de quantités égales d'électricités contraires, dont les actions s'annulent, les faces des feuillets en contact avec les conducteurs ayant seules une électrisation telle que la densité en chaque point soit une fraction $1 - \frac{1}{K}$ de celle du conducteur et de signe contraire.

Une manière équivalente de concevoir les phénomènes serait d'imaginer que le diélectrique est remplacé par une série de feuillets isolants à la manière des gaz, d'épaisseurs α, α', α'', séparés par des feuillets conducteurs d'épaisseurs β, β', β''..., ces feuillets étant toujours limités par des surfaces de niveau du système électrique.

Les feuillets adjacents α et β feraient baisser la différence de potentiel primitive des surfaces extrêmes de la fraction $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$, les deux suivants de la fraction $\frac{\beta'}{\alpha'+\beta'}$, etc. Si ces rapports successifs sont égaux entre eux, la différence de potentiel des conducteurs A et B devient

$$V_1 - V_2 - \frac{\beta}{\alpha+\beta}(V_1 - V_2) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(V_1 - V_2).$$

Dans cet ordre d'idées le pouvoir inducteur spécifique prend une signification physique, c'est le rapport $\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$ de la somme des épaisseurs d'un feuillet isolant et du feuillet conducteur voisin à celle de l'isolant.

L'expérience indiquant que plusieurs diélectriques solides ont un pouvoir inducteur spécifique voisin de 2, tous ces feuillets successifs auraient alors la même épaisseur.

En outre, il résulte des observations, et les recherches de M. Gaugain à ce sujet sont particulièrement intéressantes, que le pouvoir inducteur spécifique varie avec le temps ; il a d'abord une valeur minimum au moment de la charge, puis augmente rapidement et ensuite d'une manière plus lente, pour tendre vers une limite. En d'autres termes, quand on charge l'armature intérieure d'un condensateur à diélectrique solide, le potentiel de cette armature diminue d'abord très vite et ensuite plus lentement jusqu'à une valeur minimum.

Avec la conception des feuillets alternatifs, le champ électrique est nul dans chacun des feuillets conducteurs, mais les couches d'électricité positive sont toutes poussées vers l'extérieur et les couches négatives vers l'intérieur; les feuillets conducteurs β tendent donc à s'élargir et les autres à diminuer, ce qui fait croître le pouvoir inducteur, jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint.

92. Réfraction des forces. — Si l'on considère la surface d'un diélectrique placé dans l'air, F étant le champ dans l'air et F′ dans le diélectrique, i et i' les angles de leurs directions avec la normale à la surface, la conservation du flux d'induction donne

$$F \cos i = KF' \cos i'.$$

D'autre part, l'électrisation superficielle du diélectrique ne fait que modifier les composantes normales de la force sans altérer les composantes tangentielles ; on a donc aussi

$$F \sin i = F' \sin i'.$$

Il en résulte la condition

$$(8) \qquad \operatorname{tang} i' = K \operatorname{tang} i,$$

qui exprime ce qu'on peut appeler la *loi de réfraction de la force* ou du flux, à la surface de séparation de l'air et d'un diélectrique différent.

D'une manière plus générale, si l'on considère la surface de séparation de deux diélectriques de pouvoirs inducteurs K_1 et K_2, dans lesquels les champs F_1 et F_2 font les angles i_1 et i_2 avec la normale, on a

$$K_1 F_1 \cos i_1 = K_2 F_2 \cos i_2,$$

$$F_1 \sin i_1 = F_2 \sin i_2,$$

$$(9) \qquad \frac{\operatorname{tang} i_1}{K_1} = \frac{\operatorname{tang} i_2}{K_2}.$$

La densité σ de la couche électrique sur la surface est déterminée par la différence des composantes normales (**34**) :

$$4\pi\sigma = F_2 \cos i_2 - F_1 \cos i_1.$$

93. Equations générales de l'induction. — Si l'on considère un tube d'induction traversant une série de diélectriques, le flux d'induction est en chaque point égal au produit du flux de force correspondant par le pouvoir inducteur spécifique. Ce flux d'induction conserve la même valeur tant qu'il ne rencontre pas de corps réellement électrisés.

Si le tube rencontre une masse q d'électricité, on peut toujours concevoir que cette masse est entourée par une couche d'air, dans laquelle l'induction se confond avec la force. Le flux de force augmentant alors de $4\pi q$ (**25**), il en sera de même pour le flux d'induction.

D'autre part, les composantes de l'induction dans un diélectrique de pouvoir inducteur K sont respectivement KX, KY et KZ. Si l'on applique la relation qui précède à un élément de volume $dx\,dy\,dz$, où la densité réelle d'électricité est ρ, on aura par un raisonnement analogue à celui du n° **26**,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial(KX)}{\partial x}+\frac{\partial(KY)}{\partial y}+\frac{\partial(KZ)}{\partial z}=4\pi\rho,\\ &\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial V}{\partial z}\right)+4\pi\rho=0.\end{aligned}\right.$$

Lorsque le milieu est homogène et isotrope, le coefficient K est une constante et l'on peut écrire

$$(11)\qquad K\Delta V+4\pi\rho=0.$$

Si l'on considère, à la surface de deux diélectriques, une couche électrique de densité σ provenant de leur polarisation, en même temps qu'une couche d'électricité réelle de densité σ' produite par un procédé particulier, tel que le frottement, la différence des composantes normales du champ est déterminée par la somme des densités $\sigma+\sigma'$. En distinguant par les indices 1 et 2 les termes relatifs aux deux milieux et comptant dans chacun d'eux la normale à partir de la surface, on peut écrire

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial V_1}{\partial n_1}+\frac{\partial V_2}{\partial n_2}+4\pi(\sigma+\sigma')=0,\\ &K_1\frac{\partial V_1}{\partial n_1}+K_2\frac{\partial V_2}{\partial n_2}+4\pi\sigma'=0.\end{aligned}\right.$$

Lorsque les diélectriques n'ont reçu d'autre électricité que celle qui provient de la polarisation, ces équations se réduisent à

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta V=0,\\ &\frac{\partial V_1}{\partial n_1}+\frac{\partial V_2}{\partial n_2}+4\pi\sigma=0,\\ &K_1\frac{\partial V_1}{\partial n_1}+K_2\frac{\partial V_2}{\partial n_2}=0.\end{aligned}\right.$$

On en déduit

$$\sigma = \frac{K_1 - K_2}{4\pi K_1} \frac{\partial V_1}{\partial n_1}.$$

94. Remarques sur les couches de polarisation. — Bien que la couche de densité σ disparaisse avec la polarisation, il faut remarquer que si, pendant que le diélectrique est soumis à l'induction, on ramenait sa surface à l'état neutre, par un procédé quelconque, au moyen d'une flamme reliée au sol par exemple, et qu'on enlevât ensuite les masses inductrices, on trouverait sur cette surface une couche électrique réelle de densité $-\sigma$.

Cette remarque permet d'expliquer les phénomènes que présentent certains corps, par exemple les cristaux pyroélectriques, tels que la *tourmaline*, que nous étudierons plus loin. Il suffit de supposer que leur état normal est analogue à celui que prennent les diélectriques dans un champ, autrement dit, qu'ils sont *naturellement polarisés* et que *leur polarisation est une fonction de la température.*

Une tourmaline neutre en apparence est un cristal qui, en vertu de sa polarisation, produirait à l'extérieur les mêmes forces qu'une couche de masse totale nulle et de densité $+\sigma$ distribuée sur la surface, mais qui, par suite de causes quelconques, par exemple la déperdition au contact du milieu ambiant, s'est recouverte d'une couche réelle de densité $-\sigma$, laquelle annule pour tout point extérieur l'effet de la polarisation intérieure. Si l'on fait varier la température de la tourmaline, on change l'état intérieur sans modifier la couche développée sur la surface : l'équilibre est alors rompu, et ne pourra se rétablir que d'une façon plus ou moins lente sous l'action des causes qui avaient amené la neutralisation antérieure; l'effet observé, dans ces conditions, est la différence des actions produites respectivement par la couche de polarisation et par la couche réelle.

95. Énergie du diélectrique. — On a vu précédemment (82) que l'énergie d'un système peut être considérée comme résidant dans le diélectrique lui-même, lorsque ce milieu jouit des propriétés de l'air. Il en est de même quand les diélectriques sont de nature quelconque.

L'énergie totale d'un système isotrope peut s'écrire, en tenant compte de l'équation (11),

$$W = \frac{1}{2}\int V\rho\, dv = -\frac{1}{8\pi}\int K V \Delta V\, dv.$$

Appliquant la formule de Green, comme dans le premier cas, il reste

$$W = \frac{1}{8\pi}\int K F^2 dv.$$

La valeur générale de l'énergie par unité de volume dans les diélectriques est donc

$$w = \frac{1}{8\pi} K F^2.$$

96. Action des corps dans les diélectriques. — La notion du pouvoir inducteur spécifique doit amener également des modifications dans les propriétés relatives aux actions qui s'exercent entre les corps.

Lorsqu'un conducteur, dont la charge superficielle a une densité σ, se trouve placé dans un diélectrique, le champ extérieur est

$$F' = \frac{F}{K} = \frac{4\pi\sigma}{K}.$$

L'action du champ sur l'élément de surface dS est alors

$$\frac{F'}{2}\sigma dS = \frac{2\pi\sigma^2}{K} dS,$$

de sorte que la pression électrostatique a pour valeur

$$p = \frac{2\pi\sigma^2}{K} = \frac{1}{8\pi}\frac{F^2}{K} = \frac{1}{2}\frac{F\sigma}{K}.$$

Toutes les actions des corps électrisés, quand on les évalue en fonction des masses, sont donc K fois moindres que dans un milieu gazeux, ou mieux dans le vide.

De même, si l'on considère l'élément de volume d'un tube de force (fig. 17) les actions qui s'exercent sur les bases sont encore $pd\text{S}$ et $p'd\text{S}'$ et la résultante relative à l'unité de volume $\frac{1}{2}\frac{dp}{dn}$ est K fois moindre que dans l'air; il en est de même pour la pression latérale p_1,

97 **Comparaison avec la conductibilité thermique.** — Reprenons la comparaison du problème de l'équilibre électrique avec celui de la propagation de la chaleur. Nous avons vu (47) qu'entre deux mêmes surfaces de niveau, si le coefficient de conductibilité est égal à l'unité, le flux de chaleur, dans le premier, est égal numériquement au flux de force dans le second; si le coefficient de conductibilité est k, le flux de chaleur est k fois plus grand que le flux de force électrique.

Considérons maintenant deux systèmes corrélatifs, l'un électrique, l'autre calorifique, formés chacun de deux milieux séparés par une même surface S, et tels que les surfaces équipotentielles de l'un coïncident avec les surfaces isothermes de l'autre. Si k_1 et k_2 sont les coefficients de conductibilité des deux milieux, le flux de chaleur à travers un élément $d\text{S}$ de la surface de séparation est $k_1 \frac{\partial t_1}{\partial n_1} d\text{S}$ dans le premier milieu et $-k_2 \frac{\partial t_2}{\partial n_2} d\text{S}$ dans le second.

Comme l'équilibre thermique est supposé atteint, ces deux flux sont égaux et l'on a

$$k_1 \frac{\partial t_1}{\partial n_1} + k_2 \frac{\partial t_2}{\partial n_2} = 0.$$

Le système électrique donne, de même,

$$\text{K}_1 \frac{\partial \text{V}_1}{\partial n_1} + \text{K}_2 \frac{\partial \text{V}_2}{\partial n_2} = 0.$$

Si les températures des sources de chaleur ont respectivement les mêmes valeurs numériques que les potentiels des conducteurs dans le système électrique correspondant, cette égalité se maintiendra en chaque point des deux milieux s'ils satisfont à la condition de

$$\frac{\text{K}_1}{\text{K}_2} = \frac{k_1}{k_2}.$$

Dans ce cas, les flux d'induction sont donc proportionnels aux flux de chaleur, le pouvoir inducteur spécifique jouant dans le problème électrique le même rôle que le coefficient de conductibilité dans le problème thermique.

98. Déplacement électrique. — Pour expliquer les propriétés des diélectriques et rendre compte des phénomènes par la seule intervention du milieu, Maxwell imagine que, quand un diélectrique est soumis à l'induction, il se produit un phénomème équivalent à un *déplacement* d'électricité dans le sens de l'induction. Par exemple, dans une bouteille de Leyde dont l'armature intérieure est chargée positivement, le déplacement a lieu dans la masse du verre, de l'intérieur vers l'extérieur; le circuit se ferme par les conducteurs et la source.

Toute augmentation de la charge augmente le déplacement et correspond à un courant fermé d'électricité positive qui va de l'armature intérieure à l'armature extérieure; toute diminution correspond à un courant de sens contraire; la durée du courant est égale à celle de la variation de charge.

Le déplacement par une surface est la quantité d'électricité qui la traverse. Soit σdS cette quantité pour un élément dS de la surface d'un conducteur et F le champ dans le diélectrique au voisinage de l'élément. Comme on a $4\pi\sigma = KF$, la quantité d'électricité a pour valeur $\frac{KFdS}{4\pi}$, c'est-à-dire que le déplacement est égal au quotient du flux d'induction par 4π.

D'une manière générale, *le déplacement par unité de surface en un point quelconque d'un diélectrique est égal au quotient de l'induction par 4π et parallèle à l'induction.*

Les composantes f, g, h du déplacement parallèles aux axes et rapportées à l'unité de section sont

$$\left\{\begin{aligned} f &= \frac{K}{4\pi} X = -\frac{K}{4\pi}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}, \\ g &= \frac{K}{4\pi} Y = -\frac{K}{4\pi}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}, \\ h &= \frac{K}{4\pi} Z = -\frac{K}{4\pi}\cdot\frac{\partial V}{\partial Z}. \end{aligned}\right.$$

Un corps conducteur n'oppose aucun obstacle au déplace-

ment. Dans un diélectrique, le déplacement est limité par les actions antagonistes qu'il développe lui-même, en d'autres termes, par une espèce d'élasticité, qu'on peut appeler l'*élasticité électrique* du milieu. L'équilibre est établi quand la réaction élastique est égale en chaque point à la force électrique. Si, par analogie, on appelle *coefficient d'élasticité électrique* le rapport de l'intensité du champ au déplacement qu'il produit, et qu'on suppose le milieu parfaitement élastique, on voit que le coefficient d'élasticité est égal à $\frac{4\pi}{K}$ et que, par suite, *le pouvoir inducteur spécifique est inversement proportionnel au coefficient d'élasticité du milieu.*

C'est le déplacement produit par l'induction à travers la masse entière du diélectrique qui détermine la polarisation du milieu et l'électrisation apparente des conducteurs.

Considérons un tube d'induction entre deux conducteurs. Dans toute l'étendue du tube, le déplacement est constant : chaque section orthogonale est traversée par la même quantité d'électricité. A l'une des extrémités, le déplacement s'est fait du conducteur vers le diélectrique, l'élément correspondant dS du conducteur est dit alors chargé d'électricité positive avec une densité σ; à l'autre extrémité, le déplacement s'est fait du diélectrique vers le conducteur, l'élément correspondant dS' est chargé avec une densité $-\sigma'$. Dans toute l'étendue du tube, si le diélectrique reste le même, il n'y a pas d'électricité apparente ; mais ce milieu est polarisé, car si on isole par la pensée une portion du tube comprise entre deux sections orthogonales, le déplacement s'est fait en sens inverse pour ces deux sections, et toutes deux paraîtraient électrisées en sens contraires, si leur électrisation n'était neutralisée par l'électrisation égale et opposée des portions du tube en contact. Si le tube traverse la surface de séparation des deux diélectriques, le déplacement est le même dans les deux milieux, mais la polarisation n'est pas la même et la surface aura une électrisation apparente égale à la différence des couches électriques des surfaces des deux milieux en contact.

Il est évident que, puisque l'électrisation du conducteur n'est qu'apparente, toute l'énergie doit résider dans le milieu diélectrique. Elle est égale au travail dépensé pour opérer le

déplacement, en sens contraire des forces élastiques. L'énergie par unité de volume (95) est égale à $\frac{KF^2}{8\pi}$ ou $\frac{1}{2}\cdot\frac{KF}{4\pi}\cdot F$, c'est-à-dire la moitié du produit du champ par le déplacement.

La théorie du déplacement de Maxwell rend donc un compte satisfaisant des propriétés du milieu.

Elle fournit une interprétation physique du pouvoir inducteur spécifique de Faraday ; elle donne ensuite l'explication de cette vue de Faraday qu'il n'est pas possible de communiquer à la matière une charge absolue d'électricité. En effet, dans cette théorie, l'électricité se comporte comme un fluide incompressible ; la quantité qui peut être contenue dans une surface fermée est invariable et la production de deux quantités d'électricité égales et de signes contraires apparaît comme la conséquence d'un seul et même phénomène.

Enfin il est naturel de penser que, si l'explication des phénomènes électriques entraîne l'existence d'un milieu incompressible, répandu dans tout l'espace, ce milieu ne saurait être différent de l'éther auquel on attribue les phénomènes lumineux et calorifiques ; cette théorie permet donc d'entrevoir entre les deux ordres de phénomènes une corrélation que les progrès récents n'ont fait que confirmer.

99. Condensateurs à gaz. — Nous avons supposé jusqu'à présent que le pouvoir inducteur spécifique était égal à l'unité dans les gaz, mais il est à prévoir que cette relation n'est qu'approchée. On doit donc considérer les gaz comme ayant des propriétés différentes à ce point de vue et prendre pour unité le pouvoir inducteur du vide.

Comme l'influence du gaz est très faible, il est alors naturel d'admettre, et ce sera une conséquence ultérieure de la théorie de Maxwell, que le pouvoir inducteur spécifique d'un gaz est proportionnel à sa densité, ou à la pression pour une même température. C'est ce que les expériences de Boltzmann [1] ont, en effet, démontré.

Il doit résulter alors du principe de la conservation de l'électricité (76) que, réciproquement, la pression y du gaz situé entre les armatures d'un condensateur est fonction de la différence de potentiel x des armatures.

[1] Boltzmann, *Pogg. ann.*, t. CLV, p. 403 ; 1875.

En effet, le coefficient h de la formule précédente (15) est alors positif, puisqu'à différence de potentiel constante la charge croît avec la pression.

D'autre part, si la variable u désigne le volume de la masse de gaz en contact avec le condensateur, on doit considérer ce volume comme étant aussi une fonction de x et de y, ce qui donne l'équation (17).

Enfin le travail du corps est ydu et l'équation (20) montre que le coefficient a est négatif. Il en résulte qu'à pression constante ($dy = 0$), le volume u du gaz qui entoure les armatures d'un condensateur doit diminuer proportionnellement à la différence des potentiels.

Cette contraction du gaz paraît avoir été constatée par Quincke [1], au moins pour l'acide carbonique.

[1] Quincke, *Wied. ann.*, t. X, p. 531; 1880.

CHAPITRE SIXIÈME

CAS D'ÉQUILIBRE. — CONDUCTEURS

SYSTÈMES DE RÉVOLUTION

100. Représentation du champ. — L'état d'un champ électrique en chaque point est défini par sa grandeur et sa direction. On peut le représenter graphiquement par les *surfaces de niveau* ou par les *lignes de force*.

Dans le premier cas, on trace les surfaces de niveau correspondant aux valeurs numériques 1, 2, 3,...., n, telles par conséquent que le transport de l'unité d'électricité d'une surface quelconque à la suivante corresponde à l'unité de travail.

En chaque point, le champ est normal aux surfaces de niveau; sa valeur moyenne entre deux surfaces consécutives d'ordre n et $n+1$, est en raison inverse de la distance des surfaces comptée sur une orthogonale ou une ligne de force.

Dans le cas d'une masse unique q concentrée en un point, le potentiel à la distance r est $V=\frac{q}{r}$, ce qui détermine le rayon de la sphère pour laquelle le potentiel a une valeur déterminée V. Donnant à V les valeurs 1, 2, 3..... n, les sphères correspondantes sont les surfaces de niveau dont les potentiels correspondent à la suite naturelle des nombres.

Supposons maintenant plusieurs centres de masses q, q', q''...; le potentiel total en un point étant la somme des potentiels relatifs à chacun des centres, il est évident que les points de

potentiel V_p s'obtiendront par les rencontres des sphères de potentiels V_n, $V_{n'}$. $V_{n''}$....., tels que

$$n + n' + n'' \cdots\cdots = p.$$

Le lieu géométrique de tous les points ainsi déterminés sera la surface de niveau de potentiel V_p.

Ce procédé est général et permet, au moins en théorie, de déterminer les surfaces de niveau d'un système quelconque.

Quant à leur représentation, elle ne pourra se faire d'une manière complète dans un plan que pour un *système de révolution*, à l'aide d'une figure tracée sur un plan méridien. La force électrique sera toujours contenue dans le plan de la figure, normale en chaque point à la section méridienne des surfaces de niveau et en raison inverse de leur distance.

Si le système est *symétrique* par rapport à un plan, on pourra encore avoir une représentation complète de l'état du champ sur le plan de symétrie. Dans tout autre cas, une section par un plan quelconque du système des surfaces de niveau donnera encore une série de courbes qui sont naturellement des courbes de niveau; la composante du champ suivant le plan de la section est normale à ces courbes en chaque point et en raison inverse de leur distance; mais le champ lui-même ne se trouve pas représenté.

Les lignes de force peuvent donner une représentation équivalente. Une pareille ligne, normale en chaque point à la surface de niveau, indique déjà la direction du champ; pour représenter en même temps l'intensité, nous conviendrons de partager le champ en tubes de force tels que le flux correspondant à chacun d'eux ait une valeur constante, égale par exemple à l'unité.

Il suffira, étant donnée une surface de niveau, de la partager en éléments dS tels que $F dS = 1$, et de prendre chacun de ces éléments comme base d'un canal orthogonal.

Le mode de division est arbitraire, et l'on choisira celui qui conduit aux constructions les plus simples.

Dans le cas d'un *champ uniforme*, toutes les surfaces de niveau sont des plans parallèles équidistants. La division la plus simple consiste à mener deux séries de plans rectangulaires

entre eux et parallèles à la direction du champ. Les surfaces de niveau seront découpées en rectangles égaux.

Toute section par un plan parallèle à la direction du champ donnera deux systèmes de lignes de force équidistantes qui seront les intersections du plan de figure avec les deux séries de plans normaux aux surfaces de niveau.

101. Systèmes de révolution. — Pour déterminer sur une surface de niveau les sections des tubes de force élémentaires, nous prendrons d'une part des plans méridiens équidistants, et d'autre part, sur la section méridienne, des points placés de telle manière que dans la révolution autour de l'axe ils partagent la surface en zones successives correspondant à un même flux. La surface se trouvera ainsi divisée en rectangles curvilignes correspondant à un même flux, que l'on prendra égal à l'unité.

Un *champ uniforme* peut toujours être considéré comme de révolution autour d'une ligne quelconque parallèle à sa direction et comporterait ce mode de représentation. Une surface de niveau, qui est un plan perpendiculaire à l'axe, sera coupée par une série de circonférences, comprenant entre elles des zones de surface constante. Les rayons, croissant suivant la loi des anneaux de Newton, seront proportionnels aux racines carrées des nombres consécutifs. Les lignes de force seront ainsi représentées dans le plan méridien par des droites parallèles à l'axe et dont les distances à l'axe sont comme les racines carrées des nombres entiers consécutifs.

Si F est l'intensité du champ et θ l'angle de deux méridiens, r_n et r_{n+1} les distances à l'axe de deux lignes de force successives, on devra prendre

$$F\frac{\theta}{2}(r^2_{n+1} - r^2_n) = 1, \quad \text{ou} \quad r^2_n = \frac{2n}{F\theta}.$$

Toutefois cette manière de figurer les phénomènes aurait l'inconvénient de ne pas représenter un champ uniforme par des lignes de force équidistantes.

102. Cas d'une masse unique. — Une masse unique q située en A (fig. 20) donne un système de révolution autour d'un axe quelconque passant par la masse agissante. Par des plans

normaux à un axe Ax, on divisera une sphère de centre A en zones successives de même surface et correspondant à un même flux.

Le flux de force correspondant au cône circulaire de demi-

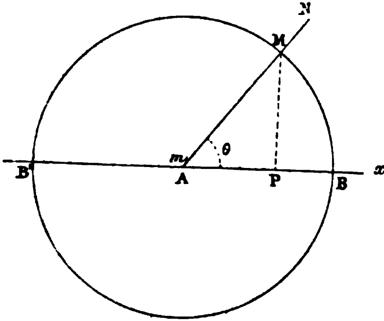


Fig. 20.

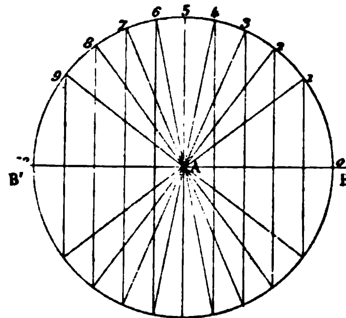


Fig. 21.

angle au sommet θ est proportionnel à la surface de la calotte de rayon apparent θ, c'est-à-dire à $1 - \cos\theta$.

Soit N l'ordre de la ligne de force AN, à partir du point B, on aura

$$\frac{N}{4\pi q} = \frac{1 - \cos\theta}{2}, \qquad \cos\theta = 1 - \frac{N}{2\pi q}.$$

Pour tracer les lignes de force, il suffira donc de diviser le diamètre BB′ (fig. 21) en $4\pi q$ parties égales, de mener les verticales correspondantes et de joindre au point A les points

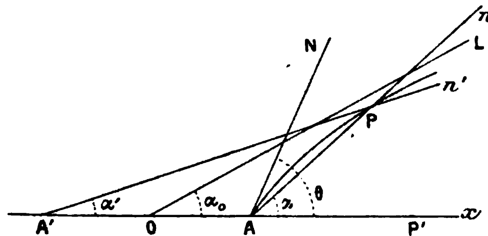


Fig. 22.

d'intersection avec la circonférence; la figure correspond au cas où $4\pi q = 10$.

103. Masses sur une même droite. — Soient maintenant

deux masses q et q' situées en A et A' (fig. 22); elles forment un système de révolution par rapport à la droite qui les joint. Le flux total qui traverse une zone quelconque de révolution dont le demi-arc est PP' est la somme des flux qui correspondent aux angles α et α' pour les deux masses séparément; l'ordre N de la ligne de force qui passe en P est la somme des ordres n et n' relatifs à ces masses.

Comme la valeur de n' est nulle au point A, la nappe qui correspond au flux de valeur N et qui passe par le point P est tangente en A au cône d'angle au sommet 2θ, qui comprend le même flux pour la masse q prise isolément.

Cette nappe est aussi asymptote à un cône ayant pour sommet le centre de gravité O des deux masses.

La ligne de force AP est définie par l'équation

$$2\pi q(1-\cos\alpha)+2\pi q'(1-\cos\alpha')=\text{N}=2\pi q(1-\cos\theta),$$

ou

$$(1) \qquad q\cos\alpha+q'\cos\alpha'=q'+q\cos\theta.$$

L'angle α_0 de l'asymptote OL avec l'axe est la limite des angles α et α' quand ces derniers deviennent égaux entre eux, ce qui donne

$$(2) \qquad (q+q')\cos\alpha_0=q'+q\cos\theta.$$

On en déduit

$$(3) \qquad \frac{1-\cos\alpha'}{\cos\alpha-\cos\theta}=\frac{1-\cos\alpha_0}{\cos\alpha_0-\cos\theta}=\frac{q}{q'}.$$

Les deux premiers termes donnent l'équation de la ligne de force en fonction des angles θ et α_0.

Cette méthode est encore générale et s'applique à un nombre quelconque de centres distribués sur une même droite.

L'équation d'une ligne de force partant de la masse q est

$$q\cos\alpha+q'\cos\alpha'+q''\cos\alpha''\ \ldots\ldots=q'+q''+\ \ldots\ldots\ +q\cos\theta,$$

et celle de l'asymptote,

$$(q+q'+q''\ldots\ldots)\cos\alpha_0=q'+q''+q'''\ldots\ldots+q\cos\theta.$$

Lorsque les masses sont toutes de même signe, toutes les lignes de force sont infinies. Si les masses sont en partie positives et négatives, un certain nombre de lignes de force sont finies, émanant des masses positives et absorbées par des masses négatives.

104. Deux masses de même signe égales. — Si le système est formé de deux masses égales et de même signe situées

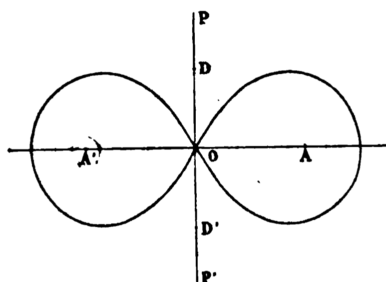


Fig. 23.

en A et A' à la distance $2a$ (fig. 23), les surfaces de niveau sont données par l'équation

$$V = \frac{q}{r} + \frac{q}{r'} = q\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right).$$

Les courbes méridiennes sont des espèces de lemniscates. La surface correspondant à $V_0 = \frac{2q}{a}$ a pour courbe méridienne deux lobes qui se coupent en O. Le point O correspond à un équilibre instable; le champ y est nul. En ce point, le potentiel présente un minimum relativement à l'axe AA' et un maximum par rapport au plan de symétrie PP'.

Pour toutes les valeurs du potentiel supérieures à V_0, la surface de niveau se compose de deux lobes séparés dont la section a la forme d'un ovale et qui entourent chacun des deux points A et A'. Ces ovales tendent de plus en plus à se confondre avec des cercles à mesure qu'on se rapproche de l'un de ces points.

Pour les valeurs inférieures à V_0, la surface de niveau est

formée d'une nappe unique dont l'étranglement tend à disparaître à mesure que le potentiel diminue et qui finalement se confondrait à une grande distance avec une sphère ayant pour centre le point O.

L'équation des lignes de force est

$$\cos\alpha + \cos\alpha' = 1 + \cos\theta,$$

et celle de l'asymptote

$$2\cos\alpha_0 = 1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

Les lignes de force émanées respectivement de ces deux masses sont séparées par le plan de symétrie PP'.

Toutes les droites passant par le point O dans ce plan sont également des lignes de force.

A la distance x sur l'axe OA, le champ est

$$F_1 = \frac{q}{(a-x)^2} - \frac{q}{(a+x)^2} = \frac{4aqx}{(a^2-x^2)^2}.$$

A la distance y du point O, sur l'axe transverse PP', le champ a pour expression

$$F_2 = \frac{2q}{r^2}\frac{y}{r} = \frac{2qy}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

il est alors maximum en des points D et D' pour lesquels

$$2y^2 = a^2, \qquad y = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

C'est un maximum relatif à l'axe transverse seulement et au contraire un minimum pour la direction parallèle à AA'.

105. Deux masses inégales. — Si les masses, toujours de même signe, sont inégales, la forme générale des surfaces de niveau est la même que dans le cas précédent, sauf la symétrie. La condition d'équilibre correspondant au point multiple de la surface à deux nappes est

$$\frac{q}{r^2} = \frac{q'}{r'^2}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{r}{r'} = \sqrt{\frac{q}{q'}}.$$

Les lignes de force forment toujours deux systèmes distincts; la surface qui les sépare correspond à $\theta = \pi$, et a pour équation

$$q \cos\alpha + q' \cos\alpha' = q' - q.$$

Si l'on pose $\frac{q'}{q} = 1 + \varepsilon$, cette équation devient

$$\cos\alpha + (1 + \varepsilon) \cos\alpha' = \varepsilon,$$

ou, en coordonnées rectangulaires, l'origine étant prise au milieu de la distance $2a$ des masses,

$$\frac{x - a}{\sqrt{y^2 + (x - a)^2}} + (1 + \varepsilon) \frac{x + a}{\sqrt{y^2 + (x + a)^2}} = \varepsilon.$$

C'est une surface du sixième degré qui passe par le point d'équilibre et qui a quelque analogie avec une nappe d'hyperboloïde. Sa section méridienne, comme toutes les autres lignes de force, a une asymptote, qui passe par le centre de gravité des deux masses, et dont l'équation est

$$\cos\alpha_0 = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

106. Couple de deux masses. — Nous examinerons avec plus de soin le cas de deux masses égales et de signes contraires, que l'on peut appeler *couple de deux masses*, parce qu'il donne lieu à plusieurs applications importantes.

Les surfaces de niveau, ayant pour équation

$$V = q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right),$$

sont des surfaces fermées ovoïdes, à une seule nappe, qui tendent à se confondre avec des sphères à mesure qu'elles se rapprochent des centres d'action. Toutes celles qui correspondent à des valeurs positives du potentiel entourent le point A (fig. 24), celles qui correspondent à des valeurs négatives

entourent le point A'. Elles sont séparées par un plan de symétrie au potentiel zéro.

Les lignes de force ont pour équation

$$\cos\alpha' - \cos\alpha = 1 - \cos\theta = \frac{N}{2\pi q}. \tag{4}$$

Ces lignes de force sont toutes finies et partent du point A pour aboutir au point A'; elles sont évidemment symétriques

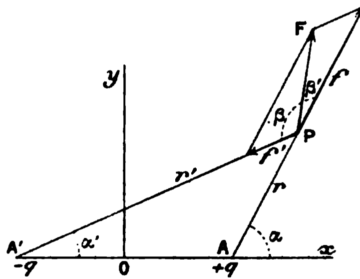


Fig. 24.

par rapport au plan Oy de potentiel zéro, perpendiculaire au point O, au milieu de l'axe AA'.

Appelant f et f' les actions respectives des masses $+q$ et $-q$ au point P, β et β' les angles de leur résultante F avec les rayons vecteurs r' et r, on a

$$\frac{\sin\beta'}{\sin\beta} = \frac{f'}{f} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{\sin^2\alpha'}{\sin^2\alpha}, \tag{5}$$

$$\frac{F}{\sin(\beta+\beta')} = \frac{f}{\sin\beta} = \frac{f'}{\sin\beta'} = \frac{F}{\sin(\alpha-\alpha')}. \tag{6}$$

La valeur du champ F peut encore s'écrire

$$F = f\cos\beta' + f'\cos\beta = q\left(\frac{\cos\beta'}{r^2} + \frac{\cos\beta}{r'^2}\right).$$

Les coordonnées du point P étant x et y, les composantes des actions f et f' sont

$$f_x = q\frac{x-a}{r^3}, \qquad f_y = q\frac{y}{r^3};$$

$$f'_x = -q\frac{x+a}{r'^3}, \qquad f'_y = -q\frac{y}{r'^3}.$$

Les composantes du champ sont donc

$$X = q\left[\frac{x-a}{r^3} - \frac{x+a}{r'^3}\right] = q\left\{\frac{x-a}{[y^2+(x-a)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{x+a}{[y^2+(x+a)^2]^{\frac{3}{2}}}\right\},$$

$$Y = q\left(\frac{y}{r^3} - \frac{y}{r'^3}\right) = qy\left\{\frac{1}{[y^2+(x-a)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[y^2+(x+a)^2]^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

La composante Y est nulle sur l'axe des x et sur l'axe des y. Le champ F_2 sur l'axe transverse Oy est dirigé vers la gauche, ou négatif, et a pour expression

$$F_2 = -X = \frac{2aq}{r^3} = \frac{2aq}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Sur l'axe des x, en dehors des points A et A', le champ F_1 est dirigé vers la droite et l'on a

$$F_1 = X = q\left[\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2}\right] = 2aq\frac{2x}{(x^2-a^2)^2}.$$

Ces quantités F_1 et F_2 représentent les *valeurs principales* du champ des deux masses.

Dans l'intervalle des points A et A', le champ F'_1 est encore négatif, avec la valeur

$$F'_1 = -X = q\left[\frac{1}{(a-x)^2} + \frac{1}{(a+x)^2}\right] = 2q\frac{a^2+x^2}{(a^2-x^2)^2}.$$

Dans ces différentes expressions, le produit $2aq$ représente le moment électrique m des deux masses.

Lorsque le champ F est perpendiculaire à l'axe des x, on a

$\sin\beta' = \cos\alpha$ et $\sin\beta = \cos\alpha'$: les équations (5) donnent alors

$$r^2 \cos\alpha' = r'^2 \cos\alpha, \qquad \text{ou} \qquad \sin\alpha \sin 2\alpha = \sin\alpha' \sin 2\alpha'.$$

C'est l'équation de la courbe APM (fig. 25) qui passe par tous les points du plan où la force est verticale. Elle se compose de deux branches symétriques, partant de A et de A′ et asymptotes à une droite OL.

Pour déterminer la direction de l'asymptote OL, il suffit

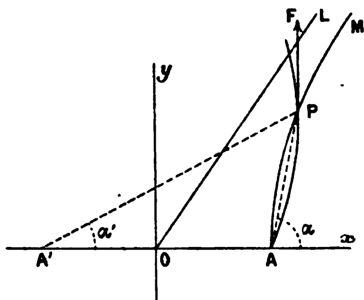


Fig. 25.

de remarquer qu'à une grande distance le rapport des rayons vecteurs tend vers l'unité, la différence des angles α et α' devenant très petite, et qu'on a

$$r' - r = 2a\cos\alpha,$$
$$r(\alpha - \alpha') = 2a \sin\alpha.$$

Il en résulte

$$\frac{\cos\alpha}{r^2} = \frac{\cos\alpha' - \cos\alpha}{r'^2 - r^2} = \frac{(\alpha - \alpha')\sin\alpha}{(r + r')(r' - r)} = \frac{\sin^2\alpha}{2r^2\cos\alpha},$$

$$(7) \qquad \operatorname{tang}^2\alpha = 2.$$

107. Principe des images. — Nous avons vu (40, IX) qu'on peut toujours remplacer une masse électrique quelconque par une couche de masse égale, en équilibre sur une surface de niveau qui l'entoure complètement. En fonction du champ F, la densité de cette couche en chaque point est déterminée par la condition $4\pi\sigma = F$.

Pour tous les points intérieurs, le potentiel devient constant et égal à celui de la surface ; mais pour tous les points extérieurs rien n'est changé à l'état du champ.

Considérons, dans le problème précédent, le plan transversal Oy au potentiel zéro (fig. 26). Pour tous les points situés

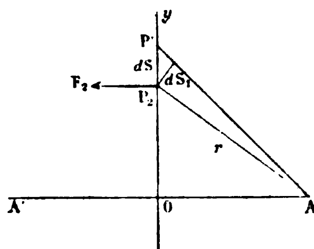


Fig. 26.

à droite du plan, nous pouvons remplacer la masse $-q$ située en A' par une masse égale en équilibre sur le plan. Le champ F au point P étant dirigé vers la gauche, la densité σ correspondante est

$$-4\pi\sigma = F = \frac{2aq}{r^3};$$

elle est *en raison inverse du cube* de la distance du point considéré P au point A.

On peut remarquer, d'après cette loi de distribution, que la charge d'un élément du plan est en chaque point proportionnelle à l'angle sous lequel on le voit du point A. En effet la charge d'un élément de surface dS est

$$-\sigma dS = \frac{q}{2\pi}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{a dS}{r}.$$

Or, le dernier facteur est la projection dS_1 de l'élément dS sur un plan perpendiculaire à r, et $\frac{dS_1}{r^2}$ est l'angle $d\omega$ sous lequel du point A on voit l'élément dS. On a donc

$$-\sigma dS = \frac{q}{2\pi} d\omega.$$

Le flux de force qui traverse l'élément dS est évidemment le double du flux $qd\omega$ qui proviendrait de masse $+q$.

Le plan, recouvert de la masse $-q$, étant au potentiel zéro, tout l'espace situé à gauche est au potentiel zéro. C'est le cas d'un plan conducteur indéfini Oy, en communication avec le sol, et soumis à l'influence d'une masse électrique $+q$ placée au point A. Un pareil plan intercepte complètement l'action de la masse q sur les points situés derrière lui; il fait l'office d'un *écran électrique*.

Ainsi, la masse $+q$ étant placée en A, en présence d'un plan conducteur Oy en communication avec le sol, on peut, pour les points situés à droite, remplacer ce plan par une masse $-q$ située au point A' symétrique de A.

Lord Kelvin considère que la masse $-q$ en A' est, par rapport au plan Oy relié au sol, l'*image* de la masse $+q$ située en A. On voit, en effet, l'analogie qui existe entre le phénomène électrique et le phénomène optique correspondant. Si le point A est une source de lumière et le plan Oy un miroir réflecteur, l'image de A est virtuelle et située en A'; l'éclairement de l'espace situé à droite du plan est le même que si on remplaçait ce plan par une source de lumière située en A', et l'intensité de cette source virtuelle sera égale à celle de A si le pouvoir réflecteur du plan est égal à l'unité.

108. Couple de masses infiniment voisines. — Nous avons déjà traité ce problème en partie (86), à propos de la polarisation des diélectriques. Si la distance $A'A = 2a$ des masses $\pm q$ est infiniment petite, et que m désigne le moment électrique du système, le potentiel en un point P, dont l'abscisse est x et la distance r, a pour expression

$$V = \frac{m\cos\alpha}{r^2} = m\frac{x}{r^3} = \omega, \tag{8}$$

la quantité ω désignant ici l'angle solide sous lequel on verrait du point P une surface d'étendue m perpendiculaire à l'axe du système.

On voit que, pour une même direction, le potentiel est en raison inverse du carré de la distance.

Les angles α et α' des rayons vecteurs avec l'axe ne diffé-

rant que d'une quantité infiniment petite, l'équation (4) des lignes de force devient

$$\frac{N}{2\pi q} = \cos\alpha' - \cos\alpha = (\alpha - \alpha')\sin\alpha = \frac{2a}{r}\sin^2\alpha,$$

$$N = \frac{2\pi m}{r}\sin^2\alpha. \tag{9}$$

Le lieu des points où le champ est normal à l'axe est évidemment l'asymptote (7) trouvée précédemment.

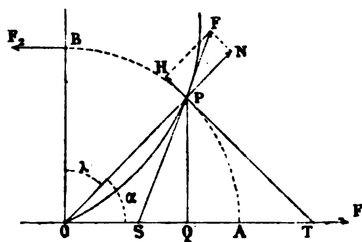


Fig. 27.

Les valeurs *principales* F_1 et F_2 du champ aux points A et B (fig. 27) à la même distance r, sur l'axe ou la droite transversale, sont

$$F_1 = \frac{2m}{r^3}, \qquad F_2 = \frac{m}{r^3}; \qquad F_1 = 2F_2. \tag{10}$$

Pour un point quelconque P, le champ peut être considéré comme la superposition des champs dus aux projections $m\cos\alpha$ et $m\sin\alpha$ du moment électrique sur le rayon OP et la droite perpendiculaire.

Les composantes normale et tangentielle, F_n et F_t, sur la circonférence de rayon r, sont donc

$$F_n = 2\frac{m\cos\alpha}{r^3}, \qquad F_t = \frac{m\sin\alpha}{r^3}. \tag{11}$$

Si l'on désigne par I l'inclinaison du champ sur la tangente à la circonférence et par λ le complément de l'angle α, c'est-à-

dire la latitude du point P par rapport à l'axe transverse, il en résulte

$$(12) \qquad \operatorname{tang} I = \frac{F_n}{F_t} = 2\cot\alpha = 2\operatorname{tang}\lambda.$$

Les composantes du champ parallèles aux axes sont

$$X = F_n\cos\alpha - F_t\sin\alpha = \frac{m}{r^3}(3\cos^2\alpha - 1),$$

$$Y = F_n\sin\alpha + F_t\cos\alpha = \frac{m}{r^3}3\sin\alpha\cos\alpha = \frac{3}{2}\frac{m}{r^3}\sin 2\alpha.$$

Enfin le champ lui-même a pour expression

$$(13) \qquad F^2 = \left(\frac{m}{r^3}\right)^2(3\cos^2\alpha + 1) = \left(\frac{m}{r^3}\right)^2(3\sin^2\lambda + 1).$$

Le moment électrique $m = 2aq$ peut rester fini pour des valeurs convenables des masses $\pm q$, quoique leur distance $2a$ soit extrêmement petite. Le flux de force qui émane des deux centres dépendrait de la valeur de q, mais le flux qui traverse la surface d'une sphère concentrique de rayon fini r ne dépend que du moment. Pour la calotte de demi-ouverture angulaire α le flux est donné par l'équation (9).

Les lignes de force qui correspondent, dans un plan méridien, aux flux de valeurs 1, 2, 3, ..., coupent l'axe transverse aux distances respectives $2\pi m, \frac{2\pi m}{2}, \frac{2\pi m}{3}, \ldots\ldots$

109. Théorème de Gauss. — Prolongeons la tangente à la circonférence jusqu'à l'axe en T, et la direction du champ jusqu'en S, les triangles OPS et SPP donnent

$$PS = OS\frac{\sin\alpha}{\cos I} = ST\frac{\cos\alpha}{\sin I},$$

$$OS \operatorname{tang} I = ST\cot\alpha = ST\operatorname{tang}\lambda,$$

ou, d'après l'équation (12),

$$ST = 2OS, \qquad OT = 3OS.$$

Le champ peut s'exprimer en fonction des longueurs déterminées par cette construction, car on a

$$r = \text{OT}\cos\alpha = 3\,\text{OS}\,.\cos\alpha = \frac{\text{OQ}}{\cos\alpha},$$

$$\text{F}^2 = \left(\frac{m}{r^3}\right)^2\left(\frac{\text{OQ}}{\text{OS}} + 1\right).$$

Sur la droite (7), où la force est perpendiculaire à l'axe, les points Q et S se confondent, ce qui donne

$$\text{F} = \frac{m}{r^3}\sqrt{2};$$

c'est la moyenne géométrique des valeurs principales (10) du champ relatives à la même distance.

110. Induction sur un élément de volume. — Le système de deux masses égales et de signes contraires infiniment voisines représente l'état d'un corps infiniment petit, conducteur ou non, primitivement neutre et placé dans un champ électrique quelconque.

En effet, la charge du corps étant nulle, les deux masses de signes contraires qui la constituent agissent respectivement sur un point extérieur comme si elles étaient concentrées à leurs centres de gravité.

Il en est de même pour un corps de dimensions finies, primitivement neutre, quand on considère son action à une grande distance.

111. Deux masses inégales de signes contraires. — Considérons deux masses $+q$ et $-q'$ situées en A et A' (fig. 28) à la distance $2a$, en supposant $q > q'$, et posons

$$q = k^2 q'.$$

L'équation d'une surface de niveau est

$$\text{V} = \frac{q}{r} - \frac{q'}{r'} = \frac{q'}{r}\left(k^2 - \frac{r}{r'}\right) = \frac{q}{r'}\left(\frac{r'}{r} - \frac{1}{k^2}\right).$$

La surface de potentiel nul correspond à la condition

$$r = k^2 r'.$$

Le rapport des rayons vecteurs étant constant, c'est une surface sphérique S de rayon R, qui comprend le point A'; les points A et A' sont conjugués par rapport à cette sphère.

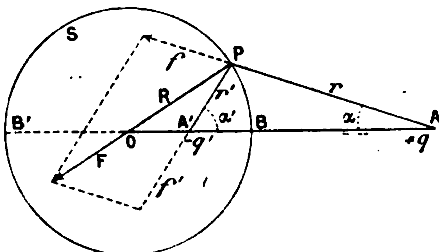


Fig. 28.

En désignant ici par α l'angle PAA', on a

$$k^2 = \frac{r}{r'} = \frac{OA}{R} = \frac{R}{OA'} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}. \tag{14}$$

On en déduit, par la relation $OA - OA' = 2a$,

$$\frac{R}{k^2} = OA' = \frac{OA}{k^4} = \frac{2a}{k^4 - 1}. \tag{15}$$

Les potentiels sont négatifs à l'intérieur de cette sphère et positifs à l'extérieur.

Toutes les surfaces de niveau sont fermées, à une nappe ou à deux nappes isolées, sauf une surface particulière qui a deux nappes contiguës S_i et S'_i et qui passe par le point I (fig. 29) où le champ est nul. La position de ce point est déterminée par la condition

$$\left(\frac{IA}{IA'}\right)^2 = \frac{q}{q'} = k^2;$$

on a donc

$$\frac{IA}{k} = IA' = \frac{2a}{k - 1}.$$

La valeur du potentiel en I, et sur toute la surface de niveau correspondante, est

$$V_i = \frac{k-1}{2a}\left(\frac{q}{k} - q'\right) = \frac{q}{2a}\left(\frac{k-1}{k}\right)^2 = \frac{q'}{2a}(k-1)^2.$$

Il y a évidemment sur l'axe deux autres points C et C', l'un à gauche et l'autre à droite du point A, pour lesquels le potentiel a la même valeur V_i et qui appartiennent à cette surface, car le potentiel croît de zéro à l'infini de B en A, et décroît

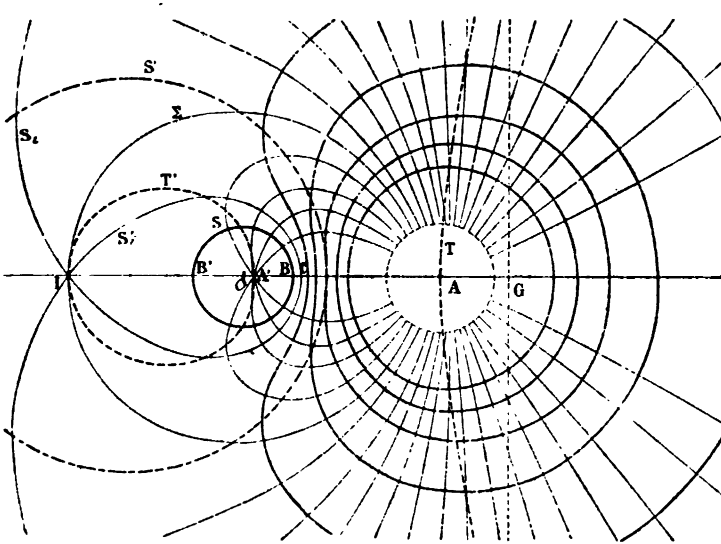


Fig. 29.

de l'infini à zéro, depuis le point A jusqu'à l'infini. Les distances x et x' des points C et C' au point A sont données par les équations

$$\frac{(k-1)^2}{2a} = \frac{k^2}{x} - \frac{1}{2a-x} = \frac{k^2}{x'} - \frac{1}{2a+x'}.$$

Toutes les surfaces dont le potentiel est plus grand que V_i entourent seulement le point A; toutes celles dont le potentiel

est positif et plus petit que V_i se composent de deux nappes isolées et fermées toutes deux : l'une extérieure au grand lobe de la surface S_i entoure les deux points A et A'; l'autre intérieure au petit lobe S'_i entoure seulement le point A'.

L'équation générale des lignes de force (103) émanant du point A et dont la tangente à l'origine fait l'angle θ avec la droite AA' devient

$$q\cos\alpha + q'\cos\alpha' = q\cos\theta + q'$$
$$k^2\cos\alpha + \cos\alpha' = k^2\cos\theta + 1.$$

Un certain nombre de ces lignes de force vont de A en A'; d'autres sont infinies et la direction θ_0 de leur asymptote s'obtiendra en faisant $\alpha = \theta_0 = \pi - \alpha'$, ce qui donne

$$(k^2 - 1)\cos\theta_0 = k^2\cos\theta + 1.$$

Toutes ces asymptotes passent par le centre de gravité G des deux masses déterminé par la condition

$$q.\mathrm{GA} = q'.\mathrm{GA'},$$
$$\frac{k^2}{\mathrm{GA'}} = \frac{1}{\mathrm{GA}} = \frac{k^2-1}{2a}.$$

Pour qu'une asymptote existe, il faut que l'angle θ_0 soit réel, c'est-à-dire que l'on ait

$$k^2\cos\theta + 1 < k^2 - 1, \quad \text{ou} \quad k^2(1-\cos\theta) > 2.$$

La condition $k^2(1-\cos\theta) = 2$ détermine l'angle de départ de la ligne de force limite, dont l'équation est

$$k^2\cos\alpha + \cos\alpha' = k^2 - 1.$$

C'est la courbe méridienne Σ de la surface qui sépare le flux de force $4\pi(q - q')$ ou $4\pi(k^2-1)q'$ aboutissant au point A'. Cette ligne de force Σ passe au point d'équilibre I, comme on le vérifiera facilement.

Les angles β' et β du champ F avec les rayons vecteurs donnent (106)

$$(16)\qquad \frac{\sin\beta'}{\sin\beta}=\frac{f'}{f}=\frac{q'r^2}{qr'^2}=\frac{r^2}{k^2r'^2}=\frac{\sin^2\alpha'}{k^2\sin^2\alpha},$$

Sur la surface S de potentiel nul (fig. 28), le champ est normal et sa direction passe par le centre O de la sphère. Comme les angles β et β' sont respectivement égaux à α et α', le triangle formé par les forces f, f' et F est alors semblable au triangle APA′ et l'on a

$$(17)\qquad \frac{F}{2a}=\frac{f}{r'}=\frac{f'}{r},$$

$$(18)\qquad F=\frac{2aq}{r'r^2}=\frac{2aq'}{rr'^2}=2aq\frac{k^2}{r^3}=\frac{2aq'}{k^2r'^3}.$$

Pour tous les points de cette surface, le champ est donc en raison inverse du cube de la distance à l'un ou l'autre des points conjugués A ou A′.

Lorsque le champ est parallèle à l'axe, on a $\beta'=\alpha$ et $\beta=\alpha'$; par suite

$$1=k^2\left(\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}\right)^3=k^2\left(\frac{r'}{r}\right)^3.$$

Le lieu des points où la tangente est horizontale est donc une sphère S′ (fig. 29) comprenant le point A′. Le centre et le rayon de cette sphère se calculeront par les formules (15) dans lesquelles on remplace k par $k^{\frac{1}{3}}$.

Lorsque le champ est perpendiculaire à l'axe, on a $\beta=\alpha'+90°$, $\beta'=\alpha-90°$, ce qui donne

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}+\frac{r^2}{k^2r'^2}=0.$$

La méridienne du lieu correspondant est une courbe formée de deux branches T et T′, l'une partant du point A et l'autre du point A′.

La branche T partant de A est d'abord verticale en ce point

et devient ensuite asymptote à une verticale passant par le centre de gravité G.

La seconde branche est une courbe fermée T′ : elle passe par le point A′ et par le point I.

112. Influence d'un point sur une sphère. — D'après les théorèmes établis précédemment (**40**, X), le potentiel extérieur à une surface de niveau ne change pas si l'on remplace les masses qu'il renferme par une couche de même masse totale en équilibre sur cette surface. On peut ainsi remplacer la masse $-q'$ par une masse égale, en équilibre sur l'une quelconque des surfaces de niveau qui entourent le point A′, y compris la partie S'_i de la surface à deux nappes. De même, on pourra remplacer la masse q par une couche égale sur l'une quelconque des surfaces de niveau qui entourent A, y compris la nappe S_i; enfin remplacer les masses q et $-q'$ par une masse $q-q'$ sur l'une des surfaces qui entourent les deux points, y compris encore la nappe S_i.

Si, en particulier, on substitue à la masse $-q'$ une couche égale sur la surface sphérique S de potentiel nul qui entoure le point A′, le potentiel extérieur n'est pas modifié, mais le potentiel intérieur devient constant et égal à la valeur qu'il avait sur cette surface, c'est-à-dire nul. Pour les points intérieurs à la surface S, on peut encore remplacer la masse q par une masse $+q'$ en équilibre sur cette surface et alors le potentiel sera nul partout à l'extérieur.

Le premier cas correspond à l'électrisation d'une sphère conductrice non isolée soumise à l'influence d'une masse extérieure; le second donne l'influence d'une masse électrique sur une surface sphérique non isolée qui l'entoure.

La densité σ de la couche en chaque point est alors, d'après l'équation (18),

$$\sigma = -\frac{F}{4\pi} = \frac{2aq}{4\pi}\cdot\frac{k^2}{r^3} = \frac{2aq'}{4\pi}\cdot\frac{1}{k^2 r'^3};$$

elle est en raison inverse du cube de la distance à l'un ou l'autre des points conjugués A ou A′.

Cette densité est négative quand on considère l'induction d'une masse extérieure $+q$ sur une sphère non isolée; elle est

positive pour un conducteur ayant une cavité de surface S qui renferme la masse $-q'$. Dans les deux cas, elle est de signe contraire à la masse influente.

Si l'on appelle d et d' les distances OA et OA', on déduit des équations (14)

$$\frac{q}{q'} = k^2 = \frac{d}{R} = \frac{R}{d'} = \frac{r}{r'},$$

$$2ad = d^2 - R^2, \qquad 2ad' = R^2 - d'^2,$$

$$\sigma = \frac{d^2 - R^2}{4\pi R} \cdot \frac{q}{r^3} = = \frac{R^2 - d'^2}{4\pi R} \cdot \frac{q'}{r'^3}.$$

La sphère S étant donnée, ainsi que la distance au centre de l'une des masses, ces équations déterminent la masse conjuguée et la densité en chaque point.

Supposons maintenant qu'après avoir isolé cette sphère, électrisée d'abord sous l'influence de la masse q, on y ajoute une couche quelconque Q uniforme; ce conducteur reste en équilibre. Le potentiel, qui était nul, devient $\frac{Q}{R}$ et la densité résultante en un point est alors

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} - \frac{d^2 - R^2}{4\pi R} \cdot \frac{q}{r^3}.$$

Si l'on fait $Q = q' = q\frac{R}{d}$, la charge totale de la sphère est nulle et son potentiel devient $\frac{q'}{R} = \frac{q}{d}$.

Ce problème correspond au cas d'une sphère isolée, primitivement neutre, électrisée sous l'influence d'un point extérieur. La densité est alors

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R d}\left[1 - \frac{d(d^2 - R^2)}{r^3}\right] = \frac{q'}{4\pi R^2}\left[1 - \frac{R(R^2 - d'^2)}{r'^3}\right].$$

La *ligne neutre* est la circonférence du petit cercle perpendiculaire à l'axe défini par l'équation

$$r^3 = d(d^2 - R^2) = 2ad^2.$$

C'est une ligne d'équilibre qui correspond à l'intersection de la sphère par la surface dont le potentiel est $\frac{q'}{R}$ ou $\frac{q}{d}$; on sait d'ailleurs (38, I) que ces surfaces se coupent à angle droit.

Le rayon u du cercle neutre et sa distance x au centre sont déterminés par les relations

$$u^2 = r^2 - (d-x)^2 = R^2 - x^2,$$

$$2xd = R^2 + d^2 - d^2\left(1 - \frac{R^2}{d^2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Lorsque la distance d devient très grande, il reste

$$2xd = R^2\left(1 + \frac{2}{3}\right);$$

pour une distance infinie, la ligne neutre est la circonférence d'un grand cercle de la sphère.

La densité serait nulle sur le petit cercle de contact du cône tangent à la sphère et ayant son sommet au point A, cercle dont le plan passe par le point A', si l'on avait

$$\frac{Q}{q} = \frac{R(d^2 - R^2)}{(d^2 - R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R}{\sqrt{d^2 - R^2}}.$$

113. Images par rapport à une sphère. — Pour tous les points extérieurs, l'action de la sphère S non isolée et électrisée sous l'influence de la masse q peut être remplacée par celle d'une masse $-q' = -\frac{q}{k^2}$, placée en A'. De même, la surface S non isolée et soumise à l'influence de $-q'$ équivaut, pour tous les points intérieurs, à la masse $q = k^2 q'$ placée en A.

Cette propriété est analogue à celle que nous avons déjà constatée pour le plan (107). La masse $-q'$ en A' est l'*image* de la masse extérieure q par rapport à la surface de la sphère, et l'image de la masse $-q'$ par rapport à cette même surface est une masse plus grande $q = k^2 q'$ située en A.

Le principe des images relatives à la sphère peut être étendu à un système quelconque de corps électrisés. En effet,

chaque élément du système développe par induction sur la sphère une couche dont l'action sur les points extérieurs est identique à celle de l'image correspondante. Chacune de ces couches étant en équilibre, leur superposition sera un état d'équilibre, et l'action résultante sera égale à l'action résultante de toutes les images.

L'ensemble de ces images formera un système qui sera l'image par rapport à la sphère du système proposé. Si le système est une surface électrisée, l'image sera une surface conjuguée de la première.

114. Influence réciproque de deux sphères. — Le problème très important de la distribution de l'électricité sur deux sphères conductrices a été traité d'abord par Poisson ([1]), puis

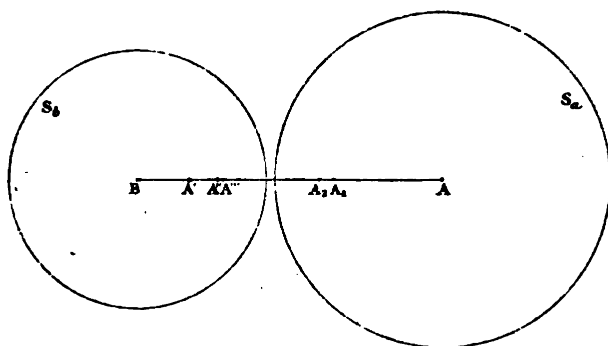


Fig. 30.

par Plana ([2]), qui se sont surtout attachés à déterminer la loi de variation des densités dans certains cas particuliers.

Le principe des images permet de résoudre ce problème d'une manière complète, quand on l'associe avec la méthode de Murphy (62). Soient S_a et S_b les deux sphères (fig. 30), a et b leurs rayons. La méthode consiste, comme on sait, à déterminer une série de couches successives de la manière suivante. On met sur le conducteur S_a une couche capable de donner un potentiel 1 ; c'est ici une couche uniforme de masse a.

([1]) Poisson, *Mémoires de l'Institut* pour 1811, 1re partie, p. 1.
([2]) Plana, *Mém. de l'Acad. de Turin*, [2], t. VIII, p. 71 ; 1845.

Cette couche agit à l'extérieur comme si elle était concentrée en A. On la fixe et on détermine la couche induite sur la surface S_b de la seconde sphère non isolée, ce qui revient à déterminer l'image A′ par rapport à S_b d'une masse $+a$ en A. On fixe ensuite la couche équivalente à A′ et on détermine son influence sur la sphère S_a non isolée, c'est-à-dire la nouvelle image A_1 de A′, et ainsi de suite. On répétera la même opération en commençant par la sphère S_b et on multipliera par des coefficients convenables toutes les masses ainsi déterminées. Chacune des masses et des densités pouvant être calculée exactement, on en déduirait la loi de distribution finale.

Soit x la distance AB des centres; $x_1, x_2, x_3, \ldots$ les distances des images $A_1, A_2, A_3 \ldots$ au point B; $x', x'', x''', \ldots$ celles des images $A', A'', A''', \ldots$ au point A.

La charge primitive de la première sphère étant $q = a$, on a, pour l'image A′,

$$q' = -\frac{q}{k^2} = -q\frac{b}{x},$$

$$BA' = \frac{b}{k^2} = \frac{b^2}{x},$$

$$x' = x - \frac{b^2}{x}.$$

Les images successives $A_1, A'', \ldots$ donneront, de même,

$$q_1 = -q'\frac{a}{x'}, \qquad x_1 = x - \frac{a^2}{x'},$$

$$q'' = -q_1\frac{b}{x_1}, \qquad x'' = x - \frac{b^2}{x_1},$$

$$q_2 = -q''\frac{a}{x''}, \qquad x_2 = x - \frac{a^2}{x''}, \ldots$$

La loi des termes est évidente et l'on aura

$$C_a = q + q_1 + q_2 + \cdots$$
$$C_{ab} = q' + q'' + q''' + \cdots$$

Le même procédé déterminera les coefficients C_b et C_{ab} relatifs à une charge primitive b sur la seconde sphère.

Si l'on désigne par A et B leurs charges respectives pour les potentiels U et V, on obtient finalement des expressions de la forme

$$A = C_a U - C_{ab} V,$$
$$B = C_b V - C_{ab} U.$$

Quant à l'action réciproque X des deux sphères, on peut l'évaluer directement par la résultante des actions que chacune des charges situées dans l'une des sphères exerce sur toutes celles que renferme l'autre sphère, ou encore par l'énergie du système (69).

Pour deux sphères de même rayon R dont la distance des centres est cR, on peut écrire, en désignant par I et J les rapports des coefficients C_a et C_{ab} au rayon,

$$A = R(IU - JV),$$
$$B = R(IV - JU).$$

L'énergie du système étant

$$W = \frac{1}{2}(AU + BV) = \frac{R}{2}\left[I(U^2 + V^2) - 2JUV\right],$$

l'action réciproque peut s'écrire, en désignant par a et b deux coefficients,

$$X = \frac{1}{2}\left[2\frac{\partial J}{\partial c}UV - \frac{\partial I}{\partial c}(U^2 + V^2)\right] = 2bUV - a(U^2 + V^2).$$

Lorsque les charges sont égales, on a simplement

$$A = R(I - J)V,$$
$$X = 2(b - a)V^2 = 2\frac{b - a}{(I - J)^2}\frac{A^2}{R^2}.$$

Lord Kelvin [1] a donné une table des valeurs des coefficients pour des valeurs de c comprises entre $c = 2$ et $c = 4$,

[1] Sir W. Thomson, *Reprint of pap. on Electr. and Magnetism*, p. 86 (1853).

c'est-à-dire pour le cas de sphères égales dont la distance des surfaces varie de o jusqu'au diamètre de l'une d'elles. Il est utile de voir comment on peut remplacer ces tables pour des distances plus grandes.

115. Formules approchées. — On obtiendra d'abord une première approximation en supposant que l'action des deux sphères est la même que si les masses étaient respectivement concentrées aux centres, et que le potentiel de chacune d'elles est égal à celui que l'on obtiendrait pour le centre en remplaçant la sphère voisine par une masse égale située au centre. On aura ainsi

$$U = \frac{A}{R} + \frac{B}{cR},$$

$$V = \frac{B}{R} + \frac{A}{cR},$$

$$X = \frac{AB}{c^2R^2} = \frac{(cU - Vc)(V - U)}{(c^2 - 1)^2};$$

il en résulte, pour des charges égales,

$$(19) \quad \begin{cases} RV = A\,\dfrac{c+1}{c}, \\ X = \dfrac{A^2}{c^2R^2} = \dfrac{V^2}{(c+1)^2}. \end{cases}$$

En comparant les résultats de ce calcul avec les tables de Lord Kelvin pour $c = 4$, on a

$$(20) \quad \begin{cases} I - J = 0{,}80256 & \dfrac{c}{c+1} = 0{,}80 \\ \dfrac{2(b-a)}{(I-J)^2} = 0{,}05846 & \dfrac{1}{c^2} = 0{,}0625 \\ 2(b-a) = 0{,}03766 & \dfrac{1}{(c+1)^2} = 0{,}040. \end{cases}$$

Ainsi, lorsque la distance des surfaces est égale au diamètre de l'une des sphères et les charges égales, les formules approchées donnent les potentiels et l'action réciproque en fonction

des masses, ou la valeur de cette action par les potentiels, avec des erreurs relatives de 0,003 — 0,069 — 0,062.

L'erreur sera moindre si l'on tient compte de toutes les images électriques, en admettant qu'elles sont situées sur la première de chaque série, c'est-à-dire aux points conjugués A' et B' des centres A et B de chacune des deux sphères par rapport à la surface de l'autre.

Les distances $x_1, x_2, \ldots\ldots x'', x''', \ldots\ldots$ ont alors la même valeur

$$x' = c\mathrm{R} - \frac{\mathrm{R}^2}{c\mathrm{R}} = \mathrm{R}\frac{c^2-1}{c}.$$

Dans ce cas, les charges des images successives pour l'unité de potentiel sur l'une des sphères sont, avec $q = \mathrm{R}$,

$$q' = -\frac{\mathrm{R}^2}{x}, \qquad q'' = -\frac{\mathrm{R}^2}{x}\left(\frac{\mathrm{R}}{x'}\right)^2, \ldots\ldots$$

$$q_1 = \frac{\mathrm{R}^2}{x}\cdot\frac{\mathrm{R}}{x'}, \qquad q_2 = \frac{\mathrm{R}^2}{x}\left(\frac{\mathrm{R}}{x'}\right)^3, \ldots\ldots$$

ce qui donne

$$\mathrm{C}_a = \mathrm{R} + \frac{\mathrm{R}^3}{xx'}\,\frac{1}{1-\dfrac{\mathrm{R}^2}{x'^2}} = \mathrm{R}\left[1 + \frac{c^2-1}{(c^2-1)^2-c^2}\right],$$

$$\mathrm{C}_{ab} = \frac{\mathrm{R}^2}{x}\,\frac{1}{1-\dfrac{\mathrm{R}^2}{x'^2}} = \frac{\mathrm{R}}{c}\,\frac{(c^2-1)^2}{(c^2-1)^2-c^2}.$$

Les charges A et B peuvent s'écrire

$$\mathrm{A} = \mathrm{RU} - \frac{\mathrm{R}}{c}\,\frac{(c^2-1)^2}{(c^2-1)^2-c^2}\left(\mathrm{V} - \frac{c}{c^2-1}\mathrm{U}\right),$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{RV} - \frac{\mathrm{R}}{c}\,\frac{(c^2-1)^2}{(c^2-1)^2-c^2}\left(\mathrm{U} - \frac{c}{c^2-1}\mathrm{V}\right).$$

Sous cette forme, chacune des charges A et B comprend deux parties, l'une $\mathrm{A}_1 = \mathrm{RU}$ et $\mathrm{B}_1 = \mathrm{RV}$, dont la distribution est uniforme et dont l'action extérieure est la même que si elle était concentrée au centre ; l'autre complémentaire, $-\mathrm{A}_2$ et $-\mathrm{B}_2$, provient des couches induites et peut être supposée

aux points conjugués B′ et A′. La distance des charges complémentaires est

$$x' - (x - x') = 2x' - x = R\left[\frac{2(c^2-1)}{c} - c\right] = R\,\frac{c^2-2}{c}.$$

L'action réciproque des deux sphères devient alors

$$X = \frac{A_1 B_1}{c^2 R^2} - \frac{A_1 B_2 + B_1 A_2}{x'^2} + \frac{A_2 B_2}{(2x'-x)^2}.$$

Lorsque les charges sont égales, il reste

$$(21)\quad \begin{cases} A = RV\left[1 - \dfrac{c^2-1}{c(c^2+c-1)}\right], \\ X = V^2\left[\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{2c}{(c^2-1)(c^2+c-1)} + \dfrac{(c^2-1)^2}{(c^2-2)^2(c^2+c-1)^2}\right]. \end{cases}$$

Pour contrôler le degré d'exactitude de ces formules, nous y ferons encore $c = 4$; il vient alors

$$\frac{A}{RV} = 0{,}80262,$$

$$\frac{XR^2}{A^2} = 0{,}05838,$$

$$\frac{X}{V^2} = 0{,}03761.$$

Composant avec les valeurs (20) des tables de lord Kelvin, on voit que l'approximation est d'environ 0,001; à plus forte raison les formules (21) peuvent-elles convenir pour des distances plus grandes.

Si l'on développe ces formules en fonction des puissances croissantes de $\frac{1}{c}$, on obtient

$$(22)\quad \begin{cases} A = RV\dfrac{c}{c+1}\left[1 + \dfrac{1}{c^4}\left(1 - \dfrac{1}{c} + \dfrac{2}{c^2} - \dfrac{3}{c^3} + \dfrac{5}{c^4}\cdots\cdots\right)\right], \\ X = \dfrac{V^2}{(c+1)^2}\left[1 - \dfrac{2}{c^3}\left(2 - \dfrac{1}{c} + \dfrac{4}{c^2} - \dfrac{7}{c^3} + \dfrac{11}{c^4}\cdots\cdots\right)\right], \\ X = \dfrac{A^2}{c^2R^2}\left[1 - \dfrac{2}{c^3}\left(2 + \dfrac{3}{c^2} - \dfrac{5}{c^3} + \dfrac{4}{c^4}\cdots\cdots\right)\right]. \end{cases}$$

Le terme principal, dans chaque expression, représente la première approximation donnée par les équations (19).

Si l'on fait $c = 6$, le terme de correction dans la valeur de X, en fonction des potentiels ou des charges, est d'environ

$$\frac{4}{6^3} = \frac{1}{2.3^3} = \frac{1}{54}.$$

On peut donc considérer, en particulier, comme parfaitement rigoureuse la méthode employée par Coulomb pour déterminer l'action de deux masses électrisées ou la valeur des potentiels, si l'on a soin seulement de prendre des précautions particulières afin d'éliminer ou de calculer l'influence des parois de la cage.

116. Sphère isolée dans un champ uniforme. — Si l'on suppose, dans le problème du n° **112**, que la distance d augmente indéfiniment, la masse q croissant d'une manière proportionnelle à d^2, la sphère se trouvera placée dans un champ uniforme $F = \frac{q}{d^2}$, et l'action intérieure F_i des couches induites doit être égale à $-F$.

Dans le cas où la sphère est restée isolée, la densité σ au point dont l'abscisse est x s'obtiendra en remplaçant r par $d - x$, ou, en ne prenant que les premiers termes,

$$r^3 = (d-x)^3 = d^3\left(1 - 3\frac{x}{d}\right) = d^3\left(1 + 3\frac{x}{d}\right)^{-1},$$

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R d}\left[1 - \frac{d^2 - R^2}{d^2}\left(1 + 3\frac{x}{d}\right)\right] = \frac{3q}{4\pi d^2}\cdot\frac{x}{R} = \frac{3F}{4\pi}\cdot\frac{x}{R}.$$

Les densités sont égales et de signes contraires de part et d'autre du plan diamétral perpendiculaire au champ ; la *ligne neutre* est donc dans ce plan. La densité est maximum $\pm\sigma_0$ aux extrémités du diamètre parallèle au champ ; en appelant α l'angle du rayon vecteur avec l'axe des x, on a donc

$$\sigma = \sigma_0 \cos\alpha,$$

$$F = -F_i = \frac{4\pi}{3}\sigma_0.$$

Le résultat est le même que si la sphère avait une couche

de densité uniforme ρ dont l'épaisseur δ parallèle au champ serait constante, avec la condition $\rho\delta = \sigma_0$, car la charge de l'unité de surface serait alors

$$\sigma = \rho.\delta \cos\alpha = \sigma_0 \cos\alpha.$$

On peut imaginer encore que cette couche est formée par la superposition de deux sphères de densités uniformes $+\rho$ et $-\rho$ dont les centres sont éloignés de la distance δ infiniment petite ; cette manière d'envisager le phénomène aurait permis d'ailleurs d'obtenir directement les mêmes résultats.

L'action extérieure de la sphère électrisée équivaut donc à celle d'un couple de masses infiniment voisines $\pm\frac{4}{3}\pi R^3\rho$, dont le moment électrique est

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho\delta = \frac{4}{3}\pi R^3\sigma_0 = R^3 F = -R^3 F_i.$$

Les valeurs déjà obtenues (**108**) montrent en particulier qu'à la distance r, le potentiel extérieur et les composantes parallèle et perpendiculaire au rayon vecteur sont

$$V_e = \frac{m\cos\alpha}{r^2} = -r\left(\frac{R}{r}\right)^3 F_i\cos\alpha,$$

$$F_n = 2\frac{m\cos\alpha}{r^3} = -2\left(\frac{R}{r}\right)^3 F_i\cos\alpha,$$

$$F_t = \frac{m\sin\alpha}{r^3} = -\left(\frac{R}{r}\right)^3 F_i\sin\alpha.$$

Les composantes du champ résultant parallèles aux axes des x et des y sont

$$X = F + \frac{m}{r^3}(3\cos^2\alpha - 1) = \frac{F}{r^3}\left[r^3 + R^3(3\cos^2\alpha - 1)\right],$$

$$Y = \frac{3}{2}\frac{m}{r^3}\sin 2\alpha = \frac{3}{2}\frac{F}{r^3}R^3\sin 2\alpha.$$

Comme l'épaisseur de chacune des couches est constante

suivant une direction parallèle au champ, leur masse commune Q a pour valeur

$$Q = \pi R^2 \rho \delta = \pi R^2 \sigma_0.$$

Si l'on désigne par $2l$ la distance de leurs centres de gravité, on doit avoir

$$m = \pi R^2 \sigma_0 . 2l = \frac{4}{3}\pi R^3 \sigma_0, \quad \text{ou} \quad l = \frac{2R}{3}.$$

Le centre de gravité de chacune des couches est donc aux deux tiers du rayon.

Le flux total de force qui émane de la couche positive est

$$\varphi = 4\pi . \pi R^2 \sigma_0 = \pi R^2 . 4\pi\sigma_0 = 3\pi R^2 . F.$$

Le flux de force résultant qui aboutit à la sphère par la face négative et sort ensuite par la face positive est triple du flux primitif produit par le champ dans le même espace.

Le tiers de ce flux $-\pi R^2 F_i$ traverse la sphère de droite à gauche, où il est annulé par le flux du champ primitif.

Toutes les lignes de force aboutissent normalement à la surface de la sphère et en émanent normalement, sauf toutefois celles qui tombent sur l'équateur où la force est nulle; celles-ci font avec la normale un angle de 45°.

L'angle θ que fait le champ résultant avec l'axe des x a pour expression générale

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{Y}{X} = \frac{3}{2} \frac{R^3 \sin 2\alpha}{r^3 + R^3(3\cos^2\alpha - 1)} = \frac{3}{2} \frac{R^3 \sin 2\alpha}{r^3 - R^3 + 3R^3\cos^2\alpha}.$$

Pour un point P (fig. 31) très voisin de l'équateur C, on remplacera α par $90° - \varepsilon$ et $r^3 - R^3$ par $3R^2 dr$, ce qui donne, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{R\varepsilon}{dr} = \frac{CQ}{PQ} = \frac{1}{\operatorname{tang} \theta}, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} \theta = 1.$$

La surface de niveau au potentiel primitif V_0 du centre de la sphère est un plan qui aboutit à l'équateur et se prolonge

ensuite par la surface même de la sphère. L'équateur est une ligne singulière de cette surface de niveau et les deux nappes, en effet, doivent se couper à angle droit.

117. Sphère non isolée. — Si la sphère reste en communi-

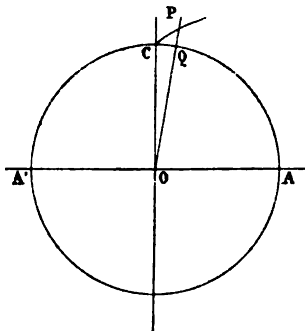


Fig. 31.

cation avec le sol, il suffit d'ajouter à la distribution précédente une couche uniforme $-Q'$ telle que son potentiel intérieur soit égal à $-V_0$; la densité correspondante $-\sigma'$ est

$$Q' = V_0 R = 4\pi R^2 \sigma'.$$

La densité résultante σ est alors

$$4\pi\sigma = 4\pi\sigma_0 \cos\alpha - \frac{V_0}{R} = 3F\cos\alpha - \frac{V_0}{R},$$

ce qui donne, pour le pôle A de la sphère,

$$4\pi R\sigma_a = 3FR - V_0.$$

Si on appelle V_1 et V_2 les potentiels primitifs aux pôles A' et A, on a

$$2V_0 = V_1 + V_2, \quad 2FR = V_1 - V_2,$$

$$4\pi R\sigma_a = \frac{1}{2}\Big[3(V_1 - V_2) - (V_1 + V_2)\Big] = V_1 - 2V_2.$$

Cette densité est négative et, par suite, la surface entière est négative quand $V_1 < 2V_2$.

Dans le cas contraire, la plus grande partie de la surface

est négative, mais il existe autour du pôle A une zone plus ou moins étendue d'électricité positive.

118. Sphère dans un champ quelconque. — Si le champ extérieur est produit par des masses distribuées d'une manière arbitraire, on pourra déterminer, par le principe des images (**113**), la couche d'électricité induite par chacune des masses extérieures q considérée isolément. Toutes ces couches combinées avec les masses correspondantes donnent encore un potentiel nul dans l'intérieur de la sphère et le système est en équilibre. Le problème de l'électrisation d'une sphère non isolée sera ainsi résolu, au moins en théorie, abstraction faite des difficultés que peut présenter le calcul.

Il suffit maintenant d'appliquer sur la sphère une couche homogène, dont la masse est égale et de signe contraire à la somme des masses de ces différentes couches, pour obtenir le résultat final qui convient à une sphère isolée.

Lorsque le phénomène est symétrique par rapport à un axe, le potentiel intérieur des couches induites peut être développé en série convergente des puissances positives de la distance r au centre, par une expression de la forme

$$V_i = A_0 + A_1 X_1 r + A_2 X_2 r^2 + \ldots..$$

De même, le potentiel extérieur s'exprimera par une série convergente des puissances négatives de r :

$$V_e = \frac{B_0}{r} + B_1 \frac{X_1}{r^2} + B_2 \frac{X_2}{r^3} + \ldots..$$

Les facteurs A et B sont des coefficients constants définis par la nature du phénomène; les quantités X_n sont les polynômes de Legendre, ou les fonctions harmoniques d'ordre 1, 2....., n de l'angle θ que fait le rayon vecteur avec l'axe de symétrie; ce sont des fonctions de la variable $\mu = \cos\theta$.

L'équation de Laplace devant s'appliquer à chacune des puissances, tant qu'on reste en dehors des masses agissantes, il en résulte la condition générale

$$n(n+1)X_n + \frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial X_n}{\partial\mu}\right] = 0.$$

Toutes les fonctions X_n étant égales à l'unité pour $\mu = 1$, on en déduit

$$\int_{\mu}^{1} X_n \, d\mu = \frac{1-\mu^2}{n(n+1)} \frac{\partial X_n}{\partial \mu} = \frac{1-\mu^2}{n(n+1)} X'_n.$$

Nous reviendrons plus tard sur ce problème.

SYSTÈMES CYLINDRIQUES.

119. Lignes électrisées. — Si l'on suppose que les masses électrisées sont distribuées suivant une série de droites parallèles indéfinies, avec une densité constante sur chacune d'elles, il est clair que la direction du champ en chaque point est située dans un plan perpendiculaire à ces droites. C'est le cas d'une *distribution cylindrique*, tous les corps du système étant des cylindres parallèles; il correspond, dans la théorie de la chaleur, au problème de la *propagation dans un plan*.

En prenant l'axe des z parallèle à la direction commune des génératrices, la température et le flux de chaleur, ou le potentiel et le champ électrique, ne dépendent plus que des coordonnés x et y. L'équation de Poisson se réduit alors à

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 4\pi\rho = 0.$$

Soit λ la densité d'une ligne électrisée, c'est-à-dire la charge par unité de longueur. Le champ F en un point ne dépend que la distance r à l'axe; le flux de force $4\pi\lambda$ qui traverse la surface latérale $2\pi r$ du cylindre de niveau ayant l'unité de hauteur est aussi égal à $F.2\pi r$, ce qui donne

$$F = \frac{2\lambda}{r}. \tag{1}$$

Le champ d'une ligne électrisée est donc en raison inverse de la distance, comme on l'avait vu déjà pour les condensateurs cylindriques (57).

Le flux de force émis par une ligne, pour l'unité de longueur, dans l'angle dièdre α est $2\alpha\lambda$. Si A et A' (fig. 22) sont les traces de deux lignes électrisées de densités λ et λ', le flux de force compris entre l'axe des x et le point P est la somme des flux $n = 2\lambda\alpha$ et $n' = 2\lambda'\alpha'$ correspondant aux angles α et α' des rayons vecteurs avec la droite A'A. L'équation de la ligne de force d'ordre N qui passe au point P est donc

$$N = n + n' = 2(\lambda\alpha + \lambda'\alpha'). \tag{2}$$

Si cette ligne de force émane du point A dans la direction θ, on a $N = 2\lambda\theta$ et, par suite,

$$\lambda\alpha + \lambda'\alpha' = \lambda\theta. \tag{3}$$

La direction α_0 de l'asymptote OL s'obtiendra encore en faisant $\alpha = \alpha' = \alpha_0$, ce qui donne

$$(\lambda + \lambda')\alpha_0 = \lambda\theta = \lambda\alpha + \lambda'\alpha'.$$

On aurait, de même, pour une série de droites parallèles situées dans un plan

$$\lambda\alpha + \lambda'\alpha' + \ldots\ldots = \lambda\theta = (\lambda + \lambda' + \ldots\ldots)\alpha_0.$$

Le potentiel d'une ligne électrisée est

$$V = -2\lambda \mathcal{L}.r + c^{te}. \tag{4}$$

C'est un potentiel *logarithmique;* il deviendrait infini sur la ligne elle-même, mais la conception des lignes électrisées, comme celle des points électrisés, ne correspond pas directement à un problème physique, puisque la densité superficielle serait infinie.

Si l'on suppose que la charge est répartie à densité constante σ sur un cylindre circulaire de rayon a, le champ extérieur est encore en raison inverse de la distance à l'axe et l'on doit remplacer la densité linéaire λ par $2\pi a\sigma$.

Le même raisonnement qu'au n° **14** montre que l'action intérieure de cette couche est nulle; le potentiel a donc une va-

leur constante V_0 sur le cylindre et sa valeur V en un point extérieur devient

$$V - V_0 = -2\lambda \mathfrak{L}.\frac{r}{a} = 4\pi a \sigma \mathfrak{L}.\frac{a}{r}.$$

Avec cette expression, le potentiel V serait nul à la distance r déterminée par la condition

$$\mathfrak{L}.\frac{r}{a} = \frac{V_0}{2\lambda} = \frac{V_0}{4\pi a \sigma},$$

et il continuerait à décroître jusqu'à l'infini, à mesure que la distance augmente, c'est-à-dire que la question ne répond pas

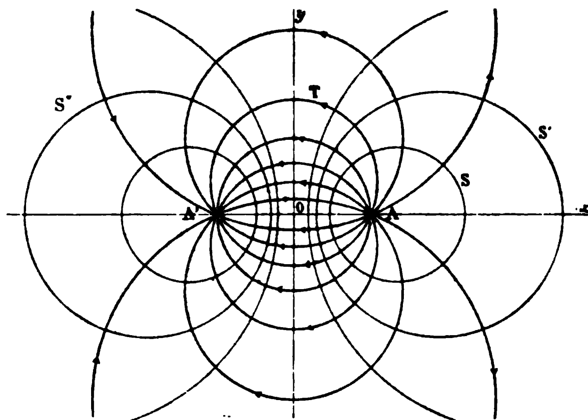


Fig. 32.

encore à un phénomène physique. Il en sera de même dans tous les cas, à moins que l'on ne fasse intervenir des masses électriques égales et de signes contraires, de façon que la charge totale du système soit nulle.

120. Images dans un cylindre circulaire. — Considérons un couple de deux lignes électrisées, de densités $+\lambda$ et $-\lambda$ égales et de signes contraires, dont les traces A et A′ (fig. 32) sont distantes de $2a$.

L'équation (3) des lignes de force devient alors

$$\alpha - \alpha' = \theta;$$

elle représente des arcs de circonférence tels que ATA' passant par les points A et A' et capables de l'angle θ.

En un point P dont les distances aux droites sont respectivement r et r', le potentiel est

$$V = 2\lambda \mathcal{L}.\frac{r'}{r}. \tag{5}$$

Ce potentiel est positif à droite du plan transversal Oy, nul sur ce plan et négatif à gauche.

Pour une même valeur de V, le rapport des distances est constant ; les surfaces de niveau ont pour sections droites des circonférences S, S',..... dont les centres se trouvent sur l'axe AA', et telles que les points A et A' sont conjugués par rapport à chacune d'elles.

Le champ résultant F est normal à la surface S correspondante. Les actions f et f' des lignes A et A' forment avec le champ F un triangle qui est dans tous les cas semblable au triangle PAA'.

En appelant k^2 la valeur du rapport $\frac{r'}{r}$ relative à une surface S de niveau de potentiel V, on a, d'une manière générale, comme pour la surface de potentiel nul (**106**) relative à deux masses égales et de signes contraires,

$$\frac{F}{2a} = \frac{f}{r'} = \frac{f'}{r}, \tag{6}$$

$$F = 2a\frac{2\lambda}{rr'} = 4a\lambda\frac{k^2}{r^2} = \frac{4a\lambda}{k^2 r'^2}.$$

Sur une surface de niveau quelconque, le champ est donc en raison inverse du carré de la distance à l'une ou l'autre des lignes conjuguées A ou A'.

Pour tous les points extérieurs à la surface S, on peut substituer à la ligne A une couche de masse λ par unité de longueur distribuée sur cette surface suivant une certaine loi. La densité en chaque point est encore en raison inverse du carré des distances r ou r', car elle est donnée par la relation

$$\sigma = \frac{F}{4\pi} = \frac{a\lambda}{\pi}\cdot\frac{k^2}{r'^2} = \frac{a\lambda}{\pi}\cdot\frac{1}{k^2 r'^2}.$$

Par cette substitution, le potentiel devient constant à l'intérieur de la surface S ; au dehors, il ne dépend que des lignes A et A' ; il reste fini, sauf dans le voisinage de la ligne A', et s'annule à une grande distance.

On peut dire encore que la ligne A de densité $+\lambda$ est l'*image* de la ligne A', de densité $-\lambda$, par rapport à un cylindre conducteur extérieur à la ligne A', limité à la surface S, ou même par rapport à un conducteur ayant une cavité limitée à une surface S'' dans laquelle se trouve la ligne A' ; on remarquera toutefois cette particularité que le potentiel n'est pas nul sur les conducteurs ainsi considérés.

Désignant par R le rayon de la circonférence S, par d et d' les distances des points A et A' au centre de la courbe S, on a, par les relations déjà établies (**111**),

$$(7) \qquad \frac{R}{k^2} = d = \frac{d'}{k^4} = \frac{2a}{k^4 - 1}.$$

Deux des cinq quantités k^2, d, d', R et $2a$, permettront de déterminer les trois autres. Il en résulte, en particulier,

$$(8) \qquad Rk^2 = a + \sqrt{a^2 + R^2}.$$

Réciproquement, la ligne A' de densité $-\lambda$ est l'image de la ligne A, de densité $+\lambda$, par rapport à un conducteur cylindrique limité par la surface S'' ou un conducteur dont la cavité est limitée par la surface S.

Enfin, deux quelconques de ces surfaces, S et S', peuvent être couvertes par les couches λ et $-\lambda$ ainsi définies. Le potentiel varie de V à V' dans l'espace compris entre ces surfaces ; il conserve la valeur constante V quand on traverse la surface S et la valeur constante V' quand on traverse S'. Ces couches représentent l'état électrique de deux conducteurs limités aux surfaces S et S', et dont la différence des potentiels est égale à $V - V'$.

121. Cylindre circulaire et plan parallèle. — Si l'on choisit, par exemple, le cylindre S et le plan transversal Oy, les distances r et r' sont toujours égales.

Ce plan est recouvert d'une couche d'électricité négative. La densité à la distance y du point O est

$$\sigma = -\frac{a\lambda}{\pi r^2} = -\frac{a\lambda}{\pi(a^2+y^2)}.$$

On vérifierait aisément que la charge $\int \sigma dy$ par unité de longueur parallèlement au cylindre est égale à $-\lambda$.

Le cylindre étant donné, si d_1 et d_2 sont les distances du plan aux extrémités du diamètre qui lui est perpendiculaire, la distance D du centre au plan peut s'écrire

$$D = R + d_1 = d + a = d' - a = d_2 - R.$$

La condition de conjugaison des points A et A′ donne alors

$$R^2 = dd' = (R + d_1 - a)(R + d_1 + a) = (R + d_1)^2 - a^2;$$
$$a^2 = (R + d_1)^2 - R^2 = d_1(2R + d_1) = d_1 d_2,$$
$$\sqrt{a^2 + r^2} = R + d_1 = d_2 - R = \frac{1}{2}(d_1 + d_2);$$

et, en substituant ces valeurs dans l'équation (8),

$$k^2 = \frac{d_1 + d_2 + 2\sqrt{d_1 d_2}}{2R}.$$

La capacité C du cylindre S par unité de longueur, en présence du plan, est donc

$$\frac{1}{C} = \frac{V}{\lambda} = 2\mathcal{L}.k^2 = 2\mathcal{L}.\frac{d_1 + d_2 + 2\sqrt{d_1 d_2}}{2R}.$$

Si la distance d_1 est très grande par rapport au diamètre du cylindre, ce qui correspondrait, par exemple, au cas d'un fil télégraphique à la distance d_1 du sol, il reste simplement

$$(9) \qquad \frac{1}{C} = 2\mathcal{L}.\frac{4d_1}{2R} = 2\mathcal{L}.\frac{2d_1}{R}.$$

122. Cylindres circulaires excentriques. — Si l'on consi-

dère deux cylindres excentriques S et S', de rayon R et R', la différence de leurs potentiels est

$$\frac{V - V'}{2\lambda} = \pounds . \frac{k^2}{k'^2} = \pounds . \frac{R'}{R} \frac{a + \sqrt{a^2 + R^2}}{a + \sqrt{a^2 + R'^2}}.$$

On peut remplacer a^2 par l'un des produits $d_1 d_2$ ou $d'_1 d'_2$ relatifs à l'un des cylindres, ou l'exprimer, en fonction de la distance δ des centres, par la relation

$$\delta = D - D' = \sqrt{a^2 + R^2} - \sqrt{a^2 + R'^2},$$

qui donne

$$4\delta^2 a^2 = (R'^2 - R^2 - \delta^2) - 4\delta^2 R^2 = [R'^2 - (R + \delta)^2][R'^2 - (R - \delta)^2],$$
$$4\delta^2 a^2 = (R' + R + \delta)(R' + R - \delta)(R' - R + \delta)(R' - R - \delta);$$

on a aussi

$$2\delta\sqrt{a^2 + R^2} = R'^2 - R^2 - \delta^2, \quad 2\delta\sqrt{a^2 + R'^2} = R'^2 - R^2 + \delta^2.$$

La capacité du système par unité de longueur devient alors

$$\frac{1}{C} = 2\pounds . \frac{R'}{R} \cdot \frac{R'^2 - R^2 - \delta^2 + 2\delta a}{R'^2 - R^2 + \delta^2 + 2\delta a}.$$

Lorsque la distance δ devient nulle, les cylindres étant concentriques, on retrouve la valeur obtenue déjà (57)

$$\frac{1}{C} = 2\pounds . \frac{R'}{R}.$$

Si l'on compare ce résultat avec l'équation (9), on voit que la capacité d'un cylindre en présence d'un plan est la même que s'il était entouré d'un cylindre concentrique de rayon double de sa distance au plan.

123. Cylindres isolés. — Remplaçant la surface de niveau S (fig. 33) qui entoure la ligne A de densité $+\lambda$ par un cylindre conducteur sur lequel la couche de masse λ est distribuée suivant la loi qui précède, appellons F_1 le champ au point P

et σ_1 la densité correspondante; on a $f'r' = 2\lambda$ et les équations (6) donnent

$$4\pi\sigma_1 = F_1 = f' \frac{2a}{r}.$$

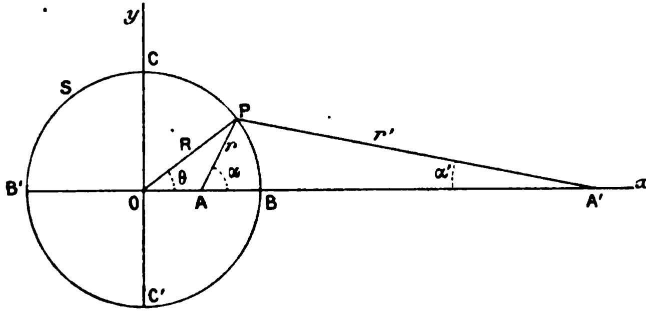


Fig. 33.

L'équilibre n'est pas détruit si l'on ajoute sur cette surface une couche homogène de masse $-\lambda$ par unité de longueur; la densité σ_2 de cette couche est

$$\sigma_2 = \frac{-\lambda}{2\pi R} = -f' \frac{r'}{4\pi R},$$

et la densité résultante σ a pour expression

$$4\pi\sigma = 4\pi(\sigma_1 + \sigma_2) = f'\left(\frac{2a}{r} - \frac{r'}{R}\right).$$

Ce problème correspond à l'électrisation d'un cylindre conducteur S maintenu isolé et placé dans le champ d'une ligne A' de densité $-\lambda$.

Les points neutres sont déterminés par l'intersection de la circonférence S avec la lemniscate $rr' = 2aR$ ou avec la circonférence ayant pour centre le point A et dont le rayon r est défini par l'équation

$$r^2 = R^2 \frac{2a}{d'}.$$

On peut encore écrire, en tenant compte de la relation

$$2a = r\cos\alpha + r'\cos\alpha',$$

$$4\pi\sigma = f'\left[\cos\alpha + r'\left(\frac{\cos\alpha'}{r} - \frac{1}{R}\right)\right] = f'\left[\cos\alpha + r'\,\frac{R\cos\alpha' - r}{Rr}\right].$$

Supposons maintenant que la ligne A′ s'éloigne indéfiniment, mais que sa densité augmente en même temps, de manière que le champ f' prenne une valeur *constante* F.

L'angle α' étant infiniment petit, le numérateur $R - r$ de la dernière fraction tend vers zéro et le facteur r' devient infini, mais cette expression a une limite; on a, en effet,

$$k^2 = \frac{r'}{r} = \frac{d'}{R} = \frac{d' - r'}{R - r},$$

$$r'\frac{R - r}{r} = d' - r' = R\cos\alpha = R\cos\theta.$$

Il en résulte, en appelant σ_0 la densité au point B,

$$F = 2\pi\frac{\sigma}{\cos\theta} = 2\pi\sigma_0.$$

La densité est nulle aux points C et C′. Les surfaces CBC′ et CB′C′ sont respectivement positives et négatives; la masse de chacune des couches par unité de longueur est

$$Q = 2R\sigma_0 = \frac{R}{\pi}F. \tag{10}$$

On peut imaginer encore que ces couches sont obtenues par la superposition de deux cylindres homogènes de densités uniformes $\pm\rho$ dont les axes sont à une distance infiniment petite δ telle que $\sigma_0 = \rho\delta$.

Le moment électrique m de ces deux cylindres par unité de longueur doit être le même que celui de couches $\pm Q$. En désignant par $2l$ la distance de leurs centres de gravité, on a

$$m = \pi R^2\rho.\delta = Q.2l, \qquad \pi R^2\sigma_0 = 2R.\sigma_0 2l;$$

$$l = \frac{\pi}{4}R.$$

Le flux de force émané de la couche $+Q$ est $4\pi Q = 4RF$. Le rayon R' du cylindre qui recevrait le même flux dans le champ primitif est $2R'F = 4RF$, ce qui donne $R' = 2R$. La présence du conducteur a pour effet de doubler le flux de force qui traverse le même espace.

Le champ étant nul dans l'intérieur du cylindre, l'action intérieure F_i des couches électriques est

$$F_i = -F = -2\pi\sigma_0. \tag{11}$$

Pour les points extérieurs on peut remplacer l'action des couches induites par celle de deux lignes électrisées, dont les

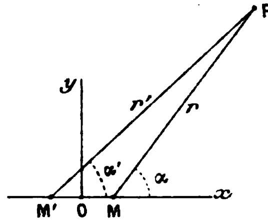


Fig. 34.

densités sont $\lambda' = \pm\pi R^2\rho$, situées en des points M et M' (fig. 34) à la distance infiniment petite δ.

En appelant r et r' les distances d'un point P aux points M et M', α et α' leurs angles avec la direction du champ, on a

$$r' - r = \delta\cos\alpha, \qquad r(\alpha - \alpha') = \delta\sin\alpha;$$

$$\frac{r'}{r} = 1 + \frac{r' - r}{r} = 1 + \frac{\delta}{r}\cos\alpha.$$

Le potentiel des couches au point P est donc

$$V = 2\lambda' \mathcal{L}.\frac{r'}{r} = 2\lambda'\frac{\delta}{r}\cos\alpha = \frac{2\pi R^2\sigma_0}{r}\cos\alpha,$$

$$V = \frac{R^2 F}{r}\cos\alpha.$$

Les lignes de niveau sont des circonférences passant par

l'origine O, dont les centres sont sur l'axe des x et dont le diamètre est en raison inverse du potentiel V.

Les lignes de force,

$$\theta = \alpha - \alpha' = \frac{\delta}{r} \sin\alpha,$$

sont aussi des circonférences passant par l'origine et dont les centres sont situés sur l'axe transversal Oy.

Les composantes, parallèle et perpendiculaire au rayon vecteur, du champ extérieur produit par ces couches sont

$$F_n = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{R^2 F}{r^2} \cos\alpha = -F_i \frac{R^2}{r^2} \cos\alpha,$$

$$F_t = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{R^2 F}{r^2} \sin\alpha = -F_i \frac{R^2}{r^2} \sin\alpha;$$

et les composantes parallèles aux axes

$$X_1 = F_n \cos\alpha - F_t \sin\alpha = \frac{R^2 F}{r^2} \cos 2\alpha,$$

$$Y_1 = F_n \sin\alpha + F_t \cos\alpha = \frac{R^2 F}{r^2} \sin 2\alpha.$$

Enfin les composantes du champ résultant sont

$$X = X_1 + F = F\left(1 + \frac{R^2}{r^2} \cos 2\alpha\right),$$

$$Y = Y_1 = F \frac{R^2}{r^2} \sin 2\alpha.$$

Les lignes de force du champ résultant sont encore normales au cylindre, à l'exception de celle qui passe au point C (fig. 33) et qui fait un angle de 45° avec la surface.

124. Fonctions conjuguées. — Dans un plan perpendiculaire à la direction commune des génératrices d'un système cylindrique, les surfaces de niveau forment des courbes d'égal potentiel V; les lignes de force correspondent aussi à une même valeur du flux φ, compté à partir de l'une d'elles, et

sont normales aux premières. Ces deux systèmes de lignes sont des *fonctions conjuguées* dans le plan.

Menons par un point P, où le champ est F, un élément ds_1 de la courbe de niveau, comptée dans le sens vers lequel le flux diminue, et un élément ds_2 de la ligne de force ; on a

$$F\,ds_1 = -d\varphi, \qquad F\,ds_2 = -dV;$$

$$\frac{d\varphi}{ds_1} = \frac{dV}{ds_2}, \qquad \text{ou} \qquad d\varphi\,ds_2 = dV\,ds_1.$$

Réciproquement, les lignes de force représentent les courbes de niveau d'un système conjugué, dans lequel les courbes de niveau primitives seraient les lignes de force. En dehors des masses agissantes, les fonctions V et φ satisfont toutes deux à l'équation de Laplace.

Si l'on trace une série de courbes s_1, qui correspondent à des potentiels en progression arithmétique

$$V = V_0 - kn$$

n représentant des nombres entiers successifs, et des lignes de force également en progression arithmétique

$$\varphi = \varphi_0 - k'n,$$

on aura

$$k'\,ds_2 = k\,ds_1.$$

Les deux systèmes ainsi définis se partagent le plan en une série de rectangles curvilignes.

Le flux qui correspond à l'intervalle de deux lignes de force, dans le premier cas, est

$$\frac{dV}{ds_2}\,ds_1 = d\varphi = -k',$$

et, dans le second cas,

$$\frac{d\varphi}{ds_1}\,ds_2 = dV = -k.$$

A tout système d'équilibre électrique correspond ainsi un état conjugué défini par les mêmes courbes.

Les propriétés des fonctions conjuguées et les transformations qu'elles comportent permettent ainsi de traiter un certain nombre de problèmes pour lesquels nous renverrons à l'ouvrage de Maxwell.

125. Cylindres elliptiques. — Considérons, comme exemple, un cylindre conducteur dont la section droite est l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{12}$$

L'équilibre a lieu quand la densité superficielle σ est définie par la couche comprise entre la surface et celle d'un autre cylindre homothétique (**51**) infiniment voisin, puisque le cylindre n'est qu'un cas particulier de l'ellipsoïde.

La perpendiculaire p abaissée du centre sur la tangente à l'ellipse est

$$\frac{1}{p^2}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}.$$

Si α est le rapport de similitude des sections droites et Q la charge par unité de longueur, on a encore

$$Q=\pi ab\left[(1+\alpha)^2-1\right]\rho=2\pi ab\rho\alpha=2\pi ab\,\frac{\sigma}{p}.$$

Les densités aux sommets des axes sont

$$\frac{\sigma_a}{a}=\frac{\sigma_b}{b}=\frac{Q}{2\pi ab}.$$

Enfin le potentiel intérieur est, à une constante près, en appelant u le rayon vecteur et ds un élément du contour,

$$V=-2\int\sigma\,ds\,\mathfrak{L}.u=-\frac{Q}{\pi ab}\int p\,ds\,\mathfrak{L}.u.$$

Pour un point extérieur P (x, y), l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1 \tag{13}$$

détermine deux valeurs de λ, l'une positive et l'autre négative.

Avec la première racine, cette équation représente l'ellipse de niveau qui passe par le point P; la racine négative donne l'hyperbole homofocale, qui est la ligne de force passant par le même point.

Entre deux lignes de niveau infiniment voisines dont la distance normale est dn, on a encore $d\lambda = 2pdn$; la variation de potentiel est

$$-dV = Q\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}},$$

et la capacité par unité de longueur du système formé par les cylindres correspondants

$$C = \frac{Q}{-dV} = \frac{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}}{d\lambda}.$$

Si l'on fait $\lambda = o$ et $d\lambda = a'^2 - a^2 = 2a(a'-a)$, on obtient, pour le cylindre primitif et un cylindre infiniment voisin,

$$(14) \qquad C = \frac{ab}{a'^2 - a^2} = \frac{b}{2(a'-a)}.$$

On peut maintenant remplacer les ellipses par les hyperboles homofocales et inversement. Le même problème convient donc au cas où les conducteurs seraient des cylindres à section hyperbolique.

CHAPITRE SEPTIÈME

CAS D'ÉQUILIBRE. — DIÉLECTRIQUES

126. Couches de glissement. — Lorsque la polarisation d'un corps est uniforme, il ne renferme pas d'électricité à l'intérieur et la densité σ de la couche superficielle est la projection normale $I \cos\theta$ de la polarisation. La surface du corps est partagée en deux régions de signes contraires : l'une d'elles, qui correspond aux points où la polarisation est dirigée vers l'extérieur, est positive ; l'autre est négative.

On peut imaginer encore, comme on l'a fait déjà pour une sphère conductrice électrisée par un champ uniforme (**116**), que cette couche est formée par la superposition de deux volumes limités par la surface S du corps, de densités électriques uniformes $+\rho$ et $-\rho$, d'abord superposés et dont le volume positif a glissé parallèlement à la polarisation d'une quantité très petite δ telle que $\rho\delta = I$. La région commune n'étant pas électrisée, il reste sur les surfaces deux couches, l'une positive et l'autre négative, dont l'épaisseur parallèle à la polarisation a une valeur constante δ ; en appelant $\pm\sigma_0$ la densité maximum aux points où la polarisation est normale, la densité en un point quelconque est alors

$$(1) \qquad \sigma = \rho . \delta \cos\theta = I \cos\theta = \sigma_0 \cos\theta.$$

Les couches superficielles ainsi formées peuvent s'appeler *couches de glissement*.

Le volume de chacune d'elles est le produit de l'épaisseur constante par la projection S′ de la surface du corps sur un

plan perpendiculaire à la polarisation ; la quantité correspondante Q d'électricité est donc

$$Q = S'\delta\rho = S'I = S'\sigma_0.$$

Enfin le moment électrique du corps est la somme des moments de tous les éléments de volume, puisque la polarisation est uniforme ; on a donc (87), en appelant v le volume total du corps,

$$(2) \qquad m = vI = v\sigma_0.$$

Cette manière de concevoir le phénomène permet d'obtenir le potentiel et le champ d'un corps uniformément polarisé, quand on connaît leurs valeurs pour un volume homogène limité par la même surface.

Prenant l'axe des x parallèle à la polarisation, soit P le potentiel en un point (x, y, z) d'une masse de densité cubique égale à l'unité, limitée par la surface S. Quand on fait glisser le corps d'une quantité δ, en sens inverse de la polarisation, l'abscisse du point P doit être remplacée par $x+\delta$ et le potentiel P' devient

$$P' = P + \frac{\partial P}{\partial x}\delta.$$

Ce potentiel doit être ici pris en signe contraire, puisqu'il correspond à une masse négative, de sorte que le potentiel final est

$$P - P' = -\frac{\partial P}{\partial x}\delta.$$

Si les densités cubiques sont $\pm\rho$, le potentiel de la couche de glissement a pour expression

$$(3) \qquad V = \rho(P - P') = -\sigma_0\frac{\partial P}{\partial x} = -I\frac{\partial P}{\partial x},$$

et les composantes du champ sont

$$(4) \qquad X = I\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad Y = I\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y}, \quad Z = I\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial z}.$$

Pour que le champ intérieur soit uniforme, il faut que les trois composantes aient des valeurs constantes, c'est-à-dire que le potentiel soit représenté par une fonction du second degré des coordonnées ; cette condition exige que la surface S soit elle-même du second degré.

Lorsque la polarisation est parallèle à l'un des axes, le champ intérieur F_i est dirigé suivant la même droite ; comme il va de la couche positive à la couche négative et qu'il est en tous cas proportionnel à l'épaisseur des couches ou à la polarisation, on peut écrire

$$F_i = -CI = -C\sigma_0. \tag{5}$$

L'induction est alors

$$F_i + 4\pi I = (4\pi - C)I$$

et la composante normale du champ extérieur, sur la surface,

$$F_n = (4\pi - C)I\cos\theta = (4\pi - C)\sigma.$$

Supposons qu'un diélectrique ainsi polarisé soit placé dans un champ uniforme F parallèle à la polarisation, et désignons par K le pouvoir inducteur du diélectrique ou, d'une manière plus générale,le rapport de ce pouvoir inducteur à celui du milieu extérieur. Le champ intérieur devient $F + F_i = F - CI$; la condition d'équilibre exige que le flux d'induction soit conservé, c'est-à-dire que l'on ait en chaque point de la surface

$$K(F - CI)\cos\theta = F\cos\theta + F_n = [F + (4\pi - C)I]\cos\theta.$$

Il en résulte

$$(6)\qquad \begin{cases} I = \dfrac{K - 1}{4\pi + (K - 1)C}F = HF, \\ F + F_i = \dfrac{4\pi}{4\pi + (K - 1)C}F = \dfrac{4\pi}{K - 1}I. \end{cases}$$

Si le corps était conducteur, on aurait $F + F_i = 0$ ou $CI = F$.

La polarisation est proportionnelle au produit du champ extérieur par le facteur H, qui devient égal à l'inverse de C pour les conducteurs. On peut dire encore que l'état de la surface

du diélectrique est celui d'un conducteur de même forme qui serait placé dans un champ moindre $F' = HCF$.

127. Sphère. — Pour une sphère dont le rayon est a et le volume $\frac{4}{3}\pi a^3 = v$, le potentiel extérieur de la masse homogène à la distance r est

$$P = \frac{v}{r}.$$

Le potentiel des couches de polarisation est alors, comme on l'a vu déjà (**116**),

$$V = -I\frac{\partial P}{\partial x} = I\frac{v}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = I v \frac{x}{r^3}.$$

Dans l'intérieur de la sphère homogène, l'action ne dépend que du noyau (**16**) et a pour valeur $\frac{4}{3}\pi\rho r$. Comme la valeur du potentiel au centre, pour l'unité de densité, est

$$\int_0^a \frac{4\pi r^2 dr}{r} = 4\pi\int_0^a r\,dr = 2\pi a^2,$$

il en résulte

$$P = 2\pi a^2 - \frac{2}{3}\pi r^2,$$

$$V = I\frac{4}{3}\pi r\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{4}{3}\pi I x,$$

$$X_i = F_i = -\frac{4}{3}\pi I.$$

Le coefficient C est égal à $\frac{4\pi}{3}$; si la sphère est placée dans un champ uniforme, on obtient alors

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &H = \frac{3}{4\pi}\cdot\frac{K-1}{K+2}, \qquad I = \frac{3}{4\pi}\cdot\frac{K-1}{K+2}F,\\ &V = a^3\frac{K-1}{K+2}F\frac{x}{r^3}, \qquad F + F_i = \frac{3}{K+2}F,\\ &m = \frac{4}{3}\pi a^3 I = \frac{4\pi}{3}a^3 HF = a^3\frac{K-1}{K+2}F.\end{aligned}\right.$$

Le flux total d'induction intérieure, lequel est égal au flux de force extérieure, a pour expression

$$\pi a^2 K(F + F_i) = \pi a^2 \frac{3K}{K+2} F.$$

Le rayon R du cercle qui correspondrait au même flux dans le champ primitif est

$$R^2 = a^2 \frac{3K}{K+2}.$$

A l'extérieur de la sphère, les composantes du champ résultant à la distance r, dans une direction qui fait l'angle α avec l'axe des x, sont

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \left[1 + \frac{K-1}{K+2} \cdot \frac{a^3}{r^3}(3\cos^2\alpha - 1)\right] F, \\ Y &= \frac{3}{2} \cdot \frac{K-1}{K+2} \frac{a^3}{r^3} \sin 2\alpha . F. \end{aligned} \right.$$

La composante Y est nulle aux pôles et sur l'équateur. Au voisinage du pôle, le champ extérieur est égal à l'induction intérieure, c'est-à-dire

$$F_1 = K(F + F_i) = \frac{3K}{K+2} F.$$

Près de l'équateur, où l'angle α est droit, la valeur du champ est

$$F_2 = \left(1 - \frac{K-1}{K+2}\right) F = \frac{3}{K+2} F.$$

Dans le cas actuel, les lignes de force extérieures ne sont plus normales à la surface de la sphère. On vérifierait aisément que les composantes tangentielles sont égales de part et d'autre de la surface et que les angles θ et α de la normale avec les lignes de force à l'extérieur et à l'intérieur satisfont à la loi de réfraction (92)

$$\tan\alpha = K \tan\theta.$$

Sur l'équateur, l'angle θ est aussi droit; les lignes de force sont alors tangentes à la surface.

Si la sphère de pouvoir inducteur spécifique K_2 est située dans un diélectrique de pouvoir inducteur K_1, ces formules deviennent

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} I &= \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{K_2 - K_1}{K_2 + 2K_1} F, \\ F_1 &= \frac{3K_2}{K_2 + 2K_1} F, \\ F_2 &= \frac{3K_1}{K_2 + 2K_1} F. \end{aligned} \right.$$

128. Hypothèse de Poisson. — On peut maintenant examiner de plus près l'hypothèse de Poisson, adoptée par Faraday pour l'électricité (**85**), laquelle consiste à concevoir un diélectrique comme formé de petits conducteurs sphériques disséminés dans un milieu isolant.

Supposons, d'une manière plus générale, qu'une sphère diélectrique de rayon très petit a_1, située dans un champ quelconque au point où l'intensité est F, soit entourée d'un milieu également diélectrique; le champ intérieur de la couche induite est

$$F_i = -\frac{K_2 - K_1}{K_2 + 2K_1} F,$$

et son potentiel extérieur

$$I v \frac{x}{r^3} = -\frac{a_1^3}{r^2} F_i \cos\alpha = \frac{a_1^3}{r^2} \frac{K_2 - K_1}{K_2 + 2K_1} F \cos\alpha.$$

Comme l'action extérieure, toutes choses égales, est en raison inverse du cube de la distance, on peut admettre, avec Poisson, que l'électrisation de chacune des sphères n'est pas modifiée par l'influence des sphères voisines et ne dépend que de l'intensité du champ. Si l'on considère alors une sphère de rayon a, petit en valeur absolue mais très grand par rapport à a_1, et qui contienne un nombre n des précédentes, le potentiel V du système à une distance r, notable par rapport

au rayon a, est la somme des potentiels relatifs à chacune d'elles, avec les mêmes valeurs de r et de α.

En désignant par h le rapport $\frac{na_1^3}{a^3}$ de l'espace occupé par l'ensemble des petites sphères au volume de la plus grande, on peut donc écrire

$$V = \frac{na_1^3}{r^2} \cdot \frac{K_2 - K_1}{K_2 + 2K_1} F \cos\alpha = \frac{ha^3}{r^2} \frac{K_2 - K_1}{K_2 + 2K_1} F \cos\alpha.$$

Si la sphère a était homogène et de pouvoir inducteur K, son potentiel serait

$$V = \frac{a^3}{r^2} \cdot \frac{K - K_1}{K + 2K_1} F \cos\alpha.$$

Les deux systèmes sont équivalents pour la condition

$$h \frac{K_2 - K_1}{K_2 + 2K_1} = \frac{K - K_1}{K + 2K_1},$$

$$K = K_1 \frac{K_2 + 2K_1 + 2h(K_2 - K_1)}{K_2 + 2K_1 - h(K_2 - K_1)} \tag{10}$$

Si l'on admet que les petites sphères soient conductrices, il en résulte, en faisant K_2 infini,

$$K = K_1 \frac{1 + 2h}{1 - h}.$$

Enfin, si le milieu extérieur est de l'air, auquel cas la valeur de K_1 est sensiblement égale à l'unité, il reste

$$K = \frac{1 + 2h}{1 - h}, \qquad h = \frac{K - 1}{K + 2}.$$

Pour les diélectriques ordinaires, dont le pouvoir inducteur est voisin de 2, on aurait $4h = 1$.

Ce résultat approché peut donner une idée du degré d'exactitude que comporte l'hypothèse de Poisson. L'action extérieure des sphères a_1 n'est pas négligeable lorsque l'espace qu'elles occupent est le quart du volume total.

D'autre part, le rapport maximum de l'espace occupé par des sphères qui se touchent au volume total de l'ensemble est égal à $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$ ou environ $\frac{3}{4}$. Si les sphères sont écartées de manière que ce rapport soit réduit à un quart, la distance r des centres des plus voisines est

$$\frac{r}{2a_1}=\sqrt[3]{3}, \qquad 2\frac{a_1^3}{r^3}=\frac{1}{12}.$$

L'action exercée par la couche électrique de l'une des sphères sur la plus voisine peut donc atteindre la valeur

$$2\frac{a_1^3}{r^3}F_i=\frac{F_i}{12}.$$

et le champ intérieur F_i est égal à $-F$ lorsque les sphères a_1 sont conductrices.

Il est vrai que, si l'action réciproque des sphères tend à augmenter l'électrisation de celles qui sont situées dans une direction parallèle au champ, elle tend à la diminuer pour celles qui se trouvent dans une direction normale, de sorte qu'on peut rester assez près de la vérité en admettant que l'influence réciproque est négligeable.

129. Action d'un champ sur un corps de petites dimensions. — Dans un champ non uniforme, l'électrisation d'une sphère de très petites dimensions dont le moment est $m=\nu HF$, équivaut à deux masses $\pm q$ à une distance infiniment petite δ telle que $q\delta=m=\nu HF$.

Si l'on suppose que cette sphère soit amenée d'un point très éloigné et qu'on appelle V_1 et V_2 les potentiels du champ aux points où se trouvent les masses $-q$ et $+q$, l'énergie de la sphère dans le champ est (66)

$$W=\frac{1}{2}\int qV=-\frac{q}{2}(V_1-V_2)=-\frac{mF}{2}=-\frac{H\nu}{2}F^2,$$

Lorsque la sphère est abandonnée à elle-même, son énergie tend à diminuer; elle est donc sollicitée à marcher dans la direction vers laquelle la valeur de F^2 augmente, et suivant

le chemin où cette variation est la plus rapide. Les composantes X, Y et Z de l'action qu'elle subit sont

$$X=\frac{H\varphi}{2}\frac{\partial F^2}{\partial x}, \qquad Y=\frac{H\varphi}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y}, \qquad Z=\frac{H\varphi}{2}\frac{\partial F^2}{\partial z}.$$

Il en résulte le théorème suivant :

Dans un champ non uniforme, la force électrique ne peut avoir une valeur maximum en aucun point situé en dehors des masses agissantes.

Nous avons vu, en effet (**43**), qu'un corps électrisé ne peut être en équilibre stable dans un champ non uniforme. Comme une sphère infiniment petite ne peut être en équilibre stable qu'aux points où la valeur de F^2, c'est-à-dire celle de F, est un maximum absolu, il en résulte que cette circonstance ne peut se présenter pour aucun point situé en dehors des masses agissantes.

Le même raisonnement s'applique au mouvement d'un corps très petit de forme quelconque qui conserve toujours la même direction par rapport aux lignes de force. Ce corps, en effet, s'électrise proportionnellement à l'intensité du champ au point où il est placé et la variation d'énergie est proportionnelle à la variation du carré du champ.

Indépendamment de ce mouvement de transport, un corps non sphérique tend à tourner sur lui-même de manière que, pour un équilibre stable autour de son centre de gravité, l'énergie électrique ait une valeur minimum et l'électrisation une valeur maximum.

Tel est, d'après lord Kelvin, le sens véritable des attractions produites sur les corps légers de petites dimensions dans un champ électrique, au moins tant qu'ils n'ont pas été électrisés directement par contact. Ces corps, conducteurs ou non, se déplacent vers les points où la force est maximum en valeur absolue et, s'ils sont abandonnés à eux-mêmes, ils finiront par aboutir aux surfaces électrisées. S'ils étaient mobiles dans un milieu où une résistance étrangère maintiendrait la vitesse très petite, ils marcheraient vers les corps électrisés en suivant, non pas une ligne de force, mais une ligne de variation maximum de la force; dans certains cas, où le corps est sou-

mis à des liaisons, ce mouvement peut même se faire perpendiculairement à la force.

Le corps est en équilibre aux points pour lesquels on a

$$dF^2 = F\,dF = 0.$$

Cette condition peut être réalisée par $F = 0$ ou $dF = 0$, c'est-à-dire quand le champ est nul, maximum ou minimum, ou stationnaire. Il y a équilibre, en particulier, dans un champ uniforme, ce qui était évident *a priori*; l'équilibre est alors indifférent. Dans un champ non uniforme, l'équilibre est stable aux points où la force est maximum, c'est-à-dire sur les corps électrisés; l'équilibre est instable aux points de minimum ou de champ nul.

Supposons, par exemple, qu'une petite sphère, formée par un corps conducteur ou diélectrique, soit astreinte à se mouvoir sur l'axe transverse PP′ (fig. 23) du système formé par deux masses égales et de même signe (**104**). Cette sphère sera en équilibre instable au centre O, où la force est nulle, en équilibre stable aux points D et D′ où la force est maximum; elle tendra donc à se fixer à l'un de ces points, en se mouvant dans une direction perpendiculaire aux lignes de force. Si elle a été placée d'abord entre les points O et D, elle semblera ainsi *repoussée* par les masses électriques.

Au contraire, si la sphère est mobile sur l'axe transverse Oy (fig. 24) de deux masses égales et de signes différents, le centre O est un maximum de force. La sphère y sera en équilibre et tendra à y revenir, en cheminant encore dans une direction perpendiculaire aux lignes de force; elle paraîtra donc *attirée* par un système de deux masses électriques égales et de signes contraires.

130. Aiguille diélectrique dans un champ non uniforme. — Imaginons que, sur une sphère chargée par des couches de glissement, on fasse agir un champ uniforme F faisant avec l'axe de polarisation l'angle θ; le couple produit par l'action du champ sera

$$Fq\delta\cos\theta = Fm\cos\theta.$$

Le moment électrique m est donc le couple que subirait cette

sphère dans un champ égal à l'unité dont la direction serait perpendiculaire à l'axe de polarisation.

Si l'on adopte l'idée de Poisson et de Faraday sur la constitution des diélectriques et qu'on les considère comme formés de sphères conductrices disséminées dans un milieu isolant; si l'on admet, en outre, que l'électrisation de chacune d'elles n'est pas modifiée par les voisines, le moment électrique d'un corps de forme quelconque dans un champ uniforme est la somme des moments de tous les éléments de volume dv, c'est-à-dire encore vHF, comme pour la sphère.

Avec cette hypothèse, un corps de forme quelconque dans un champ uniforme serait en équilibre par rapport à son centre de gravité, quelle que fût sa direction.

Dans un champ non uniforme, au contraire, un corps fixé par son centre de gravité tend à prendre une certaine direction. Chaque élément de volume dv n'étant soumis qu'au champ, si l'on néglige les réactions, tend à se porter vers les points où la force augmente et les composantes de la force qu'il subit sont

$$dX = \frac{H}{2}\frac{\partial F^2}{\partial x}dv, \quad dY = \frac{H}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y}dv, \quad dZ = \frac{H}{2}\frac{\partial F^2}{\partial z}dv.$$

Supposons que le corps puisse tourner autour de l'axe des z et prenons pour axe des x la direction de la composante du champ F_0 au centre de gravité O, laquelle est ainsi perpendiculaire à l'axe de rotation.

Soit dv un élément de volume situé au point M (x, y, z), r la projection de son rayon vecteur sur le plan xy et θ l'angle de ce rayon vecteur avec l'axe des x.

Si les dimensions du corps ne sont pas trop grandes, le carré $X^2 + Y^2$ de la composante efficace du champ peut être représenté par une expression de la forme

$$X^2 + Y^2 = F_0^2 + Ax + By + Cz = F_0^2 + r(A\cos\theta + B\sin\theta) + Cz$$

et l'énergie du corps devient

$$W = -\frac{H}{2}\int [Z^2 + F_0^2 + r(A\cos\theta + B\sin\theta) + Cz]\,dv.$$

Le couple C de rotation autour de l'axe des z est (69)

$$C = \frac{H}{2} \int r(B\cos\theta - A\sin\theta)\, dv,$$

et la condition d'équilibre

$$\int r(B\cos\theta - A\sin\theta)\, dv = 0.$$

La variation du couple relative à l'angle $d\theta$ est

$$dC = -\frac{H}{2}\, d\theta \int r(A\cos\theta + B\sin\theta)\, dv.$$

L'angle θ étant déterminé par la condition d'équilibre, si D est la densité du corps, son moment d'inertie relatif à l'axe des z est $D\int r^2 dv$; la durée t des oscillations simples infiniment petites est donnée par l'équation

$$t^2 = \pi^2 \frac{2}{H} D \frac{\int r^2 dv}{\int r(A\cos\theta + B\sin\theta)\, dv}.$$

Supposons que le corps soit une aiguille infiniment mince; l'angle θ est alors commun à tous les éléments de volume et la condition d'équilibre se réduit à

$$\frac{A}{\cos\theta} = \frac{B}{\sin\theta} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

L'angle θ ainsi déterminé correspond à la direction suivant laquelle la variation du champ est maximum dans le plan de xy. On en déduit

$$A\cos\theta + B\sin\theta = \sqrt{A^2 + B^2}$$

et la durée des oscillations simples infiniment petites devient

$$t^2 = \pi^2 \frac{2}{H} \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \frac{\int r^2 dv}{\int r\, dv}.$$

Lorsque l'aiguille est de section constante, le dernier facteur déterminé par le rapport des deux intégrales est le tiers de la longueur l, ce qui donne finalement

$$t^2 = \frac{2}{3}\pi^2 \frac{lD}{H\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Ainsi, une aiguille diélectrique pouvant tourner librement autour de son centre de gravité, dans un champ non uniforme, ne se place pas suivant la direction du champ, mais suivant la ligne de plus grande variation ; le carré de la durée des oscillations n'est pas simplement en raison inverse du champ, puisqu'il dépend des coefficients de variation, et il est proportionnel, toutes choses égales, à la longueur de l'aiguille.

Le problème présente un intérêt particulier lorsque le champ est symétrique par rapport au point où se trouve l'aiguille. Supposons, par exemple, que l'aiguille soit placée au milieu O de la distance AA′ (fig. 24) de deux masses égales et de signes contraires (**106**), et qu'elle puisse osciller autour d'une droite perpendiculaire à AA′. Dans le plan d'oscillation, le champ au point O est un minimum pour la direction Ox, et un maximum pour une direction perpendiculaire Oy. La valeur du champ en un point voisin pourra donc s'écrire

$$F^2 = F_0^2 + Ax^2 - By^2 = F_0^2 + r^2(A\cos^2\theta - B\sin^2\theta).$$

Le couple de rotation est

$$C = -H(A+B)\sin\theta\cos\theta \int r^2\,dv.$$

L'équilibre a lieu pour les deux directions $\theta = 0$ et $\theta = 90°$; la première correspondant à un équilibre stable, et la seconde à un équilibre instable.

On a alors

$$\frac{dC}{d\theta} = -H(A+B)\cos 2\theta \int r^2\,dv,$$

ce qui donne, pour la durée des oscillations,

$$t^2 = \frac{\pi^2 D}{H(A+B)}.$$

Cette durée est indépendante de la longueur de l'aiguille et même de sa forme; elle ne dépend que de la densité de la matière, de son pouvoir inducteur spécifique et de la loi de la variation du champ.

Dans le cas considéré du champ produit par deux masses $\pm q$ à la distance $2a$, les composantes principales F_1 et F_2, pour des distances très petites x et y, se réduisent à

$$F_1 = 2q\frac{a^2+x^2}{(a^2-x^2)^2} = \frac{2q}{a^2}\left(1+3\frac{x^2}{a^2}\right),$$

$$F_2 = 2q\frac{a}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2q}{a^2}\left(1-\frac{3}{2}\frac{y^2}{a^2}\right);$$

il en résulte

$$A = 6\left(\frac{2q}{a^3}\right)^2, \quad B = 3\left(\frac{2q}{a^3}\right)^2.$$

Si le champ est tel que les coefficients de variation soient de même signe pour les deux coordonnées, on changera le signe de B. L'équilibre a lieu encore pour la direction suivant laquelle la variation est maximum. Tel serait le champ de deux masses égales et de même signe (**104**); on a alors

$$F_1 = \frac{4q}{a^3}x, \quad F_2 = \frac{2q}{a^3}y,$$

$$A = 4\left(\frac{2q}{a^3}\right)^2, \quad B = \left(\frac{2q}{a^3}\right)^2$$

Le champ F_0 est alors nul au point O (fig. 23) et l'équilibre a lieu suivant la direction des deux masses agissantes.

Dans ce cas, la différence $A-B$ est le tiers de la valeur précédente de $A+B$. Toutes choses égales, le couple est trois fois plus faible et la durée des oscillations est augmentée dans le rapport de 1 à $\sqrt{3}$.

131. Aiguille conductrice. — Un corps conducteur se comporte d'une manière toute différente, car on ne peut plus admettre que l'électrisation des éléments soit indépendante. Considérons, par exemple, une aiguille infiniment petite, afin que l'électrisation puisse être supposée identique à celle qui se produirait dans un champ uniforme.

L'aiguille est en équilibre dans une direction normale à la direction du champ, mais il est évident qu'alors l'électrisation est minimum et que l'équilibre est instable.

Lorsque l'aiguille est oblique au champ, les deux couches électriques positive et négative sont symétriques par rapport au centre, et l'action du champ produit évidemment un couple qui tend à diriger l'aiguille suivant une ligne de force.

La loi de distribution ne dépend que de la forme de l'aiguille et les masses électriques sont proportionnelles à l'intensité du champ. Par suite, le moment du couple qui agit sur l'aiguille, pour une déviation déterminée de la position d'équilibre, est proportionnel au carré F^2 du champ. Enfin la durée des oscillations est en raison inverse du champ et l'on peut écrire

$$t = \frac{A}{F}\sqrt{D}.$$

La constante A dépend du rapport des dimensions longitudinale et transversale de l'aiguille.

132. Ellipsoïdes polarisés. — Le potentiel intérieur d'un ellipsoïde homogène de densité égale à l'unité est (**52**)

$$P = P_0 - \frac{1}{2}(Lx^2 + My^2 + Nz^2).$$

Si l'ellipsoïde est polarisé parallèlement à l'un des axes principaux, l'axe des x, par exemple, ou recouvert d'une couche de glissement de densité maximum $\sigma_0 = I$, le potentiel intérieur est

$$V_i = -I\frac{\partial P}{\partial x} = ILx.$$

Le champ intérieur est encore constant, de direction opposée à celle de la polarisation, et a pour valeur

$$F_i = -LI.$$

La valeur générale de la constante C relative à la couche de glissement (126) est donc égale à l'un des coefficients L, M ou N, suivant que la polarisation est parallèle à l'un ou l'autre des axes principaux.

La densité σ sur un point de la surface est la projection normale $I\cos\theta$ de la polarisation ou, en appelant p la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent au point considéré (51),

$$\sigma = I\cos\theta = I\frac{px}{a^2};$$

la masse de chaque couche est $Q = \pi bcI$, et le moment électrique de l'ellipsoïde

$$m = \nu I = -\nu\frac{F_i}{L} = Q\frac{4a}{3}.$$

Le centre de gravité des couches $\pm Q$ est donc aux deux tiers du demi-axe, comme pour la sphère.

La distribution est d'ailleurs la même dans les deux cas. En effet, la charge d'une zone correspondant à dx est le produit de I par la différence dS des sections de l'ellipsoïde perpendiculaire à l'axe, aux distances x et $x + dx$.

La section S à la distance x est

$$S = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

ce qui donne

$$dS = -\frac{2\pi bc}{a}x\,dx.$$

La charge par unité de longueur de l'axe est donc

$$\frac{dQ}{-dx} = \frac{2\pi bc}{a}Ix.$$

Cette charge, que l'on peut appeler densité *linéaire* suivant l'axe de polarisation, est proportionnelle à la distance au

centre et, par suite, son centre de gravité se trouve aux deux tiers du rayon a.

133. Induction par un champ uniforme. — Un ellipsoïde diélectrique placé dans un champ uniforme F parallèle à l'axe principal a prend donc une polarisation uniforme I. En appelant K le rapport du pouvoir inducteur spécifique de l'ellipsoïde au pouvoir inducteur du milieu extérieur, on a, par les équations (6),

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} &H = \frac{K-1}{4\pi + (K-1)L}, \qquad I = HF, \\ &F_i = -LI = -\frac{(K-1)L}{4\pi + (K-1)L} F, \\ &F + F_i = \frac{4\pi}{4\pi + (K-1)L} F. \end{aligned} \right.$$

Lorsque l'ellipsoïde est conducteur, il reste simplement

$$I' = \sigma_0 = \frac{F}{L}.$$

Il en serait de même, avec les coefficients M ou N, pour un champ parallèle aux autres axes.

Supposons maintenant que le champ extérieur fasse avec les axes des angles dont les cosinus sont α, β et γ.

En remplaçant le champ par ses composantes principales $F\alpha$, $F\beta$ et $F\gamma$, chacune d'elles produira une polarisation suivant l'axe correspondant et la condition d'équilibre est réalisée, le flux d'induction se conservant au travers d'un élément de surface.

Si l'on superpose les trois états, l'équilibre n'est pas troublé, puisque le flux d'induction résultant est la somme des flux relatifs à chacun d'eux.

Le champ intérieur est encore uniforme, car il est la superposition de trois champs uniformes, et la polarisation résultante est uniforme.

Désignant par α', β', γ' les cosinus directeurs de la polarisation, par A, B et C les valeurs des coefficients H, suivant

qu'on y remplace la constante C par l'un des coefficients L, M et N, on aura

$$(12)\quad \begin{cases} \mathrm{I}\alpha' = A\mathrm{F}\alpha, \quad \mathrm{I}\beta' = B\mathrm{F}\beta, \quad \mathrm{I}\gamma' = C\mathrm{F}\gamma; \\ \dfrac{A\alpha}{\alpha'} = \dfrac{B\beta}{\beta'} = \dfrac{C\gamma}{\gamma'} = \dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{F}} = \sqrt{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + C^2\gamma^2} = \mathrm{H}'. \end{cases}$$

On connaît ainsi la polarisation résultante I et ses cosinus directeurs en fonction du champ et de sa direction.

Le moment électrique de l'ellipsoïde est parallèle à la polarisation I et a pour valeur

$$m = v\mathrm{I} = v\mathrm{H}'\mathrm{F}.$$

Si l'ellipsoïde est conducteur, il suffit de remplacer A, B et C par les inverses des coefficients L, M et N, ce qui donne

$$\frac{\alpha}{\mathrm{L}\alpha'} = \frac{\beta}{\mathrm{M}\beta'} = \frac{\gamma}{\mathrm{N}\gamma'} = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{F}} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\mathrm{L}^2} + \frac{\beta^2}{\mathrm{M}^2} + \frac{\gamma^2}{\mathrm{N}^2}}.$$

134. Action du champ. — L'angle ε que fait la direction du champ avec celle de la polarisation est

$$\cos\varepsilon = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = \frac{A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2}{\mathrm{H}'}.$$

Le couple G produit par l'action du champ sur l'ellipsoïde est

$$\mathrm{G} = m\mathrm{F}\sin\varepsilon = v\mathrm{H}'\mathrm{F}^2\sin\varepsilon = v\mathrm{H}'\mathrm{F}^2\sqrt{1 - \cos^2\varepsilon},$$
$$\mathrm{G}^2 = v^2\mathrm{F}^4\left[A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + C^2\gamma^2 - (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2)^2\right].$$

Comme le facteur H′ est essentiellement positif, l'équilibre exige que l'angle ε soit nul, c'est-à-dire que le champ soit parallèle à l'un des axes.

La valeur de G^2 peut d'ailleurs s'écrire sous la forme d'une somme de carrés,

$$\mathrm{G}^2 = v^2\mathrm{F}^4\left[\alpha^2\beta^2(A - B)^2 + \beta^2\gamma^2(B - C)^2 + \gamma^2\alpha^2(C - A)^2\right],$$

et le second membre ne peut être nul que si deux des cosinus

directeurs, α, β et γ, sont nuls, auquel cas le champ est parallèle à l'un des axes.

Lorsque le champ est perpendiculaire à l'axe des z, $\gamma = 0$ e le couple de rotation devient

$$G = \nu F^2 \alpha \beta (A - B),$$

Comme les valeurs des coefficients L, M et N varient en sens inverse des axes correspondants, si ces axes sont rangés dans l'ordre habituel $a > b > c$, on a aussi $A > B > C$.

En appelant θ l'angle que fait la direction du champ avec l'axe des x, on peut écrire

$$G = \frac{\nu F^2}{2} (A - B) \sin 2\theta.$$

L'ellipsoïde est en équilibre stable lorsque son grand axe est parallèle au champ.

Il en est de même si l'ellipsoïde est astreint à tourner autour de l'axe des z et que F désigne la projection du champ sur le plan des xy.

Lorsque les déviations sont très petites, le couple devient

$$G = \nu F^2 (A - B) \theta.$$

Abandonné à lui-même, l'ellipsoïde exécute des oscillations isochrones. En appelant D la densité de la matière et ρ le rayon de giration, le moment d'inertie est $\nu D \rho^2$, ce qui donne, pour la durée des oscillations simples,

$$t = \pi \frac{\rho}{F} \sqrt{\frac{D}{A - B}}.$$

On peut encore considérer le problème d'une autre manière. L'énergie potentielle de l'ellipsoïde dans le champ (**129**) a pour expression

$$W = -\frac{m}{2} F \cos\varepsilon = -\frac{\nu F^2}{2} H' \cos\varepsilon = -\frac{\nu F^2}{2} (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2).$$

L'équilibre stable correspond au cas où l'énergie poten-

tielle est minimum, ou $\alpha = 1$, c'est-à-dire quand le grand axe est parallèle au champ.

On retrouverait ainsi pour les composantes du couple G, comptées dans le sens des permutations des coordonnées,

$$\nu F^2 \beta \alpha (B - A), \quad \nu F^2 \gamma \beta (C - B), \quad \nu F^2 \alpha \gamma (A - C).$$

135. Milieux limités par des sphères concentriques. — La considération des couches de glissement permet encore de trouver l'induction produite par un champ uniforme F sur un diélectrique compris entre les surfaces S′ et S″ de deux sphères concentriques dont les rayons sont a' et a''. Soient K′ et K″ les rapports du pouvoir inducteur spécifique de ce diélectrique aux pouvoirs inducteurs du noyau central et du milieu extérieur.

Désignons par F′ et F″ les champs intérieurs produits par des couches de glissement parallèles au champ, distribuées sur les surfaces S′ et S″.

A l'extérieur de la surface S′, la composante normale produite par la couche correspondante (**116**) est égale à $-2F'\cos\alpha$. La condition d'équilibre sur cette surface est donc

$$(F + F' + F'')\cos\alpha = K'(F + F'' - 2F')\cos\alpha,$$

$$(13) \qquad (2K' + 1)F' - (K' - 1)F'' = (K' - 1)F.$$

Sur la surface S″, la composante normale de la couche S′ est $-2\left(\frac{a'}{a''}\right)^3 F'\cos\alpha = -2\beta F'\cos\alpha$, en appelant β le rapport des cubes des rayons, et l'action extérieure de la couche S″ est $-2F''\cos\alpha$. La condition d'équilibre donne

$$K''(F + F'' - 2\beta F') = F - 2F'' - 2\beta F',$$

$$(14) \qquad 2\beta(K'' - 1)F' - (K'' + 2)F'' = (K'' - 1)F.$$

Les équations linéaires (13) et (14) déterminent les valeurs de F′ et F″ et, par suite, les couches de glissements correspondantes. La même méthode s'appliquerait à un nombre quelconque de surfaces concentriques, puisque chacune d'elles introduit une inconnue et une condition.

Si l'on se borne au cas de deux surfaces, on en déduit

$$\frac{F'}{3(K'-1)} = \frac{-F''}{(K''-1)[2K'+1-2\beta(K'-1)]}$$
$$= \frac{F}{(2K'+1)K''+2)-2\beta(K'-1)(K''-1)},$$

équations qu'on peut écrire

$$\frac{F'}{3(K'-1)} = \frac{-F''}{(K''-1)[3+2(1-\beta)(K'-1)]}$$
$$= \frac{F}{3(2K'+K'')+2(1-\beta)(K'-1)(K''-1)}.$$

Comme le facteur β est plus petit que l'unité, on voit que F' est positif et F'' négatif; les deux couches sont donc de signes contraires. En d'autres termes, la polarisation du milieu intermédiaire est dirigée dans le sens du champ. Les valeurs de cette polarisation sur l'axe, aux points de rencontre des surfaces S' et S'' sont

$$I' = -\frac{3}{4\pi}F', \qquad I'' = -\frac{3}{4\pi}F''.$$

Le champ reste uniforme dans le noyau intérieur où il a pour valeur

$$F+F'+F'' = \frac{9K'}{3(2K'+K'')+2(1-\beta)(K'-1)(K''-1)}F.$$

Le champ et la polarisation sont variables entre les surfaces S' et S'', ainsi que dans le milieu extérieur.

Lorsque le milieu extérieur et le noyau sont de même nature, on peut faire $K''=K'=K$; il reste alors

$$\frac{F'}{3} = \frac{-F''}{3+2(1-\beta)(K-1)} = \frac{(K-1)F}{9K+2(1-\beta)(K-1)^2},$$

$$(15)\quad F+F'+F'' = \frac{9KF}{9K+2(1-\beta)(K-1)^2} = \frac{F}{1+2(1-\beta)\dfrac{(K-1)^2}{9K}}.$$

Si le milieu compris entre les surfaces S′ et S″ est conducteur, les coefficients K′ et K″ sont infinis; dans ce cas, la couche S′ est nulle et le champ résultant est nul dans tout l'intérieur de la surface S″, ce qui était évident.

En faisant $K=2$ dans la formule finale (15), le dénominateur du dernier terme devient $1+\frac{1-\beta}{9}$. Si petit que soit le facteur β, c'est-à-dire quelque épaisseur que l'on donne au diélectrique, le champ dans l'intérieur de la surface S′ diminue au plus de $\frac{1}{9}$. Il est donc nécessaire que le pouvoir inducteur spécifique soit notablement supérieur à 2, pour que le milieu compris entre les surfaces S′ et S″ diminue d'une manière sensible le champ intérieur.

136. Deux diélectriques séparés par un plan. — Le principe des images par rapport à un plan conducteur (**107**) permet également de déterminer l'état de deux diélectriques séparés par une surface plane, dans l'un desquels se trouve une masse agissante. Soit q cette masse en A (fig. 26), Oy le plan de séparation, a la distance OA, et K le pouvoir inducteur du second milieu par rapport au premier.

Supposons qu'il existe sur le plan une couche q' distribuée de manière que son image soit au point A′ symétrique de A. Cette couche agira, à droite ou à gauche du plan, comme une masse égale située en A ou en A′.

Au voisinage du point P, la composante normale du champ est $\frac{q-q'}{r^2}\cos\alpha$ dans le premier milieu, et $\frac{q+q'}{r^2}\cos\alpha$ dans le second. La condition d'équilibre devient alors

$$q-q'=K(q+q'),$$

$$q'=-q\,\frac{K-1}{K+1}.$$

L'état de la surface est le même que pour un plan conducteur soumis à l'influence d'une masse plus faible que la première, dans le rapport $\frac{K-1}{K+1}$.

La densité en chaque point, ou la composante normale de la polarisation, est

$$\sigma = \mathrm{I}\cos\alpha = \frac{2q'a}{4\pi r^3} = -\frac{2aq}{4\pi r^3}\cdot\frac{\mathrm{K}-1}{\mathrm{K}+1}.$$

La solution obtenue pour une masse unique est applicable à un champ quelconque produit par des masses fixes. La superposition des couches induites par ces différentes masses formera encore une couche d'équilibre, puisque la conservation du flux d'induction est réalisée pour chacune d'elles.

Le même mode de raisonnement, combiné avec la méthode de Murphy, permettrait de déterminer par des images successives l'état d'un diélectrique limité par deux plans parallèles et séparant deux diélectriques différents dans l'un desquels se trouve une masse agissante. On obtient ainsi un développement en série qui ne présente qu'un intérêt de calcul.

137. Cylindres. — Considérons encore un cylindre à section circulaire de rayon a situé dans un champ uniforme qui lui est perpendiculaire. L'action extérieure d'un cylindre homogène, dont la densité par unité de longueur est $\lambda = \pi a^2$, a pour expression (**119**) $\frac{2\lambda}{r} = \frac{2\pi a^2}{r}$; l'action intérieure ne dépend que du noyau central et se réduit à $2\pi r$. La valeur de P est alors

$$\mathrm{P} = -\pi r^2 + \mathrm{c^{te}}.$$

Pour une polarisation perpendiculaire au cylindre dans la direction de l'axe des x, on a

$$\mathrm{V} = -\mathrm{I}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = 2\pi \mathrm{I} r \frac{\partial r}{\partial x} = 2\pi \mathrm{I} x.$$

Il en résulte

$$\mathrm{F}_i = -2\pi\mathrm{I}, \qquad \mathrm{C} = 2\pi;$$

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{K}-1}{\mathrm{K}+2}, \qquad 2\pi\mathrm{I} = \frac{\mathrm{K}-1}{\mathrm{K}+2}\mathrm{F}.$$

Cette fois encore, la polarisation est la même que si le cylindre était conducteur et soumis à l'influence d'un champ plus faible, dans le rapport $\frac{\mathrm{K}-1}{\mathrm{K}+1}$.

Pour un cylindre elliptique parallèle à l'axe des z, il suffira de faire $c = \infty$ dans les expressions (**52**) relatives à l'ellipsoïde. On a alors $N = 0$ et le coefficient L devient

$$L = 2\pi ab \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)}} = \frac{4\pi ab}{a^2-b^2}\left[\sqrt{\frac{b^2+u^2}{a^2+u^2}}\right]_0^\infty,$$

$$L = 4\pi\frac{b}{a+b}, \qquad M = 4\pi\frac{a}{a+b}.$$

Le potentiel intérieur du cylindre homogène de densité égale à l'unité se réduit à $P_0 - \frac{1}{2}(Lx^2 + My^2)$.

Pour une polarisation parallèle à l'axe a, le champ intérieur de la couche induite est $-LI$. Dans un champ uniforme F parallèle à cet axe, la condition d'équilibre (**133**) donne

$$I = \frac{K-1}{4\pi + (K-1)L}F = \frac{K-1}{4\pi}\,\frac{a+b}{a+Kb}F = AF.$$

Si le champ fait l'angle θ avec l'axe a, la polarisation I et sa direction θ' sont

$$\frac{A\cos\theta}{\cos\theta'} = \frac{B\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{I}{F} = \sqrt{A^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta}.$$

Le moment électrique du cylindre par unité de longueur est

$$m = vI = vF\sqrt{A^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta},$$

et le couple de rotation produit par le champ (**134**)

$$G = \frac{vF^2}{2}(A-B)\sin 2\theta = \frac{(K-1)^2}{8}\,\frac{ab(a^2-b^2)}{(a+Kb)(b+Ka)}F^2\sin 2\theta.$$

L'équilibre stable correspond encore au cas où le grand axe est parallèle au champ.

CHAPITRE HUITIÈME

SOURCES D'ÉLECTRICITÉ

138. Découverte de Volta. — Nous avons déjà signalé (**10**) la propriété importante découverte par Volta que deux conducteurs et, plus généralement, deux corps quelconques mis en contact prennent, de part et d'autre de la surface commune, des états électriques différents.

S'il s'agit de deux conducteurs en contact et en équilibre électrique, les potentiels ont respectivement des valeurs constantes V_1 et V_2 dans chacun d'eux, à quelque distance de la surface de contact, et la charge totale est nulle si l'on n'a pas apporté d'électricité étrangère; il existe donc au voisinage de la surface des masses électriques sous la forme de couches opposées, égales et de signes contraires. C'est ce que Von Helmholtz (1) appelle la *couche double* de contact.

Dans l'expérience des plateaux de zinc et de cuivre, mis en contact puis séparés, la charge acquise par chacun des plateaux est simplement proportionnelle à la surface de contact. Tout se passe comme si les plateaux formaient les armatures d'un condensateur entre lesquelles existerait une différence de potentiel déterminée, les couches électriques respectives étant situées dans les deux métaux, de part et d'autre de la surface de séparation et à une distance très petite, de sorte que la capacité du système est simplement proportionnelle à l'étendue des surfaces en regard.

(1) Von Helmholtz, *C. R. de l'Acad. de Berlin*, 3 nov. 1881.

139. Force électromotrice de contact. — Si l'on désigne par V la différence des potentiels $V_1 - V_2$ du zinc et du cuivre, ou *la force électromotrice de contact*, et par C la capacité du condensateur formé par ce système, la charge des plateaux sera

$$Q = C(V_1 - V_2) = CV.$$

L'ensemble des plateaux peut d'aillleurs recevoir une charge électrique commune Q′ qui portera le zinc, par exemple, à un potentiel quelconque. Dans ce cas, la même différence de potentiel V se maintient à la surface de contact; lorsque les plateaux sont séparés, la charge de chacun d'eux se compose de la charge $\pm Q$ due à la différence de potentiel de contact et d'une partie de la charge commune Q′, qui s'est partagée entre eux suivant les lois régulières de la distribution.

L'expérience présente de grandes difficultés quand on veut évaluer la différence des potentiels par la grandeur des charges, parce que la distance réelle des plateaux dépend du degré du poli des surfaces; le contact n'a lieu le plus souvent que par un petit nombre de points et la capacité du système peut varier entre d'assez grandes limites.

On obtient des résultats plus réguliers en maintenant les plateaux parallèlement entre eux à une certaine distance *e* et en les réunissant par un fil extérieur, de cuivre ou de zinc. La différence de potentiel V produite au point de contact se maintient sur toute l'étendue des deux conducteurs homogènes; la distance des couches correspondantes est égale sensiblement à l'épaisseur du diélectrique qui sépare les plateaux, et la capacité du système est en raison inverse de cette épaisseur. Si, après avoir supprimé le contact extérieur, on éloigne les plateaux l'un de l'autre, la charge de chacun d'eux est, en appelant S l'étendue des surfaces en regard,

$$Q = \frac{S}{4\pi e} V.$$

L'expérience montre ainsi, soit par la mesure des charges, soit par la comparaison des potentiels, que la force électromotrice V, à température déterminée, est indépendante de la

surface de contact. En réalité, ces expériences sont très délicates, parce que les plus légères modifications dans l'état des surfaces altèrent les résultats.

La nature même du gaz qui constitue le diélectrique paraît avoir une petite influence sur la charge, soit parce que la couche de gaz adhérente au métal en change les propriétés physiques, soit qu'il y ait en même temps formation d'un composé chimique particulier.

140. Lois de Volta. — Loi du contact. — Quoi qu'il en soit, les idées de Volta ont été confirmées par tous les progrès accomplis en électricité et l'on peut énoncer la loi suivante :

Entre deux corps en contact, à la même température, il s'établit une différence de potentiel finie, qui dépend de leur nature, et qui est indépendante de leurs dimensions, de leur forme, de l'étendue des surfaces de contact et de la valeur absolue du potentiel sur chacun d'eux.

Volta définissait cette propriété en disant qu'il existe entre les deux corps une *tension de contact*, mais la manière dont il concevait le phénomène est parfaitement concordante avec l'idée d'une différence de potentiel.

Nous représenterons cette différence de potentiel caractéristique, ou force électromotrice de contact de deux métaux A et B, par le symbole A|B, la première lettre désignant le métal dont le potentiel est le plus élevé. On aura donc

$$V = V_a - V_b = A|B.$$

Nous pouvons ajouter de suite que cette différence est fonction de la température, et que le contact de deux corps de nature identique, mais à des températures différentes, peut aussi donner naissance à une force électromotrice.

Dans toutes les questions relatives à l'équilibre électrique des conducteurs, nous avons négligé, comme on le voit, les forces électromotrices relatives au contact des différents conducteurs. Tous les calculs supposent donc que les conducteurs sont identiques et à la même température et les résultats doivent être modifiés en tenant compte de cette nouvelle circonstance, à moins qu'il ne s'agisse de potentiels très élevés, auquel cas les effets de contact sont négligeables.

141. Loi des contacts successifs. — Après avoir constaté le fait fondamental de la force électromotrice de contact, Volta a comparé entre eux les résultats fournis par des métaux différents et établi par expérience une seconde loi, dite *des contacts successifs*, qu'on peut énoncer ainsi :

Lorsque plusieurs métaux à la même température sont soudés les uns aux autres de manière à former une chaîne continue, la différence des potentiels des métaux extrêmes est la même que si ces deux métaux étaient directement en contact.

Soient A, B, C..... L, M les métaux constituant la chaîne ; cette loi se traduira de la manière suivante

$$A|B + B|C \cdots\cdots + L|M = A|M.$$

Comme on a identiquement $A|M = - M|A$, il en resulte

$$A|B + B|C + \cdots\cdots + L|M + M|A = 0,$$

c'est-à-dire que *les deux extrémités de toute chaîne terminée par des métaux identiques sont au même potentiel.*

Cette proposition importante est une conséquence nécessaire du principe de la conservation de l'énergie. Si les métaux extrêmes A et A', de nature identique, se trouvaient maintenus à des potentiels différents par l'effet des contacts intermédiaires, on pourrait, en les joignant par un conducteur de même nature, obtenir dans le conducteur extérieur et dans la chaîne des métaux intermédiaires une décharge continue, c'est-à-dire un flux permanent d'électricité. Ce transport d'électricité, analogue à une succession de décharges, aurait pour conséquence nécessaire la production continue d'une certaine quantité de chaleur, c'est-à-dire d'énergie, sans dépense de travail correspondant.

Si l'on suppose même que le dégagement de chaleur en certains points du circuit soit compensé par une absorption en d'autres points, il y aurait transport de chaleur des points les plus froids aux points les plus chauds. Ce résultat est incompatible avec le principe de Carnot, qui paraît aussi bien établi que l'impossibilité du mouvement perpétuel.

142. Exceptions à cette loi. — Piles électriques. — Volta a constaté que la loi des tensions est quelquefois en défaut. Remarquons, en effet, qu'elle ne paraît nécessaire que s'il n'existe aucune production de travail dans le circuit ; mais si celui-ci renferme des sources d'énergie d'une nature quelconque, par exemple des corps pouvant donner lieu à des réactions exothermiques corrélatives du passage de l'électricité, l'énergie fournie par ces réactions pourra subvenir à l'entretien d'un courant permanent.

Sans avoir sur ce point des idées aussi précises (il espérait rencontrer des métaux ne satisfaisant pas à la loi), Volta avait partagé les corps en deux grandes classes. La première renferme ceux qui obéissent à la loi des tensions ; elle comprend tous les métaux et un certain nombre de solides. La seconde renferme tous ceux qui ne suivent pas la même loi : à cette classe appartiennent la plupart des liquides et des dissolutions. En associant des corps de la première classe à des corps de la seconde, on peut constituer une chaîne dont les deux extrémités, quoique formées par un même métal, présentent une différence finie de potentiel.

L'expérience montre que, dans ce cas encore, la loi fondamentale de Volta est vérifiée, en ce sens que la force électromotrice correspondant à chacun des contacts est, pour une même température, une quantité constante, indépendante des autres corps qui constituent la chaîne ; et la différence de potentiel qui existe entre les deux extrémités de cette chaîne est la somme algébrique de toutes les forces électromotrices relatives à chacun des contacts.

Quand on joint par un conducteur ces deux extrémités, on n'introduit pas de nouvelles forces électromotrices de contact ; un flux permanent d'électricité, ou un courant électrique, s'établit dans le circuit, où il est entretenu par l'énergie des actions chimiques. Tel est le principe des *piles électriques*.

143. Conséquences relatives aux dimensions des atomes. — Les deux couches électriques de signes contraires qui donnent lieu à la force électromotrice V au contact de deux métaux sont séparées par une distance finie, et doivent être localisées respectivement près de la surface des deux métaux. On pourrait déterminer l'intervalle ε de ces couches, ou l'épaisseur de la

couche double, si l'on connaît la force électromotrice, en mesurant la charge Q qui reste sur deux plateaux quand on les sépare après les avoir mis en contact, car on a

$$\varepsilon = \frac{S}{4\pi} \cdot \frac{V}{Q}.$$

Sous cette forme, l'expérience est irréalisable. D'une part, en effet, on ne peut pas établir le contact physique de deux surfaces; d'autre part, les charges que conservent les plateaux dépendent seulement de la capacité du système au moment où la séparation devient définitive et cette capacité n'est, en général, qu'une fraction très faible de sa valeur primitive, parce que le contact ne peut être rompu en même temps sur toute l'étendue de la surface.

Toutefois, Lord Kelvin (¹) a montré, par une suite de raisonnements ingénieux, comment la différence de potentiel de contact conduit à une évaluation approchée de la distance ε et par suite des dimensions des atomes.

L'énergie électrique de deux plateaux à la distance ε,

$$W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{SV^2}{8\pi\varepsilon},$$

représente le travail mécanique nécessaire pour les séparer, ou le travail de leur attraction si l'on suppose qu'étant d'abord très éloignés et mis en communication par un fil conducteur, on les laisse se rapprocher jusqu'à la distance ε.

Supposons que l'on constitue une pile comprenant un grand nombre $n + 1$ de lames d'égale épaisseur e alternativement de zinc et de cuivre, en communications successives, de manière à établir n contacts. L'énergie électrique se traduira par un échauffement de la pile.

En appelant δ la densité moyenne et γ la chaleur spécifique moyenne des métaux, la capacité calorifique de l'une des lames par unité de surface est $e\delta\gamma$ et l'énergie correspondante $\frac{V^2}{8\pi\varepsilon}$.

(¹) SIR W. THOMSON, *Nature*, t. I, p. 551; 1870. — *Popular lectures*, t. I, p. 147; 1889.

L'élévation de température t produit par la constitution de la pile est donc

$$Je\delta\gamma t = \frac{V^2}{8\pi\varepsilon}, \quad t = \frac{1}{e\varepsilon} \cdot \frac{V^2}{8\pi J\delta\gamma}.$$

Le zinc et le cuivre donnent sensiblement $\delta = 8$ et $\gamma = 0{,}1$. D'autre part, la force électromotrice de contact est d'environ 0,8 volt (Lord Kelvin adopte 0,72) ou $\frac{0{,}8}{300}$ unités électrostatiques. Remplaçons l'équivalent mécanique J de la calorie par sa valeur (17), on trouve, tous calculs faits,

$$t = \frac{0{,}85}{e\varepsilon}\, 10^{-14}.$$

Pour $e = \varepsilon = 10^{-4}$, c'est-à-dire un millième de millimètre ou un micron μ, l'élévation de température n'est encore que $0°{,}85 . 10^{-6}$, moins d'un millionième de degré.

Si l'on suppose qu'il soit possible de feuilleter les métaux, sans altérer leurs propriétés physiques, jusqu'à réduire leur épaisseur à $e = \varepsilon = 10^{-8} = 1^{\mu} . 10^{-4}$, ce qui équivaut à $\frac{1}{5000}$ de la longueur d'onde λ de la lumière verte, on aurait $t = 85°$, élévation de température déjà difficile à admettre.

Pour des épaisseurs trois fois moindres, l'échauffement serait 9 fois aussi grand, ou 765°, c'est-à-dire de beaucoup supérieur à celui qui est nécessaire pour former l'alliage. Des poudres de zinc et de cuivre, à cette état de subdivision, formeraient un mélange explosif et aucun procédé mécanique ne permet d'approcher de ce résultat. On doit en conclure que les dimensions réelles des molécules sont certainement supérieures à

$$\frac{1^c}{300\,000\,000} \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda}{15\,000}.$$

Si l'on pouvait séparer deux plateaux de zinc et de cuivre en contact, sans produire une destruction partielle des couches électriques en regard, chacun d'eux se trouverait porté

à un potentiel extrêmement élevé. Ce potentiel dépend des dimensions des plateaux, parce que la capacité du système est proportionnelle à la surface de contact, tandis que la capacité de chacun des plateaux séparés est proportionnelle à ses dimensions linéaires (¹).

Pour un disque circulaire de rayon a (**54**), la capacité C′ du plateau isolé est $\frac{2a}{\pi}$ et la capacité C du système formé par deux plateaux de zinc et de cuivre $\frac{\pi a^2}{4\pi\varepsilon} = \frac{a^2}{4\varepsilon}$. Pour la même charge, les potentiels correspondants V′ et V sont en rapport inverse des capacités, c'est-à-dire

$$\frac{V'}{V} = \frac{C}{C'} = \frac{\pi a}{8\varepsilon}.$$

Si l'on fait $a = 10^c$ et $\varepsilon = 10^{-7}$, ou un millionième de millimètre, il en résulte

$$\frac{V'}{V} = \frac{\pi}{8}\,10^8 = 39.10^6.$$

La limite indiquée par Lord Kelvin pour la distance ε des couches électriques donnerait encore un nombre 30 fois plus grand pour le potentiel final.

144. Contact des diélectriques. — La première loi de Volta paraît également s'appliquer au contact des métaux avec les diélectriques, ou des diélectriques entre eux. Seulement, dans ces deux cas, la détermination des forces électromotrices de contact présente de très grandes difficultés.

Il suffit d'un contact très restreint entre deux corps conducteurs pour assurer l'équilibre des potentiels; les charges dépendent alors uniquement de la capacité du système formé par les deux corps au moment de leur séparation. Avec les corps mauvais conducteurs, l'équilibre n'a lieu que pour les points en contact, et ceux-là seulement se chargent d'électricité. La charge totale sera donc extrêmement variable avec le nombre des points touchés. Ajoutons que le fait de la péné-

(¹) Von Helmholtz, *Wied. Ann.*, t. VII, p. 337; 1879.

tration de l'électricité dans les diélectriques vient compliquer encore les expériences.

Dans l'électrisation des corps par frottement, l'électricité ne semble pas avoir d'autre origine que le contact des deux corps ; le frottement n'aurait pour but que de multiplier les points de contact.

Lorsque les corps frottés sont identiques, on ne parvient pas en général à les électriser; il se manifeste parfois des traces d'électricité très faibles, mais alors on peut toujours attribuer le développement de l'électricité à une différence plus ou moins manifeste entre les propriétés physiques des deux corps frottés.

145. Machines électriques. — On est donc conduit à conclure qu'il n'existe que deux modes de production de l'électricité, le *contact* et l'*induction*. Toutes les machines électriques mettent en jeu l'un ou l'autre de ces deux modes et ont seulement pour objet d'accumuler sur un conducteur les charges produites d'une manière ou de l'autre.

L'*électrophore* se compose d'un gâteau isolant, en résine par exemple, coulé dans un moule conducteur. Après avoir électrisé ce gâteau par frottement avec un corps convenable, une peau de chat dans le cas de la résine, qui s'électrise alors négativement, on y pose un plateau conducteur tenu par un manche isolant. On met le disque en communication avec le moule de l'électrophore. Supprimant ensuite cette communication, on enlève le plateau, qui se trouve électrisé positivement par induction.

Toutes choses égales, la charge du plateau est proportionnelle à sa capacité, c'est-à-dire à ses dimensions linéaires, et le potentiel devient assez élevé pour qu'on en puisse tirer avec le doigt des étincelles de plusieurs centimètres.

Le phénomène est assez complexe, surtout au début, mais devient ensuite très régulier quand on répète les opérations, la couche électrique du gâteau s'étant localisée au-dessous de la surface. En tous cas, la charge du plateau peut être utilisée après chaque opération, par exemple pour charger une bouteille de Leyde.

L'emploi de l'électrophore permet d'expliquer simplement le jeu des *machines électriques*.

Supposons qu'on introduise le plateau électrisé dans l'intérieur d'un cylindre conducteur creux et isolé, comme celui de Faraday, et qu'on fasse toucher le plateau à la surface intérieure; toute la charge se portera sur la surface extérieure du cylindre. Le plateau lui-même peut alors sortir à l'état neutre et on répétera l'expérience indéfiniment. Il est évident que rien en théorie ne limite la charge du cylindre, puisque, quel que soit son état primitif, un conducteur, placé à l'intérieur et mis en communication avec lui, ne peut garder aucune trace d'électricité.

Si l'on imagine que toutes ces opérations soient faites par des moyens mécaniques, on aura réalisé une véritable machine électrique fondée sur l'induction.

Supposons maintenant, au lieu du gâteau de l'électrophore, un disque de cuivre en communication avec le sol, et mettons en contact avec lui un disque de zinc tenu par un manche isolant; en vertu de la loi de Volta, le disque de zinc se charge d'électricité positive; cette charge pourra, comme dans le cas précédent, être transmise au cylindre, et l'expérience recommencée indéfiniment.

Il en sera encore de même si, au lieu d'un disque de cuivre, on emploie un morceau de drap ou de caoutchouc, et un disque de verre au lieu d'un disque de zinc. Il faut, toutefois, tenir compte de la nature isolante des corps employés; le contact ne se produira entre le drap et les différents points de la surface de verre que par le frottement. Quand le verre chargé d'électricité positive est porté à l'intérieur du cylindre, il détermine sur la surface intérieure la formation d'une couche égale et de signe contraire à la sienne; seulement il ne suffit plus de lui faire toucher un point de la surface intérieure, pour que les deux charges se neutralisent. Mais on arrivera au même résultat si la surface intérieure du cylindre est armée de pointes; l'équilibre est alors établi quand la densité est nulle à l'extrémité de ces pointes, c'est-à-dire, lorsque l'électricité qui s'en échappe a neutralisé la charge du disque de verre.

Telle est en principe la disposition des machines à frottement. Un disque de verre s'électrise en passant entre des coussins revêtus d'or mussif ou de divers enduits; les por-

tions du verre électrisées passent entre les branches d'une mâchoire garnie de pointes qui communique avec des conducteurs isolés. La surface du verre est ramenée sensiblement à l'état neutre par la décharge des pointes et le même mécanisme se reproduit sans cesse.

146. Organes essentiels des machines. — Dans tous les cas, une machine électrique se réduit à trois organes essentiels, l'un qui développe l'électricité, un autre qui la transporte, un troisième qui la recueille : *un producteur*, *un transmetteur*, *un collecteur*. L'énergie potentielle communiquée au collecteur est fournie par le travail mécanique effectué, lorsqu'on transporte le *transmetteur*, en sens contraire des forces électriques, depuis le *producteur* chargé d'électricité contraire qui l'attire, jusqu'au *collecteur* chargé d'électricité de même signe qui le repousse.

Dans les machines à frottement, le collecteur reçoit à chaque opération la même quantité d'électricité ; la charge croît en progression arithmétique ou par *addition*.

Dans le cas des machines à induction, on peut faire en sorte que la charge croisse en progression géométrique, ou par *multiplication* : il suffit d'accoupler deux machines de manière que les deux inducteurs développent des électricités de signes contraires et que chacun d'eux soit en communication métallique avec le collecteur de l'autre système. A chaque opération, la charge du producteur croît en même temps que celle du collecteur auquel il est relié, et développe par influence une charge plus grande dans le transmetteur à l'opération suivante. C'est la disposition qui est utilisée dans la machine de Varley et dans quelques-unes des machines si ingénieuses imaginées par Lord Kelvin, telles que l'appareil à écoulement et le *replenisher*. La machine de Holtz et les machines analogues reposent sur le même principe, avec une disposition plus compliquée.

147. Limite de charge. — Si la théorie n'assigne aucune limite à la charge du *collecteur*, cette limite est atteinte dans la pratique, soit à cause de la déperdition par l'air ou par les supports, soit par le fait des décharges qui se produisent, sous forme d'étincelles, entre le collecteur et les autres parties de la machine ou les conducteurs voisins.

La production des décharges dépend de la forme de la machine et de sa position par rapport aux conducteurs voisins; la limite due aux défauts d'isolement varie avec les conditions atmosphériques et avec la vitesse des opérations.

Dans les machines à addition, la limite est atteinte quand le gain est égal aux pertes à chaque instant, et cette limite aura toujours une valeur finie.

Dans les machines à multiplication, certaines conditions doivent être remplies pour que la charge du collecteur puisse conserver une valeur finie. Soient C et C′ les capacités des deux collecteurs, V et — V′ leurs potentiels, c et c' les capacités des transmetteurs, n et n' le nombre d'opérations effectuées dans l'unité de temps.

Pour des charges très faibles, la déperdition d'un conducteur électrisé, par l'air et les supports, est sensiblement proportionnelle à la charge ou au potentiel.

Si l'on appelle m et m' des coefficients de proportionnalité relatifs aux deux conducteurs, les pertes de charge pendant l'unité de temps pourront être représentées par $m\mathrm{V}$ et $m'\mathrm{V}'$.

Pendant un temps infiniment petit dt, l'accroissement de charge d'un collecteur est l'excès de l'électricité $n'c'\mathrm{V}'dt$ qu'il reçoit sur celle qu'il perd, $m\mathrm{V}dt$; on a donc

$$\mathrm{C}d\mathrm{V} = (n'c'\mathrm{V}' - m\mathrm{V})dt,$$
$$\mathrm{C}'d\mathrm{V}' = (nc\mathrm{V} - m'\mathrm{V}')dt.$$

En résolvant ces équations différentielles simultanées, on calculerait la valeur acquise par les potentiels V et V′ au bout d'un temps quelconque, à partir de valeurs initiales données; mais les résultats ainsi obtenus ne s'accorderaient avec l'expérience que dans les limites où l'on peut admettre la loi de déperdition. On sait, d'ailleurs, que pour des charges un peu grandes la déperdition est beaucoup plus rapide.

Pour que la charge aille en croissant, il suffit que les variations des potentiels soient positives, ce qui donne

$$n'c'\mathrm{V}' > m\mathrm{V} \quad \text{et} \quad nc\mathrm{V} > m'\mathrm{V}',$$

ou

$$nn'cc' > mm'.$$

Si cette dernière condition est réalisée au début (et l'on voit qu'elle ne dépend pas de l'électrisation initiale), la charge de la machine ira d'abord en croissant. Tant que l'inégalité se maintient ensuite, malgré l'augmentaticn des coefficients m et m', la charge n'a d'autre limite que celle qui sera déterminée par la production des étincelles.

Si l'inégalité précédente avait lieu en sens contraire, la charge irait en diminuant et deviendrait rapidement nulle.

Lorsque l'appareil est symétrique, la condition d'accroissement de charge se réduit à $nc > m$. Il faut donc rendre n aussi grand et m aussi petit que possible.

On arrive à ce résultat, dans les machines analogues à celle de Holtz, d'une part en augmentant la vitesse de rotation des plateaux, d'autre part en associant les conducteurs avec deux bouteilles de Leyde réunies en cascade, ce qui fait croître leur capacité sans augmenter les pertes et, par suite, diminue la valeur du coefficient m.

148. Débit des machines. — Quelle que soit, d'ailleurs, la cause extérieure qui limite la charge, on voit que toutes ces machines fonctionnent comme de véritables *sources*, c'est-à-dire comme des systèmes capables, par le jeu de leurs propres organes, de maintenir un conducteur à un potentiel constant, ou de maintenir une différence de potentiel déterminée entre deux conducteurs. Ce résultat est obtenu quand, à chaque instant, la quantité d'électricité apportée au collecteur est égale à celle qui lui est enlevée, soit par les déperditions, soit par les décharges provoquées d'une manière quelconque entre ce colleeteur et le sol.

Quand le jeu est ainsi régularisé, soit d'une manière continue, soit à intervalles périodiques, le *débit* de la machine est la quantité d'électricité qui est mise en mouvement par unité du temps.

Dans les machines à addition, il est évident que le débit, toutes choses égales d'ailleurs, est proportionnel à la capacité du transmetteur et au nombre des opérations effectuées pendant chaque unité de temps. Si, comme pour les machines à plateau, le transmetteur fonctionne d'une manière continue, le débit est proportionnel à la vitesse. Plus exactement, le débit est proportionnel à la surface utilisée, c'est-à-dire à la

surface de la couronne frottée par les coussins et au nombre de tours par seconde.

Ce débit est à peu près indépendant du potentiel maintenu sur le collecteur, si les coussins sont réunis au sol, ou à la différence de potentiel des deux collecteurs, si les coussins sont eux-mêmes isolés et réunis à un collecteur, comme dans la machine de Nairne; le débit diminue dès que la différence de potentiel est de l'ordre de celle qui serait capable de provoquer des étincelles, entre les mâchoires et les coussins, le long de la surface du disque tournant.

Dans les machines à multiplication les phénomènes ne se passent plus d'une manière aussi simple. Toutefois l'expérience montre encore qu'à même différence de potentiel entre les collecteurs, le débit est sensiblement proportionnel à la vitesse, bien qu'il croisse, en général, un peu plus rapidement. Ce débit diminue plus vite que dans les machines précédentes quand on fait croître la différence de potentiel des collecteurs.

CHAPITRE NEUVIÈME

PROPAGATION DE L'ÉLECTRICITÉ

RÉGIME PERMANENT

149. Théorie d'Ohm. — Quand on établit une communication métallique entre deux conducteurs isolés, à des potentiels différents, l'équilibre ne peut subsister, l'électricité positive va du corps au potentiel le plus élevé vers celui qui a le potentiel le plus bas ; il se produit un *flux d'électricité*, un *courant électrique*. Si les deux corps ont des charges limitées, l'équilibre se trouve établi, en général, au bout d'un temps très court, qui dépend de la nature et des dimensions du conducteur intermédiaire ; le courant est alors *variable* avec le temps. Mais si, par un procédé quelconque, on maintient constante la différence du potentiel des deux conducteurs, un régime permanent s'établit et le conducteur intermédiaire devient le siège d'un *courant constant*.

L'analogie des courants électriques avec les flux de chaleur entre deux surfaces isothermes dans un milieu conducteur est manifeste ; elle se traduit par les mêmes lois élémentaires.

En rappelant les principes de la théorie de Fourier, nous avons vu que le flux de chaleur qui traverse, pendant l'unité de temps, l'élément dS d'une surface isotherme est dirigé suivant la normale n à la surface et a pour expression, en appelant k le coefficient de conductibilité du milieu,

$$d\varphi = -k dS \frac{dt}{dn}.$$

Le signe — signifie que le flux de chaleur progresse dans lo sens où les températures décroissent.

Ohm a transporté ce même mode de raisonnement dans l'étude de la propagation de l'électricité. Il admet que tous les points d'un conducteur en équilibre sont dans un même état électrique, à la même *tension*; lorsque l'équilibre n'a pas lieu, il se produit des échanges d'électricité. Dans le cas général, la tension en chaque point est une fonction du temps et des coordonnées; mais, si une cause étrangère maintient une différence constante entre les tensions des différentes parties du conducteur, il s'établit dans le système, au bout d'un temps plus ou moins long, un régime permanent pour lequel la tension en chaque point devient invariable.

Ohm admet, en outre, qu'entre deux molécules il se produit pendant l'unité de temps un échange d'électricité proportionnel à la différence des tensions et à une fonction de la distance telle que les molécules les plus voisines aient une influence prédominante.

Cette hypothèse est identique à celle de Fourier. Sans qu'il soit nécessaire de répéter les raisonnements, il en résulte que les échanges d'électricité ont lieu normalement aux surfaces d'égale tension. Le flux d'électricité dq qui traverse pendant l'unité de temps un élément dS d'une surface de niveau est proportionnel à la dérivée de la tension U par rapport à la normale à cette surface et ce flux a une expression de la forme

$$dq = -c\,dS\,\frac{dU}{dn}.$$

Le coefficient c dépend de la nature du milieu et peut être appelé *coefficient de conductibilité* ou *conductivité électrique*; la dérivée $\frac{dU}{dn}$, prise en signe contraire, est la *force électromotrice* au point considéré.

Dans la théorie d'Ohm, comme dans celle de Fourier, on admet que la direction du flux est constamment parallèle à la direction de la cause qui tend à le produire, et par conséquent indépendante des conditions antérieures. Cette hypothèse est incompatible avec la notion de l'inertie et, par suite, avec celle de la matérialité de ce qui constitue le flux.

La tension est un état particulier du milieu en vertu duquel

l'électricité tend à s'écouler depuis les points où la tension est plus élevée vers les points à tension plus faible. Ohm paraît, dans quelques parties de ses mémoires, concevoir une relation trop étroite entre la densité électrique et la tension, mais il indique aussi qu'on pourrait déterminer la tension en un point, même dans l'état variable, en reliant ce point par un fil avec un électroscope isolé, auquel cas la quantité qu'on mesurerait n'est autre chose que le potentiel.

150. Hypothèse de Kirchhoff. — Pour préciser la théorie d'Ohm dans les idées actuelles sur l'électricité, il suffit donc d'admettre, comme l'a fait Kirchhoff [1], que la tension et le potentiel sont deux fonctions identiques.

Il résulte de cette hypothèse que dans un système de conducteurs, reliés entre eux, mais non en équilibre électrique, le flux d'électricité en chaque point est proportionnel à la dérivée du potentiel suivant la normale à la surface de niveau, ou, en d'autres termes, proportionnel au champ électrique en ce point, c'est-à-dire à la résultante des actions de toutes les masses du système dans leur état actuel.

Plus simplement encore, *le flux d'électricité est parallèle et proportionnel au flux de force.*

Sous une autre forme, on peut dire que l'hypothèse consiste à admettre que la superposition de deux états d'équilibre dynamique, ou de régime permanent, est un nouvel état d'équilibre, dans lequel le flux qui traverse un élément de surface est égal à la somme des flux relatifs aux deux états primitifs.

Considérons, en effet, deux états pour lesquels les flux d'électricité qui traversent pendant l'unité de temps un élément de surface dS sont $A\,dS$ et $A'\,dS$, et supposons que le flux relatif à la superposition de deux états sont $A\,dS + A'\,dS$.

Quand on superpose ces deux états, les potentiels s'ajoutent en chaque point; il en est de même pour les composantes du champ dans une direction normale à l'élément dS et pour le flux de force correspondant.

Si les états primitifs sont identiques, le flux d'électricité est devenu $2A\,dS$ et le flux de force est aussi doublé; le flux d'électricité est donc proportionnel au flux de force.

[1] Kirchhof, *Pogg. Ann.*, t. LXXVIII, p. 506; 1849. — *Ann. de ch. et de phys.*, (3) t. LXI, p. 496; 1854.

Lorsque le régime permanent est établi, le potentiel est invariable en chaque point, et le flux qui traverse un élément de surface quelconque est constant. Si l'état est variable, les potentiels varient avec le temps, et le flux qui traverse un élément de surface pendant le temps dt est $-c\,d\mathrm{S}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}\,dt$.

151. Électrisation superficielle des conducteurs. — Si le régime permanent est atteint pour un système de conducteurs, le flux d'électricité que reçoit chaque élément de volume doit être nul, sans quoi le potentiel ne pourrait rester invariable. Le flux de force étant aussi nul, on retrouve l'équation de Laplace :

$$\Delta \mathrm{V} = 0.$$

Le flux de force est d'ailleurs égal au produit de 4π par la quantité d'électricité q que renferme l'élément de volume considéré ; donc $q = 0$.

Ainsi, quand un système de conducteurs est arrivé à un régime permanent, la densité électrique est nulle dans tous les conducteurs ; les masses électriques qui donnent lieu au potentiel V, et dont l'action détermine le courant, sont donc entièrement à la surface des conducteurs. Ces masses ne sont pas en équilibre d'elles-mêmes et elles produisent en chaque point la force électromotrice du courant.

Il résulte de là que le flux, quel qu'il soit, s'il a une existence réelle, n'est pas un flux d'électricité libre. Dans l'hypothèse des deux fluides, il faudrait admettre qu'il se trouve à chaque instant, dans chaque élément de volume à l'intérieur du conducteur, la même quantité des deux électricités, et que celles-ci se meuvent en deux courants égaux de directions opposées ; c'est une conception qui paraît assez improbable. Dans l'hypothèse d'un seul fluide, il faudrait considérer chaque élément comme contenant à chaque instant la quantité normale d'électricité, tout en supposant que celle-ci se déplace en totalité ou en partie.

152. Conducteurs linéaires. — Loi d'Ohm. — Considérons d'abord un fil cylindrique d'une grande longueur par rapport à son diamètre, placé dans un milieu parfaitement isolant, et supposons que le régime permanent soit atteint.

S'il n'y a aucune perte par la surface, le flux d'électricité est en chaque point parallèle aux génératrices du cylindre ; les surfaces de niveau sont donc des plans perpendiculaires à l'axe du fil. Le flux qui traverse une section quelconque du fil pendant l'unité de temps est le même dans toute sa longueur ; appelons ce flux *intensité du courant* et désignons le par i. Soit V le potentiel au point P situé à une distance x d'un plan fixe normal au fil et S la section du fil.

Le potentiel est simplement une fonction de x et l'intensité a pour expression

$$i = -cS\frac{dV}{dx}.$$

Comme ce flux est indépendant de x, il en résulte, en désignant par a et b deux constantes,

$$\frac{dV}{dx} = a, \qquad \text{et} \qquad V = ax + b.$$

Soient V_1 et V_2 les valeurs du potentiel aux deux points A et

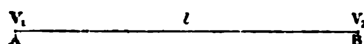


Fig. 35.

B (fig. 35) distants de l, et prenons le point A pour origine des coordonnées, il vient

$$(1) \qquad V = \frac{V_2 - V_1}{l}x + V_1 ;$$

par suite,

$$(2) \qquad i = cS\frac{V_1 - V_2}{l} = \frac{V_1 - V_2}{\frac{l}{cS}}.$$

Le numérateur $V_1 - V_2 = e$ de la dernière fraction est la force *électromotrice* entre les points A et B ; le dénominateur est la *résistance* r du fil entre ces deux points et l'on peut écrire

$$i = \frac{e}{r}.$$

L'inverse $\frac{cS}{l}$ de la résistance est la *conductance* du même fil [1]

Les équations (1) et (2) montrent que :

1° *Le potentiel décroît en progression arithmétique le long du fil, dans le sens de la propagation du courant;*

2° *Entre deux points A et B l'intensité du courant est égale au quotient de la différence du potentiel de ces deux points par la résistance du fil intermédiaire.*

Ces deux énoncés constituent la *loi d'Ohm*.

On peut remarquer que la distribution du potentiel et le flux d'électricité, dans le cas que nous venons de considérer, sont identiques à la distribution des températures et au flux de chaleur qui se propage dans un mur homogène, limité par deux plans parallèles maintenus respectivement à des températures constantes.

153. Conducteurs à section variable. — Nous avons supposé les conducteurs rectilignes, mais le même raisonnement s'applique évidemment à des conducteurs linéaires contournés d'une manière quelconque, le flux d'électricité étant en chaque point normal à la section droite du conducteur.

Si le circuit est formé de portions cylindriques de sections différentes et de même nature, ajoutées bout à bout, on considérera ces différentes parties séparément.

Soient V_1 et V' les potentiels aux extrémités d'un conducteur cylindrique de résistance r, V' et V_2 les potentiels aux extrémités du second conducteur de résistance r'. Le même courant passant d'un conducteur à l'autre, on a

$$i = \frac{V_1 - V'}{r} = \frac{V' - V_2}{r'} = \frac{V_1 - V_2}{r + r'} = \frac{e}{r + r'}.$$

L'intensité du courant est donc en raison inverse de la somme des résistances des deux conducteurs entre les points extrêmes. Cette relation est évidemment générale ; la résistance

(1) Pour nous conformer à un usage qui tend à se généraliser, nous désignerons par des mots terminés en *ance*, tels que *résistance*, *conductance*, les propriétés d'un corps de dimensions quelconques, réservant une autre désinence, *résistivité*, *conductivité*, pour les propriétés correspondantes, spécifiques de la nature du corps et rapportées aux unités de dimensions.

d'une série de conducteurs cylindriques successifs est égale à la somme des résistances de tous les conducteurs.

Enfin si la section S varie d'une manière continue, la résistance entre deux points est la somme des résistances relatives à tous les éléments de longueur, c'est-à-dire

$$r = \frac{1}{c}\int \frac{dl}{S}.$$

154. La résistance d'un conducteur est l'inverse d'une vitesse. — La quantité r, que nous avons appelée la résistance du conducteur, est proportionnelle à sa longueur, en raison inverse de sa section et de la conductivité du milieu.

L'inverse de la conductivité c représente la résistance d'un cube égal à l'unité parallèlement à une arête ; on peut l'appeler *résistance spécifique* ou *résistivité* du conducteur.

La résistance d'un conducteur est une grandeur de même nature que l'inverse d'une vitesse en mécanique.

En effet, dans la relation

$$V_1 - V_2 = ir,$$

la différence de potentiel $V_1 - V_2$ est le quotient d'une masse électrique Q par une longueur a ; l'intensité d'un courant, ou le flux pendant l'unité de temps, est le rapport de la quantité d'électricité q qui s'écoule pendant le temps t au temps correspondant. On a donc

$$\frac{Q}{a} = \frac{q}{t} r, \quad \text{ou} \quad r = \frac{Q}{q} \cdot \frac{t}{a}.$$

Le quotient des quantités d'électricité Q et q étant un nombre abstrait, et le rapport $\frac{a}{t}$ une vitesse, la résistance r est l'inverse d'une vitesse.

On peut d'ailleurs imaginer une expérience dans laquelle cette vitesse aura une signification physique.

Considérons une sphère de rayon R chargée d'une masse Q d'électricité et supposons qu'on mette cette sphère en communication avec le sol par un conducteur de résistance r.

Le potentiel V de cette sphère est égal à $\frac{Q}{R}$; il diminue dès que la communication avec le sol est établie, mais, si la sphère se contracte en même temps que la charge diminue, il peut arriver que le potentiel reste constant.

Lorsque cette condition est réalisée, les deux termes de la fraction qui représente le potentiel varient avec le temps de manière qu'on ait toujours

$$R\,dQ = Q\,dR.$$

La loi d'Ohm donne aussi, en tenant compte de cette relation,

$$dQ = \frac{V}{r}\,dt = \frac{1}{r}\cdot\frac{Q}{R}\,dt = \frac{1}{r}\,\frac{dQ}{dR}\,dt;$$

par suite,

$$\frac{1}{r} = \frac{dR}{dt}.$$

Ainsi la résistance r d'un conducteur peut être considérée comme l'inverse de la vitesse constante $\frac{dR}{dt}$ avec laquelle on doit faire décroître le rayon d'une sphère pour que son potentiel conserve une valeur invariable, malgré la perte d'électricité, quand on la fait communiquer avec le sol par le conducteur considéré.

155. Réseaux de conducteurs. — Règles de Kirchhoff. — Supposons que des conducteurs linéaires, de natures, de longueurs et de sections différentes, soient réunis les uns aux autres par des liaisons complexes; le partage du courant entre ces différents conducteurs, lorsque le régime permanent est établi, doit satisfaire aux deux conditions suivantes qui se déduisent immédiatement de la loi d'Ohm.

1° *Si plusieurs conducteurs aboutissent à un même point, la somme algébrique des intensités des courants sur chacun d'eux, comptées à partir de ce point, est nulle.*

En effet, puisqu'il ne peut y avoir accumulation d'électricité au point considéré, qui forme un des *nœuds* du réseau, il faut que la quantité d'électricité apportée par une partie des con-

ducteurs soit égale à celle qui est emportée par les autres pendant le même temps ; on doit donc avoir

$$(3) \qquad \Sigma i = 0.$$

2° *Si plusieurs conducteurs forment un polygone fermé, la somme des produits de la résistance de chaque conducteur par l'intensité du courant qui le traverse est nulle.* On a alors

$$(4) \qquad \Sigma ir = 0.$$

Considérons, en effet, une série de conducteurs de résistances a, b, c,..... l (fig. 36), qui forment les côtés d'un poly-

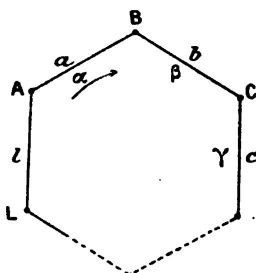


Fig. 36.

gone fermé, dont les sommets A, B, C,..... L sont les points d'attache à d'autres conducteurs du réseau. Désignons par A, B,..... L les potentiels aux sommets respectifs et par α, β, γ,..... λ les intensités des courants successifs, comptés positivement quand on parcourt le circuit dans un sens déterminé. Ces intensités ne sont pas égales entre elles, à cause des courants que peuvent emporter ou amener les autres conducteurs. On aura, pour les conducteurs successifs,

$$a\alpha = A - B, \quad b\beta = B - C, \quad \ldots\ldots \quad l\lambda = L - A.$$

Ajoutant toutes ces équations membre à membre, les potentiels disparaissent et il reste

$$a\alpha + b\beta + \ldots\ldots + l\lambda = \Sigma\, ir = 0.$$

156. Courants dérivés. — Pont de Wheatstone. — Considérons le cas où le circuit se divise en arcs multiples, entre

deux points A et B (fig. 37). Soit I l'intensité du courant avant le point A et après le point B, a, b,..... l les résistances des conducteurs, α, β,..... λ les intensités respectives des courants,

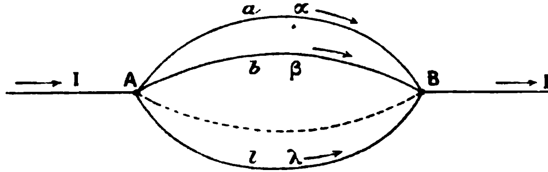


Fig. 37.

et enfin R la résistance du circuit unique qui équivaudrait au circuit multiple entre les deux mêmes points. On aura

$$I = \alpha + \beta + \cdots\cdots + \lambda = \Sigma i,$$
$$a\alpha = b\beta = \cdots\cdots l\lambda = IR.$$

Remplaçant les intensités α, β,..... dans la première équation par leurs valeurs tirées des suivantes en fonction de IR, il reste

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \cdots\cdots + \frac{1}{l} = \Sigma \frac{1}{r}.$$

Ainsi *l'inverse de la résistance d'un faisceau de conducteurs aboutissant aux mêmes points est égale à la somme des inverses des résistances des différents conducteurs séparés ;* en d'autres termes, *la conductance du faisceau est égale à la somme des conductances des différents conducteurs qui le constituent*, ce qui était évident.

L'une des applications les plus importantes correspond au problème du *Pont de Wheatstone.*

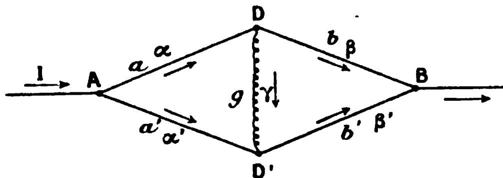


Fig. 38.

Un quadrilatère ADBD′ (fig. 38) est formé par quatre conducteurs dont les résistances sont respectivement a, b, b' et a';

l'une des diagonales DD' renferme la résistance g. Enfin un courant I aboutissant au point A traverse le réseau, où les courants dans les différentes parties sont α, α', β, β' et γ, pour émaner ensuite du point B avec l'intensité primitive. En appliquant les règles précédentes aux nœuds du réseau et aux circuits fermés, on obtient

$$I = \alpha + \alpha' = \beta + \beta',$$
$$\gamma = \alpha - \beta = \beta' - \alpha,$$
$$g\gamma = a'\alpha' - a\alpha = b\beta - b'\beta'.$$

Il n'y a en réalité que cinq équations distinctes, lesquelles permettent de déterminer les courants dans les cinq branches du réseau en fonction du courant principal I et des différentes résistances.

Lorsque les potentiels ont les mêmes valeurs aux nœuds D et D', le courant dans la diagonale est nul. On a alors $\gamma = 0$, $\alpha = \beta$, $\alpha' = \beta'$, et les dernières équations donnent

$$\frac{a'}{a} = \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{b'}{b}.$$

Pour que le courant soit nul dans la diagonale DD', c'est-à-dire que le pont soit *équilibré*, il suffit donc que les résistances des côtés du quadrilatère satisfassent à la condition

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad \text{ou} \quad ab' = ba'.$$

157. Circuits linéaires hétérogènes. — L'existence des forces électromotrices de contact entre les métaux modifie un

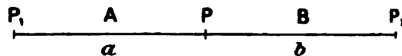


Fig. 39.

peu l'expression de la loi d'Ohm. Considérons deux points P_1 et P_2 (fig. 39) séparés par deux conducteurs différents A et B dont les résistances sont a et b. Soient V_1 et V_2 les potentiels

aux points P_1 et P_2, A et B les potentiels au point P, de part et d'autre de la surface de séparation des métaux. L'intensité du courant de P_1 en P_2 est

$$I = \frac{V_1 - A}{a} = \frac{B - V_2}{b} = \frac{V_1 - V_2 + B - A}{a + b}.$$

Désignant par H_{ab} l'élévation brusque qu'éprouve le potentiel entre les métaux A et B quand on suit le courant, c'est-à-dire la force électromotrice de contact $B - A = B|A$ des conducteurs B et A, on peut écrire

$$I = \frac{V_1 - V_2 + H_{ab}}{a + b}.$$

Supposons maintenant qu'un circuit fermé soit composé de conducteurs différents A, B, C...., L (fig. 40).

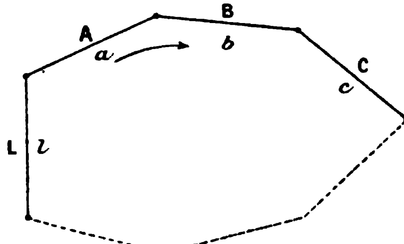


Fig. 40.

Appelons a, b, c,..... l, les résistances des différents conducteurs, A et A', B et B',.... les potentiels successifs aux extrémités de chacun d'eux, en suivant le contour dans un sens déterminé, et représentons de même par

$$H_{ab} = B - A', \; H_{bc} = C - B', \; \ldots\ldots \; H_{la} = A - L',$$

les forces électromotrices de contact successives.

S'il existe un courant dans le circuit, son intensité est la même dans toutes les branches et l'on a

$$I = \frac{A - A'}{a} = \frac{B - B'}{b} = \ldots\ldots = \frac{L - L'}{l},$$

$$I = \frac{(B - A') + (C - B') + \ldots\ldots + (A - L')}{a + b + c \; \ldots\ldots + l} = \frac{H_{ab} + H_{bc} + \ldots\ldots + H_{la}}{a + b + c + \ldots\ldots + l}.$$

Le numérateur de la dernière fraction est la somme algébrique ΣH des forces électromotrices de contact dans la chaîne des conducteurs ; c'est la force électromotrice E du circuit. Le dénominateur est la somme des résistances, ou la résistance totale R du circuit. On a donc

$$(5) \qquad I = \frac{\Sigma H}{R} = \frac{E}{R}.$$

Lorsque le circuit ne renferme que des métaux à la même température, la loi des tensions de Volta est applicable et la force électromotrice est nulle. Si la température n'est pas uniforme, ou plus généralement s'il existe des corps de la seconde classe, la force électromotrice E a une valeur déterminée.

158. Réseaux renfermant des forces électromotrices. — Lorsque les circuits renferment des forces électromotrices, la première règle de Kirchhoff n'est pas modifiée.

En effet, la somme des quantités d'électricité qui émanent d'un point où aboutissent différents conducteurs est toujours nulle, dans l'état permanent, car ce point ne peut être ni une source indéfinie d'électricité, ni un centre d'absorption.

La règle relative aux circuits fermés doit être interprétée autrement. Supposons que, dans le circuit précédent (fig. 40), les sommets du polygone correspondent aussi bien à un changement de métal qu'à un embranchement avec d'autres conducteurs. L'intensité du courant n'est plus la même sur chacune des branches du circuit; désignant par α, β, ... λ les intensités sur les différents conducteurs entre deux points successifs de contact ou d'embranchement, on a encore

$$a\alpha = A - A', \quad b\beta = B - B', \quad \ldots\ldots \quad l\lambda = L - L',$$

et, par suite,

$$(6) \qquad a\alpha + b\beta + \ldots\ldots + l\lambda = \Sigma\, ir = \Sigma\, H = E.$$

Ainsi, dans un circuit fermé, *la somme des produits de la résistance de chaque conducteur par l'intensité du courant correspondant est égale à la somme algébrique des forces électromotrices du circuit.*

Cette somme est nulle si le circuit est formé de conducteurs de même nature, ou de métaux à la même température, puisque ces derniers obéissent à la loi des tensions.

Les deux relations (5) et (6) fournissent les équations nécessaires à la détermination des intensités dans les diverses branches du circuit. Toute modification dans les résistances ou les forces électromotrices qui n'apportera aucun changement dans les équations sera évidemment sans influence sur l'intensité des courants. Ainsi :

1° On peut modifier à volonté la résistance d'une branche dans laquelle l'intensité est nulle et déplacer une force électromotrice sur une branche;

2° On peut introduire dans tous les conducteurs qui aboutissent à un même nœud des forces électromotrices égales et tendant à produire des courants qui s'approchent ou s'éloignent en même temps du nœud considéré, ces forces électromotrices s'annulant deux à deux dans tous les contours fermés qui passent par le nœud;

3° S'il existe dans une branche une force électromotrice e dirigée vers un nœud, on peut l'annuler par une force électromotrice $-e$ émanant du nœud, à condition d'ajouter la même force électromotrice e émanant du nœud sur toutes les branches qui aboutissent à ce nœud. En d'autres termes, quand on déplace une force électromotrice de manière à lui faire franchir un nœud, il faut la remplacer par une force électromotrice égale et de même sens général sur chacune des autres branches du nœud (1).

159. Conducteurs de forme quelconque. — Électrodes. — L'analogie de la conductibilité électrique avec la conductibilité calorifique, et de cette dernière avec les phénomènes d'électricité statique, nous permet d'établir directement quelques théorèmes relatifs à la propagation de l'électricité.

Considérons d'abord un milieu unique, isotrope et indéfini. Supposons que, pour les trois ordres de phénomènes différents, la température d'une part et le potentiel d'autre part soient maintenus constants sur différentes surfaces fermées S_1, S_2, ... S_n, et que, sur chacune des surfaces, les tempéra-

(1) BLAKESLEY, *Proc. of the Phy. Soc. London*, vol. XIII, pt. I, p. 65, 1894.

tures et les potentiels, t_1 et V_1, t_2 et V_2..... soient représentés par les mêmes nombres ou par des nombres proportionnels. Dans le problème calorifique, ces surfaces représenteront les sources de chaleur ; dans le problème d'électricité statique, ce sont les conducteurs; dans le problème de la propagation de l'électricité, on les appelle les *électrodes*.

La température et le potentiel en un point quelconque du milieu sont des fonctions des coordonnées définies par la condition que ces fonctions prennent des valeurs déterminées sur les surfaces limites et satisfassent dans l'intervalle de ces surfaces à la condition

$$\Delta t = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta V = 0.$$

La température et le potentiel auront donc en chaque point des valeurs égales ou dans un rapport constant. Les surfaces isothermes et les surfaces de niveau électrique seront identiques dans toute l'étendue du milieu. Les flux de chaleur, de force et d'électricité, suivent les mêmes chemins et sont proportionnels entre eux.

D'après cela, toutes les fois qu'un problème de propagation uniforme de la chaleur ou d'équilibre électrostatique aura été résolu, le problème correspondant de propagation électrique à l'état permanent se trouvera résolu de la même manière.

Nous avons vu, en particulier, que si on se donne les potentiels $V_1, V_2.., V_n$ sur les surfaces fixes $S_1, S_2.., S_n$, c'est-à-dire les potentiels des différents conducteurs dans l'air, le potentiel est défini en chaque point du milieu et le problème d'équilibre n'a qu'une solution. De même, si le milieu diélectrique est remplacé par un milieu conducteur, et que les potentiels soient maintenus constants sur les mêmes surfaces $S_1, S_2..., S_n$, le flux d'électricité est déterminé en chaque point et l'état permanent est unique.

Supposons maintenant que deux diélectriques, de pouvoirs inducteurs K_1 et K_2, soient séparés par une surface S. Le flux d'induction étant le même de part et d'autre de la surface, la condition de continuité est, en comptant la normale n à la surface dans le même sens pour les deux milieux,

$$K_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} = K_2 \frac{\partial V_2}{\partial n}.$$

Si l'on remplace les diélectriques par des conducteurs dont les conductivités soient c_1 et c_2, le flux d'électricité est encore le même de part et d'autre de la surface S, ce qui donne

$$c_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} = c_2 \frac{\partial V_2}{\partial n}.$$

Si donc, dans un phénomène électrostatique renfermant des diélectriques dont les pouvoirs inducteurs sont $K_1, K_2, \ldots K_n$, on remplace les diélectriques par des milieux dont les conductivités $c_1, c_2, \ldots c_n$ soient respectivement proportionnelles aux pouvoirs inducteurs correspondants, le flux d'électricité en chaque point sera proportionnel au flux d'induction du système électrostatique corrélatif.

Ainsi, tous les problèmes qui ont été résolus en électrostatique pour un ensemble de diélectriques fournissent aussi la solution de problèmes correspondants relatifs à la propagation de l'électricité. Tels sont, par exemple, les cas suivants :

Sphères concentriques (**50** et **135**).

Cylindres à section circulaire, concentriques (**57**) ou excentriques (**122**).

Plans parallèles (**58**).

Condensateurs fermés à épaisseur constante (**56**).

160. Conducteurs non homogènes. — On a vu aussi (**128**) qu'en assimilant un diélectrique à un milieu de pouvoir inducteur K_1, dans lequel seraient disséminées de petites sphères de pouvoir inducteur K_2, dont l'ensemble des volumes est une fraction h de l'espace général, le milieu ainsi constitué se comporte comme un diélectrique homogène dont le pouvoir inducteur K serait représenté par

$$K = K_1 \frac{K_2 + 2K_1 + 2h(K_2 - K_1)}{K_2 + 2K_1 - h(K_2 - K_1)}.$$

Dans des conditions analogues, la conductivité moyenne d'un milieu de conductivité c_1, renfermant de petites sphères de conductivité c_2, a pour expression

$$c = c_1 \frac{c_2 + 2c_1 + 2h(c_2 - c_1)}{c_2 + 2c_1 - h(c_2 - c_1)}.$$

Lorsque la conductivité c_2 des sphères est très grande par rapport à c_1, il reste

$$c = c_1 \frac{1+2h}{1-h}.$$

161. Conducteurs à deux dimensions. — Les considérations qui précèdent s'appliquent aux milieux indéfinis. Rien n'est évidemment changé si on limite le milieu conducteur par une surface formée tout entière par des lignes de flux du système indéfini. Pour un conducteur limité situé dans un milieu isolant, la surface extérieure, quelle qu'elle soit, est toujours parallèle aux lignes de flux et par conséquent, si le milieu est isotrope, normale aux surfaces de niveau.

Tel est le cas de la propagation de l'électricité dans une plaque mince, que l'on peut considérer comme un conducteur à deux dimensions. Les lignes d'égal potentiel se détermineront expérimentalement par la condition qu'aucun courant ne s'établisse dans un fil extérieur dont une des extrémités est mise en communication avec un point fixe de la plaque, tandis que l'autre est déplacée dans son plan. Les résultats donnés par l'expérience sont en parfaite concordance avec ceux qu'on déduit des formules de Fourier et apportent une nouvelle confirmation de l'analogie qui existe entre les deux ordres de phénomènes.

S'il n'y a aucune perte par le milieu extérieur, l'équation de Laplace, en dehors des électrodes, devient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

et la dérivée du potentiel suivant la normale est nulle en chaque point du contour de la plaque.

Ce problème se confond avec celui de l'équilibre électrique dans le cas d'une distribution cylindrique (**119** et suiv.). Dans un plan traversé normalement en des points A_1, A_2, A_3.. par des lignes parallèles de densités λ_1, λ_2, λ_3..., le potentiel en un point P, situé à des distances r_1, r_2, r_3... de ces lignes, avait pour expression

$$V = C^{te} - 2\Sigma\lambda \mathfrak{L}.r.$$

Le flux de force émis par l'une de ces lignes dans la couche d'épaisseur ε comprise entre deux plans parallèles, perpendiculaires à la ligne considérée, est $4\pi\lambda\varepsilon$.

Dans le problème de propagation, si l'on considère les mêmes portions de lignes comme des sources d'électricité, c'est-à-dire comme des *électrodes*, les flux d'électricité ou les intensités des courants, sont

$$i_1 = c\,4\pi\lambda_1\varepsilon,$$
$$i_2 = c\,4\pi\lambda_2\varepsilon,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remplaçant les λ par leurs valeurs tirées de ces équations, l'expression du potentiel en P devient

$$V = C^{te} - \sum \frac{i\,\mathcal{L}.\,r}{2\pi c\varepsilon} = C^{te} - \frac{1}{2\pi c\varepsilon}\sum i\,\mathcal{L}.\,r.$$

Un cas particulier intéressant est celui de deux électrodes A_1 et A_2 fournissant des courants i et $-i$ égaux et de signes contraires; on a alors

$$V = C^{te} - \frac{i}{2\pi c\varepsilon}\,\mathcal{L}.\,\frac{r_1}{r_2}.$$

Les lignes de flux sont des segments de cercle passant par les deux points A et A′ (fig. 32); les lignes de niveau sont des circonférences ayant leurs centres sur la ligne A A′ et telles que ces deux points soient conjugués par rapport à chacune d'elles. Il est évident, d'après la remarque faite plus haut, que le problème restera le même si, au lieu d'une plaque indéfinie, on considère une plaque circulaire ayant les deux électrodes sur sa circonférence, ou encore une plaque quelconque comprise entre deux segments circulaires passant par les points A et A′.

162. Calcul des résistances. — Quel que soit le conducteur que l'on considère, les surfaces de niveau étant déterminées, on peut toujours le supposer divisé, par deux séries de surfaces parallèles aux lignes de flux, en filaments infiniment déliés, dont chacun propage un tube de flux et est assimilable à un fil conducteur de section variable. L'ensemble du

système constitue un faisceau de conducteurs (156) entre les deux électrodes; la conductance totale, ou l'inverse de la résistance, est la somme des conductances de tous les filaments ou des inverses de leurs résistances.

Le calcul sera en général très compliqué; mais, si l'on connaît par expérience la différence des potentiels sur les deux électrodes et le flux d'électricité correspondant, on en déduira la résistance totale du milieu conducteur par la formule d'Ohm.

Prenons comme exemple le cas de deux électrodes A_1 et A_2 dans un milieu indéfini. Nous pouvons supposer que ces électrodes sont de petites sphères de rayon ρ. Soient V_1 et V_2 leurs potentiels et I la valeur absolue du flux d'électricité qui correspond à chacune d'elles. Si le rayon ρ est négligeable par rapport à la distance A_1A_2, le potentiel au voisinage des sphères, dans le système électrostatique correspondant, est en raison inverse de la distance r au centre. Pour la surface même des sphères, on peut donc écrire

$$V_1 = - V_2 = \frac{b}{\rho},$$

et la force électrostatique est $F = \frac{b}{\rho^2}$.

L'intensité du courant devient alors

$$I = cSF = 4\pi c b = 4\pi c V_1 \rho = - 4\pi c V_2 \rho,$$
$$I = 2\pi c \rho (V_1 - V_2).$$

La résistance totale R du milieu serait

$$R = \frac{1}{2\pi c \rho}.$$

Le même raisonnement convient au cas d'un milieu indéfini d'un côté et terminé de l'autre par un plan sur lequel seraient placées deux électrodes hémisphériques A_1 et A_2; la résistance serait alors double de la précédente.

Il est digne de remarque que la résistance ainsi calculée ne dépende que des dimensions des électrodes et de la nature

du milieu, sans que la distance des électrodes intervienne. Ce cas peut être considéré comme correspondant à celui de la terre, lorsque deux points du sol sont en communication avec des électrodes maintenues à des potentiels égaux en valeurs absolues et de signes contraires.

163. Distribution de l'électricité sur les conducteurs linéaires. — Lorsque le régime est permanent, la densité étant nulle à l'intérieur des conducteurs (**151**), le potentiel est dû uniquement à l'électricité qui existe sur la surface ; cette couche électrique est distribuée suivant une loi qu'on peut déterminer dans quelques cas simples.

Considérons un fil cylindrique rectiligne, de diamètre très petit relativement à sa longueur, et dont tous les points sont dans des conditions identiques par rapport aux conducteurs voisins. Si ce fil était électrisé et en équilibre, la distribution de la couche superficielle, à quelque distance des extrémités, serait uniforme, c'est-à-dire que toute portion de surface comprise entre deux plans perpendiculaires à l'axe et à l'unité de distance porterait une même quantité d'électricité : soit λ cette quantité, qu'on peut appeler la densité linéaire du fil.

Le potentiel V du fil est d'ailleurs proportionnel à la charge totale et, par suite, à la charge de chaque unité de longueur. On peut donc écrire

$$V = A\lambda,$$

expression dans laquelle le coefficient A désigne une quantité constante, qui dépend de la section du fil et de la position des conducteurs extérieurs.

La proportionnalité du potentiel à la densité en chaque point ne peut pas être considérée comme une propriété générale, mais cette proportionnalité paraît évidente pour les câbles où le fil conducteur est entouré d'une couche diélectrique d'épaisseur constante enveloppée elle-même d'un conducteur en communication avec le sol. Les différentes portions du fil sont alors sans action appréciable les unes sur les autres et le potentiel en chaque point est dû seulement aux masses électriques les plus voisines. Si on appelle γ la capacité de l'unité de longueur du fil, c'est-à-dire la charge

qui correspondrait à l'unité de potentiel, la charge d'une longueur dx au potentiel V sera égale à $\gamma V dx$.

164. Pertes par la surface. — Considérons encore un fil cylindrique traversé par un courant et supposons le régime permanent établi, mais avec déperdition d'électricité par la surface. Le flux n'est plus parallèle à l'axe dans toute l'étendue d'une section normale ; il tend à devenir perpendiculaire au fil au voisinage immédiat du contour. Les surfaces de niveau S, S' (fig. 41) sont encore planes dans leur plus grande

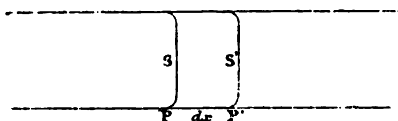


Fig. 41.

étendue, mais elles s'infléchissent sur les bords pour se raccorder finalement avec la surface extérieure du fil.

La résistance extérieure d'une portion du fil est évidemment en raison inverse de sa longueur et celle de l'élément dx peut être représentée par $\frac{\rho'}{dx}$, ρ' désignant la résistance dans le milieu relative à l'unité de longueur. La perte d'électricité par la surface qui correspond à l'élément dx est le quotient du potentiel V par la résistance, c'est-à-dire $\frac{V}{\rho'}dx$.

Lorsque le régime permanent est établi, le flux d'électricité qui pénètre par la surface S de l'élément de volume de longueur dx doit être égal à la somme des flux qui sortent par la surface opposée S' et par la surface latérale, ce qui donne

$$-cS\frac{dV}{dx} = -cS\left(\frac{dV}{dx} + \frac{d^2V}{dx^2}dx\right) + \frac{1}{\rho'}V dx,$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1}{cS\rho'}V.$$

Le produit cS représente aussi l'inverse de la résistance ρ

du fil par unité de longueur; en posant $\beta^2 = \frac{1}{cS\rho'} = \frac{\rho}{\rho'}$, il vient

$$\frac{d^2V}{dx^2} - \beta^2 V = 0 \tag{7}$$

C'est l'équation différentielle de Fourier relative à la propagation de la chaleur dans une barre cylindrique, en tenant compte du rayonnement par la surface. L'intégrale de cette équation peut être mise sous la forme

$$V = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}.$$

Pour déterminer les constantes A et B, il suffit de connaître les potentiels V_0 et V_1 en deux points P_0 et P_1 situés à une distance l. Le potentiel en un point P situé à une distance x de P_0 et $l - x$ ou y de P_1, a pour valeur

$$V = V_0 \frac{e^{\beta y} - e^{-\beta y}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}} + V_1 \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}. \tag{8}$$

Si le point P_1 est au sol, on a $V_1 = 0$ et, par suite,

$$V = V_0 \frac{e^{\beta y} - e^{-\beta y}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}. \tag{9}$$

Si le fil est indéfini, la constante A est nulle; on a alors

$$V = V_0 e^{-\beta x}.$$

L'intensité du courant I dans le fil a pour expression

$$I = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dV}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\rho\rho'}} \cdot \frac{V_0(e^{\beta y} + e^{-\beta y}) - V_1(e^{\beta x} + e^{-\beta x})}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}, \tag{10}$$

et la perte latérale i par unité de longueur

$$i = -\frac{dI}{dx} = \frac{1}{\rho} \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{V}{\rho'}.$$

Lorsque le point P_1 communique au sol, on a

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{\rho\rho'}} \cdot \frac{e^{\beta y} + e^{-\beta y}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}} = \frac{V}{\sqrt{\rho\rho'}} \cdot \frac{e^{\beta y} + e^{-\beta y}}{e^{\beta y} - e^{-\beta y}}, \tag{11}$$

et, quand le fil est indéfini,

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{\rho\rho'}} e^{-\beta x} = I_0 e^{-\beta x}.$$

Dans ce dernier cas, la constante I_0 représente l'intensité du courant à l'origine du fil.

165. Résistance d'un conducteur avec perte latérale. — D'après l'équation (11), la résistance totale R que doit vaincre le courant électrique depuis le point P jusqu'au sol, en tenant compte des dérivations, a pour expression

$$R = \sqrt{\rho\rho'} \frac{e^{\beta y} - e^{-\beta y}}{e^{\beta y} + e^{-\beta y}}.$$

Considérons, comme problème plus général, un fil continu dont différents points $P_1, P_2, P_3 \ldots$ communiquent au sol par des conducteurs de résistance $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \ldots$ Appelons R_1 la résistance totale depuis le point P_1 jusqu'au sol, R_2 la résistance à partir du point $P_2 \ldots$, etc.; enfin $r_1, r_2, r_3 \ldots$ les résistances du fil entre les points de contact successifs P_1 et P_2, P_2 et $P_3, \ldots$ A partir du point P_1, la conductance totale est égale à la somme des conductances que présentent les différents chemins, ce qui donne l'équation

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{r_1 + R_2}. \tag{12}$$

On aurait une suite d'équations analogues, et finalement

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{\rho_1} + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\rho_2} + \cdots + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\rho_n} + \cfrac{1}{r_n + R_{n+1}}}}}.$$

C'est le cas des fils télégraphiques aériens quand on veut tenir compte de la dérivation par les poteaux.

Si, la dérivation étant continue, on appelle R la résistance à partir du point P, R — dR la résistance à partir du point voisin P′ à la distance dx, les coefficients ρ et ρ' ayant les mêmes significations que dans le problème précédent, l'équation (12) devient

$$\frac{1}{R} = \frac{dx}{\rho'} + \frac{1}{\rho\, dx + R - dR},$$

$$\frac{dx}{\rho'} = \frac{1}{R} - \frac{1}{\rho\, dx + R - dR} = \frac{\rho\, dx - dR}{R^2},$$

$$\frac{dR}{\rho\rho' - R^2} = \frac{dx}{\rho'}.$$

L'intégrale de cette équation est

$$\frac{R + \sqrt{\rho\rho'}}{R - \sqrt{\rho\rho'}} = C e^{2\beta x},$$

$$R = \sqrt{\rho\rho'}\, \frac{C e^{2\beta x} + 1}{C e^{2\beta x} - 1}.$$

La constante C est déterminée par les conditions limites. Si la résistance est R_1 à partir du point où $x = l$, on en déduit

$$C = \frac{R_1 + \sqrt{\rho\rho'}}{R_1 - \sqrt{\rho\rho'}}\, e^{-2\beta l},$$

$$\frac{R + \sqrt{\rho\rho'}}{R - \sqrt{\rho\rho'}} = \frac{R_1 + \sqrt{\rho\rho'}}{R_1 - \sqrt{\rho\rho'}}\, e^{2\beta(x-l)}.$$

RÉGIME VARIABLE

166. Application des formules de Fourier. — Le problème de la propagation de l'électricité dans un conducteur, lorsqu'on n'atteint pas un régime permanent, par exemple dans le cas de la décharge d'une batterie par un fil, présente de grandes difficultés.

Le flux d'électricité qui pénètre dans un élément de volume n'est pas nul, puisque la charge est variable avec le temps; mais on ne peut plus dire à priori si la densité intérieure varie, ou bien si elle reste encore nulle, l'accroissement de la charge se faisant seulement à la surface.

En l'absence de données expérimentales suffisantes, l'idée la plus simple paraît être de poursuivre la même analogie entre la propagation de la chaleur et celle de l'électricité, et d'essayer l'application des formules de Fourier à l'état variable des conducteurs. Cette extension de la méthode revient à admettre implicitement que le flux d'électricité est en chaque point proportionnel au champ électrique ou à la dérivée du potentiel de toutes les masses agissantes.

La proportionnalité du flux au champ paraît assez naturelle s'il est vrai que les forces électriques agissent réellement à distance et d'une manière instantanée; mais, si les actions électriques se transmettent au contraire par l'intermédiaire du milieu ambiant, en vertu de ce que nous avons appelé l'*élasticité électrique* de ce milieu, il est nécessaire d'admettre que l'état de tension électrique s'établit de proche en proche. Un effet physique de cette nature doit nécessairement exiger un temps fini, quelque faible qu'il soit. Cette question du temps, qui ne joue aucun rôle dans tous les problèmes d'équilibre ou de régime permanent, pourra avoir un effet prédominant dans les phénomènes de l'état variable.

On peut admettre, en d'autres termes, que la force électrique se propage avec une vitesse extrêmement grande, mais non infinie, ou bien que le potentiel d'une masse électrique se propage lui-même avec une vitesse finie.

Dans ce cas, il est possible encore que le flux d'électricité en chaque point soit proportionnel au champ actuel, mais ce dernier ne sera pas uniquement déterminé par la position des masses agissantes, il dépendra aussi de la vitesse de ces masses, et les effets pourront être très différents suivant que la vitesse de déplacement des masses agissantes sera ou non du même ordre de grandeur que la vitesse de propagation des potentiels.

Enfin nous verrons, à propos des phénomènes d'induction électrodynamique, que le déplacement des courants électriques

et leurs changements d'intensité produisent des forces électromotrices nouvelles, qu'il est possible de calculer dans un certain nombre de cas, et qui peuvent modifier beaucoup les résultats relatifs au régime variable.

Les deux effets que nous venons de signaler sont peut-être produits par le même mécanisme; nous n'en tiendrons pas compte pour le moment.

C'est seulement sous le bénéfice de ces différentes réserves que nous pourrons encore appliquer les formules de Fourier. De toute façon, les résultats auxquels elles conduisent doivent être d'autant plus voisins de la vérité que les modifications de l'état variable seront plus lentes; ces résultats représentent d'une manière très approchée la propagation de l'électricité dans les câbles sous-marins et s'appliquent en toute rigueur aux expériences de Gaugain sur la propagation dans les corps très résistants, comme des fils de coton ou des colonnes d'huile.

167. État variable dans un conducteur cylindrique. — Considérons donc, dans un conducteur cylindrique, l'élément de volume de longueur dx compris entre deux sections infiniment voisines S et S' (fig. 41). Le potentiel en un point P n'est plus une simple fonction de x, c'est-à-dire de la position de ce point, mais aussi une fonction du temps t. Pendant l'intervalle de temps dt, le gain d'électricité de cet élément de volume est égal à l'excès du flux qui pénètre par la section S sur le flux qui sort par la section S', diminué de la perte par la surface extérieure, c'est-à-dire

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx\,dt - \frac{1}{\rho'}V\,dx\,dt = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho'}V\right]dx\,dt.$$

L'accroissement de charge $\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho'}V\right)dt$ par unité de longueur produira une variation de potentiel $\frac{\partial V}{\partial t}\,dt$. On admettra encore que le rapport de la charge au potentiel reste constant sur chacun des éléments du conducteur et égal à sa capacité électrostatique, c'est-à-dire que l'électricité libre se porte entièrement à la surface. En désignant par γ la capacité de

l'unité de longueur, le produit γdx représente la capacité de l'élément dx et l'on a

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho'}V = \gamma\frac{\partial V}{\partial t}.$$

En posant $\alpha^2 = \gamma\rho$, et $\rho = \beta^2\rho'$, cette équation devient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \alpha^2\frac{\partial V}{\partial t} - \beta^2 V = 0. \tag{1}$$

Lorsque la perte par la surface est négligeable, le coefficient β^2 est nul et il reste

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \alpha^2\frac{\partial V}{\partial t} = 0. \tag{2}$$

Remarquons d'ailleurs que si l'on pose

$$U = Ve^{\frac{\beta^2 t}{\alpha^2}} = Ve^{\frac{t}{\gamma\rho'}},$$

l'équation (1) prend la forme de l'équation (2) et devient

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \alpha^2\frac{\partial U}{\partial t} = 0.$$

Dans les deux cas, qu'il y ait ou non perte latérale, si les conditions aux limites sont invariables, le potentiel V est d'abord une fonction de x et de t, qui devient finalement une simple fonction de x lorsque le régime est établi.

L'intégrale générale de cette équation (1) a été donnée par Fourier sous plusieurs formes.

Supposons qu'un fil de longueur l, primitivement à l'état neutre, communique au sol par son extrémité éloignée et que l'origine du fil soit portée brusquement au potentiel constant V_0; le potentiel V à la distance x de l'origine du fil et à l'époque t, à partir de l'établissement du contact, est

$$\frac{V}{V_0} = \frac{e^{\beta(l-x)} - e^{-\beta(l-x)}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}} - 2\pi e^{-\frac{t}{\gamma\rho'}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n}{n^2\pi^2+\beta^2 l^2}e^{-\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2 l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{3}$$

Lorsque la perte latérale est négligeable, ou $\beta = 0$, cette expression devient

$$(4) \qquad \frac{V}{V_0} = \frac{l-x}{l} - 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n\pi} e^{-\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2 l^2}t} \sin\frac{n\pi}{l}x.$$

168. Durée de propagation relative. — La dernière équation montre que, s'il n'y a pas de déperdition, le rapport du potentiel à une distance x au potentiel à l'origine est le même, pour deux fils différents, en deux points dont les distances à l'origine sont proportionnelles aux longueurs totales des fils, lorsque le rapport $\frac{t}{\alpha^2 l^2}$ a la même valeur.

Le temps t nécessaire pour que le potentiel en un point quelconque, au milieu du fil par exemple, atteigne une fraction déterminée du potentiel initial, ou du potentiel final, est donc proportionnel à $\alpha^2 l^2$ ou $\gamma\rho l^2$, c'est-à-dire au carré de la longueur du fil, à la capacité et à la résistance de l'unité de longueur. Cette condition définit ce qu'on peut appeler la *durée de prolongation relative* de l'électricité.

Il n'existe pas pour la propagation des phénomènes électriques, dans les conditions qui précèdent, une vitesse déterminée comme pour le son ou la lumière. La vitesse apparente que l'on peut évaluer, en supposant la propagation uniforme et en déterminant le temps nécessaire pour que l'électrisation produite à l'origine d'un fil ait un effet sensible à une certaine distance, dépend des constantes caractéristiques du fil et de la sensibilité des organes par lesquels on met ces effets électriques en évidence.

169. Fil indéfini. — L'intégrale générale de Fourier se prête difficilement aux applications numériques; mais on peut choisir d'abord des conditions plus simples qui correspondent en réalité à plusieurs des phénomènes observés et permettront de retrouver les principaux résultats obtenus par Lord Kelvin pour la transmission des signaux dans les câbles (¹).

Considérons un fil isolé, dont la déperdition par la surface est négligeable, primitivement à l'état neutre et de longueur indéfinie, ou du moins de longueur telle que l'état en un point

(¹) W. Thomson, *Proc. Roy. Soc.*, t. VII, p. 382; 1855.

ne soit pas sensiblement modifié par celui de l'extrémité la plus éloignée. On établit à l'origine du fil un potentiel constant V_0. Au bout du temps t, le potentiel à la distance x est déterminé par l'équation (2).

Pour un second fil placé dans les mêmes conditions que le premier et dont la nature différente est définie par un autre coefficient α', on aura de même

$$(2)' \qquad \frac{\partial^2 V'}{\partial x'^2} - \alpha'^2 \frac{\partial V'}{\partial t'} = 0.$$

Posons $x' = mx$, $t' = nt$, m et n étant des constantes; nous pourrons alors considérer le potentiel V' comme une fonction des variables x et t, et l'équation $(2)'$ deviendra

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} - \frac{\alpha'^2 m^2}{n} \cdot \frac{\partial V'}{\partial t} = 0.$$

Si l'on choisit les coefficients m et n de façon qu'on ait

$$\alpha^2 = \frac{\alpha'^2 m^2}{n}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\alpha^2 x^2}{t} = \frac{\alpha'^2 x'^2}{t'},$$

les potentiels V et V' satisfont à la même équation différentielle (2) et aux mêmes conditions limites; ils représentent donc la même fonction de x et de t.

Ainsi, pour des fils indéfinis, ce qui dans la pratique équivaut à des fils assez longs pour que la durée de la propagation ait une valeur sensible, le potentiel V ne change pas lorsque le rapport $\frac{\alpha^2 x^2}{t} = 4z^2$ conserve la même valeur; c'est donc une fonction de ce rapport ou de la variable z.

Il en résulte déjà cette conséquence établie plus haut (**168**) que le temps nécessaire pour provoquer à la distance x un potentiel déterminé, ou, plus exactement, une fraction déterminée du potentiel à l'origine, est proportionnel au carré de la distance et au coefficient α^2 qui caractérise le fil.

Dans ces conditions, l'équation (2) ne renferme réellement qu'une variable indépendante z et elle devient

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + 2z \frac{dV}{dz} = 0;$$

on en déduit aisément

$$V = A\int_0^z e^{-z^2}dz + B.$$

L'intégrale n'a pas d'expression simple, mais elle se présente dans un grand nombre de problèmes, par exemple dans la théorie des probabilités; les tables en ont été calculées, de sorte que ses valeurs numériques sont connues. Entre les limites o et ∞, elle est égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On déterminera les constantes A et B par les conditions aux limites. Pour $z=0$, c'est-à-dire $x=0$ ou $t=\infty$, $V=V_0$; pour $z=\infty$, c'est-à-dire $x=\infty$ ou $t=0$, $V=0$. Il en résulte

$$(5) \qquad \frac{V}{V_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-z^2}dz.$$

Pour une distance quelconque x, le second membre est d'abord nul, quand on fait $t=0$ ou $z=\infty$, et ne prend une valeur appréciable que si $z<2$. En posant

$$a = \frac{\alpha^2 x^2}{4} = z^2 t,$$

le potentiel V ne commence à devenir sensible qu'à partir de l'époque où l'on a $4t=a$; il croît ensuite d'une manière continue jusqu'à la valeur maximum V_0.

A la même distance, l'intensité I du courant est

$$(6) \qquad \begin{cases} I = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_0}{\rho}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\frac{z}{x} = \frac{V_0 x}{\rho\sqrt{\pi a}}z e^{-z^2}, \\ I = \frac{2V_0}{\rho\sqrt{\pi}\,x}\sqrt{\frac{a}{t}}\,e^{-\frac{a}{t}} = \frac{V_0\alpha}{\rho\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{a}{t}}\,e^{-\frac{a}{t}}. \end{cases}$$

Cette intensité est une fonction de z ou du temps; elle est nulle pour $z=\infty$ et $z=0$, c'est-à-dire $t=0$ et $t=\infty$, et devient maximum pour $2z^2=1$. L'époque t_m du maximum est donc

$$t_m = 2a = \frac{\alpha^2 x^2}{2} = \frac{\gamma\rho}{2}x^2.$$

La valeur I_m du courant maximum,

$$I_m = \frac{2V_0}{\rho\sqrt{2\pi e}} \cdot \frac{1}{x},$$

est en raison inverse de la distance x et se produit à une époque proportionnelle au carré de la distance.

Les variations d'intensité sont donc d'autant plus lentes et moins marquées qu'on s'éloigne davantage de l'origine.

170. Phénomènes périodiques. — Si le potentiel à l'origine varie d'une manière périodique, les mêmes troubles se propagent dans le fil; au bout de quelque temps, il s'établit un état de régime et le potentiel en un point quelconque éprouve évidemment des oscillations de même période que celle de la source. A mesure que la distance augmente, les maxima de potentiel s'affaiblissent et se produisent avec un retard croissant, c'est-à-dire que le potentiel présente une différence de phase avec sa valeur à l'origine.

Supposons encore qu'il s'agisse d'un fil indéfini et que les variations soient assez lentes pour que l'on puisse appliquer les formules de Fourier, avec toutes les restrictions qui précèdent. Si le potentiel à l'origine varie suivant la loi simple $A\cos\omega t$, que l'on peut représenter par la partie réelle d'une quantité complexe

$$(7) \qquad V_0 = A\cos\omega t = Ae^{i\omega t},$$

dont la période est $T = \frac{2\pi}{\omega}$, le potentiel à la distance x sera donné par une expression de la forme

$$(8) \qquad V = Ae^{-mx}\cos(\omega t - nx) = Ae^{-(m+in)x+i\omega t}.$$

D'après l'équation (2), les constantes m et n doivent satisfaire à la condition complexe

$$(m + in)^2 = \alpha^2 i\omega,$$

ou, en quantités réelles,

$$(9) \qquad 2mn = \alpha^2\omega, \quad \text{et} \quad m^2 = n^2 = \frac{\alpha^2\omega}{2} = \frac{\gamma\rho}{2}\omega.$$

L'ondulation initiale se propage le long du fil avec amor-

tissement et la perte de phase est proportionnelle à la distance. La longueur d'onde sur le fil est la distance λ des deux points les plus voisins qui se trouvent dans la même phase; on a donc

$$(10) \qquad \lambda = \frac{2\pi}{n} = \frac{\omega T}{n}.$$

Il existe alors une véritable vitesse U de propagation des ondes; c'est l'espace parcouru pendant l'unité de temps, ou le quotient de la longueur d'onde par la période, c'est-à-dire

$$(11) \qquad U = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{n} = \frac{2n}{\gamma\rho} = \sqrt{\frac{2\omega}{\gamma\rho}} = \sqrt{\frac{4\pi}{\gamma\rho T}}.$$

Le carré de cette vitesse de propagation est en raison inverse de la période.

L'intensité du courant peut s'écrire, en faisant $m = n$,

$$I = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial x} = An\sqrt{2}\,e^{-nx}\cos\left(\omega t - nx + \frac{\pi}{4}\right).$$

La phase du courant est donc en avance d'un huitième de circonférence sur celle du potentiel.

Si le fil a une longueur limitée l dont l'extrémité est en communication avec le sol, on peut, en posant $x + y = l$, représenter le potentiel à la distance x, ou $l - y$, par la somme de deux termes

$$V = Ae^{-nx}\cos(\omega t - nx) + A'e^{-ny}\cos(\omega t + \delta - ny) = V_1 + V_2.$$

L'équation (2), étant linéaire, sera satisfaite par la somme des fonctions V_1 et V_2, puisque chacune d'elles est une solution.

Pour que le potentiel soit constamment nul à l'extrémité du fil, il faut que pour $y = 0$ ou $x = l$, on ait identiquement $V = 0$, quel que soit le temps, ce qui donne les conditions

$$\delta = -nl, \qquad A' = -Ae^{-nl}.$$

Tout se passe donc comme si les ondes directes V_1 interféraient avec les ondes V_2 qui se propagent en sens contraire,

dont l'amplitude est $Ae^{-n(l+y)}$ et la perte de phase $n(l+y)$; ces dernières peuvent être considérées comme des ondes réfléchies à l'extrémité du fil, avec changement de signe du potentiel. Le même caractère se retrouvera dans l'intensité du courant résultant.

A part l'amortissement, c'est-à-dire au voisinage de l'extrémité du fil, le potentiel est encore nul sur certains *nœuds* déterminés par la condition

$$n(y+l)=nx+2p\pi=n(l-y)+2p\pi,$$
$$y=p\frac{\pi}{n}=p\frac{\lambda}{2}.$$

Les nœuds successifs sont distants d'une demi-longueur d'onde à partir de l'extrémité.

L'intensité du courant relatif au potentiel V_2 étant proportionnelle à $+\frac{\partial V_2}{\partial y}$, le courant résultant est nul quand on a

$$n(y+l)=nx+(2p+1)\pi=n(l-y)+(2p+1)\pi,$$
$$y=\frac{2p+1}{2}\frac{\pi}{n}=(2p+1)\frac{\lambda}{4};$$

il en résulte que les nœuds d'intensité sont intermédiaires aux nœuds de potentiel et le courant est maximum à l'extrémité même du fil.

171. Propagation dans les diélectriques. — Les conséquences de la formule de Fourier appliquée à l'état variable trouvent leur vérification pour les bons conducteurs, au moins d'une manière approchée, dans les phénomènes que présentent les câbles transatlantiques; les expériences de Gaugain [1] ont montré qu'elles conviennent exactement à la propagation de l'électricité dans les conducteurs médiocres tels que les fils de coton. Il est donc légitime de les appliquer à plus forte raison aux diélectriques, qui ne sont jamais dénués de conductibilité d'une façon absolue.

Un diélectrique soumis à l'action d'une force électromotrice peut être considéré comme étant à la fois le siège d'un phé-

(1) Gaugain, *Ann. de chim. et de phys.* [2], t. LIX, p. 5; 1860.

nomène de polarisation et d'un phénomène de conduction soumis aux lois ordinaires.

Supposons le diélectrique isotrope et soient K son pouvoir inducteur et c sa conductivité. L'équation générale de l'induction (**93**), appliquée à un élément de volume situé en un point où la densité est ρ, est

$$K\Delta V + 4\pi\rho = 0.$$

D'un autre côté, la variation de la charge $c\Delta V dv\,dt$ de l'élément dv pendant que le temps dt produit un accroissement correspondant de densité, ce qui donne

$$c\Delta V = \frac{d\rho}{dt} = -c\frac{4\pi\rho}{K};$$

on en déduit, en posant $T = \frac{K}{4\pi c}$,

$$(12) \qquad \rho = Ae^{-\frac{4\pi c}{K}t} = Ae^{-\frac{t}{T}}.$$

Cette équation montre que la densité ρ décroît d'une manière continue. Si donc, pour une cause quelconque, le diélectrique a reçu une charge intérieure, il ne la gardera pas indéfiniment; cette charge finira toujours par être purement superficielle, comme celle d'un bon conducteur, résultat évident à priori.

172. Résidus des condensateurs. — La première idée est de chercher si les phénomènes d'absorption et de charges résiduelles, auxquels donnent lieu les diélectriques, peuvent être expliqués par leur conductibilité propre, mais le calcul montre que cette considération est insuffisante. Examinons, en effet, à ce point de vue, la suite des phénomènes auxquels donnent lieu la charge ou la décharge d'un condensateur.

Soient C la capacité du condensateur, R la résistance du diélectrique, E la différence de potentiel des deux armatures à l'instant t, r la résistance du circuit qui réunit extérieurement les deux armatures, E_0 la force électromotrice d'une source auxiliaire intercalée dans ce circuit. L'accroissement

de charge $C\,dE$ du condensateur pendant le temps dt est égal à l'excès du flux d'électricité $\frac{E_0 - E}{r}\,dt$ fourni par la source sur le flux $\frac{E}{R}\,dt$ qui traverse le diélectrique, ce qui donne

$$(13)\qquad C\frac{dE}{dt} = \frac{E_0 - E}{r} - \frac{E}{R} = \frac{RE_0 - (R+r)E}{Rr}.$$

Si l'on admet que la charge soit nulle à l'origine du temps et que l'on pose $T_1 = \frac{CRr}{R+r}$, il en résulte

$$E = E_0\frac{R}{R+r}\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right).$$

Supposons qu'à l'instant t_1 on rompe le circuit et qu'on abandonne l'appareil à lui-même pendant un temps t_2; la résistance r devenant infinie, l'équation (13) se réduit à

$$C\frac{dE}{dt} + \frac{E}{R} = 0.$$

En désignant par E_1 la différence du potentiel qui existait au temps t_1 entre les armatures, la valeur E_2 de celle qui correspond à l'époque $t_1 + t_2$ est, en posant $T_2 = CR$,

$$E_2 = E_1 e^{-\frac{t_2}{T_2}}.$$

Supposons enfin qu'on décharge le condensateur en réunissant les deux armatures par un conducteur de faible résistance ρ; on aura alors

$$C\frac{dE}{dt} = -E\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{R}\right),$$

et, au bout d'un temps t_3, c'est-à-dire à l'époque $t_1 + t_2 + t_3$,

$$E_3 = E_2 e^{-\frac{t_3}{T_3}}, \qquad \text{avec} \qquad T_3 = \frac{CR\rho}{R+\rho}.$$

La perte totale du condensateur pendant le temps t_3 est

$C(E_2 - E_3)$; la portion qui traverse le circuit extérieur et constitue la décharge Q est égale à $C(E_2 - E_3)\frac{R}{R+\rho}$, ce qui donne finalement

$$Q = E_0 \frac{CR^2}{(R+r)(R+\rho)}\left(1 - e^{-\frac{t_1}{T_1}}\right)e^{-\frac{t_2}{T_2}}\left(1 - e^{-\frac{t_3}{T_3}}\right).$$

La décharge complète s'obtient en faisant $t_3 = \infty$; on arrive à cette décharge d'une manière continue et sans aucune des alternatives auxquelles donnent lieu les condensateurs.

173. Diélectriques composés. — Le résidu des condensateurs peut s'expliquer, d'après Maxwell, en admettant que le diélectrique est composé de différents milieux simples.

Considérons, pour plus de simplicité, un diélectrique formé d'une série de couches planes parallèles de différentes substances, dans lesquelles les forces électriques sont normales aux couches, et rapportons tous les phénomènes à l'unité de surface. Soit, pour la première couche, a_1 l'épaisseur, X_1 la force électrique, k_1 l'inverse du pouvoir inducteur, r_1 la résistivité, f_1 le déplacement électrique, i_1 le courant de conduction, u_1 le courant total de conduction et de déplacement, les quantités relatives aux autres couches étant représentées par les mêmes lettres affectées des indices 2, 3....., n. Les faces extrêmes de cette pile de diélectriques sont couvertes de plateaux métalliques formant condensateur et réunis par un circuit extérieur de résistance négligeable dans lequel est intercalée une force électromotrice.

D'après la loi d'Ohm et la conception du déplacement électrique (**98**), on a d'abord

$$(14) \qquad X_1 = r_1 i_1 = 4\pi k_1 f_1.$$

Le courant total u_1 est la somme du courant de conduction i_1 et du courant de déplacement $\frac{df_1}{dt}$. Comme ce courant total une même valeur u pour toutes les couches successives, il en résulte

$$(15) \qquad u = i_1 + \frac{df_1}{dt} = i_2 + \frac{df_2}{dt} = \ldots\ldots,$$

et, par suite,

$$(16) \qquad u = \frac{1}{r_1} X_1 + \frac{1}{4\pi k_1} \frac{dX_1}{dt}.$$

La différence de potentiel entre les deux surfaces de la première couche est $a_1 X_1$, et de même pour les suivantes; la force électromotrice totale E est donc

$$(17) \qquad E = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots\ldots$$

Si le rapport des grandeurs r et k est le même pour tous les diélectriques, cette équation se réduit à

$$E + \frac{r}{4\pi k} \frac{dE}{dt} = (a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots\ldots) u.$$

Comme le courant u est égal à la dérivée $\frac{dQ}{dt}$ de la charge, on retrouve alors la même équation que précédemment et il n'y a pas de décharge résiduelle.

S'il existe n diélectriques différents, l'équation (17), après substitution de valeurs tirées de (16), se ramène à une équation différentielle linéaire d'ordre n en E ou d'ordre $n-1$ en u, t étant la variable indépendante. Il résulte de cette forme que l'ordre des couches est indifférent et que plusieurs couches de même substance peuvent être réunies en une seule.

La quantité d'électricité Q qui traverse le circuit pendant le temps t est

$$(18) \qquad Q = \int u\, dt = \frac{1}{r_1} \int X_1\, dt + \frac{1}{4\pi k_1} X_1 + \text{const.}$$

174. Charges et décharges. — Supposons que les diélectriques soient d'abord à l'état naturel, les déplacements $f_1, f_2 \ldots$ étant nuls, et qu'on fasse agir subitement la force électromotrice E_0 pendant un temps très court. La constante de l'équation (18) est nulle, car tous les termes variables sont nuls à l'origine du temps.

L'intégrale $\int X_1\, dt$ est négligeable, puisque la force X_1 reste

finie; en désignant par X'_1 sa valeur nouvelle, la charge instantanée Q' est donc

$$(19)\qquad 4\pi Q' = \frac{X'_1}{k_1} = \frac{X'_2}{k_2} = \cdots\cdots$$

L'équation (17) devient alors

$$(20)\qquad E_0 = 4\pi(k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots\cdots) Q',$$

c'est-à-dire que la capacité C du système relatif à cette charge instantanée est

$$(21)\qquad \frac{1}{C} = 4\pi(k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots\cdots);$$

C'est la même expression que si l'on avait négligé la conductibilité des couches.

Si la force électromotrice agit pendant un temps assez long pour que le régime permanent soit établi, les déplacements deviennent invariables et la valeur finale de la force est X''_1; le courant u est alors constant

$$u = i = \frac{X''_1}{r_1} = \frac{X''_2}{r_2} = \cdots\cdots,$$

et, en substituant dans (17),

$$(22)\qquad E_0 = a_1 X''_1 + a_2 X''_2 + \cdots\cdots = (a_1 r_1 + a_2 r_2 + \cdots\cdots) i.$$

La résistance R du système qui correspond à un régime permanent est donc

$$(23)\qquad R = a_1 r_1 + a_2 r_2 + \cdots\cdots$$

Les choses étant dans cet état, supposons que l'on supprime la force électromotrice E_0 et qu'on réunisse les armatures, pendant un temps très court, par un conducteur de résistance négligeable; il se produira une décharge Q''. La différence $X_1 - 4\pi k_1 Q$ restant alors invariable, d'après l'équa-

tion (18), la valeur X_1''' de la force après cette décharge est

$$X_1'' - 4\pi k_1 Q'' = X_1''.$$

Substituant ces valeurs nouvelles dans l'équation (17), où l'on fera $E = 0$, il vient

$$0 = a_1 X_1'' + a_2 X_2'' + \ldots\ldots + 4\pi(k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots\ldots) Q'',$$

c'est-à-dire

$$0 = E_0 + \frac{Q''}{C}, \qquad Q'' = -Q'.$$

Ainsi la décharge instantanée est égale et de signe contraire à la charge instantanée.

Après cette décharge, on rompt les communications; le courant u devient nul et, d'après l'équation (16), la valeur X_1 de la force au bout du temps t est

$$X_1 e^{\frac{4\pi k_1}{r_1} t} = X_1''' = X_1'' + 4\pi k_1 Q'' = E_0\left(\frac{r_1}{R} - 4\pi k_1 C\right).$$

La force électromotrice E à une époque quelconque devient alors, en posant $p_1 = \frac{4\pi k_1}{r_1}$, pour abréger l'écriture,

$$E = E_0\left[\left(\frac{1}{R} - Cp_1\right) a_1 r_1 e^{-p_1 t} + \left(\frac{1}{R} - Cp_2\right) a_2 r_2 e^{-p_2 t} + \ldots\ldots\right].$$

Une seconde décharge instantanée, au bout du temps t après la première, correspondrait à la quantité d'électricité $-EC$; c'est une *décharge résiduelle*, qui peut être suivie de plusieurs autres semblables.

La somme de tous les coefficients $\frac{a_1 r_1}{R} - 4\pi k_1 a_1 C + \ldots\ldots$ est nulle, en vertu des équations (22) et (23). La force électromotrice E se réduit donc à zéro lorsque la valeur de p, c'est-à-dire le rapport de r à k, est la même pour toutes les couches. Dans ce cas, il n'y a pas de décharge résiduelle.

L'ordre de grandeur des coefficients est le même que celui des exponentielles; la valeur de la force électromotrice E est

toujours positive et la décharge résiduelle de même signe que la décharge primaire.

Si t est infiniment grand, tous les termes disparaissent, à moins que l'une des couches ne constitue un isolant parfait. Dans ce cas, l'une des résistances r_1 est infinie, $a_1 r_1$ est égal à R, l'exponentielle $e^{-p_1 t}$ reste égale à l'unité, même pour une très grande valeur de t, et la force électromotrice devient

$$E = E_0(1 - 4\pi k_1 a_1 C).$$

Le système peut donc conserver indéfiniment une charge résiduelle quand une ou plusieurs des différentes couches sont des isolants parfaits.

175. Décharge totale. — Le système ayant d'abord été chargé au régime permanent par une force électromotrice E_0, on peut déterminer la décharge totale dans un conducteur de résistance R_0 joignant les armatures. On a alors, à chaque instant,

$$E = a_1 r_1 i_1 + a_2 r_2 i_2 + \cdots\cdots + R_0 u = 0,$$

ou, en tenant compte de (15) et (23),

$$(R + R_0) u = a_1 r_1 \frac{df_1}{dt} + a_2 r_2 \frac{df_2}{dt} + \cdots\cdots$$

La décharge Q, entre deux états pour lesquels le déplacement passe de f_1 à f'_1, est

$$(R + R_0)\, Q = a_1 r_1 (f'_1 - f_1) + a_2 r_2 (f'_2 - f_2) + \cdots\cdots$$

Après une décharge complète, le déplacement final est nul et il reste

$$(R + R_0) Q = -(a_1 r_1 f_1 + a_2 r_2 f_2 + \cdots\cdots).$$

Lorsque l'état primitif correspond au régime permanent,

$$4\pi k_1 f_1 = X''_1 = r_1 i = r_1 \frac{E_0}{R};$$

la décharge totale Q_1 est alors

$$(R+R_0)Q_1 = -\frac{E_0}{4\pi R}\left(\frac{a_1 r_1^2}{k_1}+\frac{a_2 r_2^2}{k_2}+\dots\right).$$

Si le rapport de r à k est constant,

$$(R+R_0)Q_1 = -E_0\frac{r}{4\pi k} = -E_0 CR = -RQ'.$$

Cette décharge continue Q_1 est inférieure et de signe contraire à la charge instantanée Q'.

Lorsque l'état primitif correspond au régime permanent suivi d'une décharge instantanée, on a

$$4\pi k_1 f_1 = X_1''' = E_0\left(\frac{r_1}{R} - 4\pi k_1 C\right)$$

et la décharge totale résiduelle Q_2 devient

$$(R+R_0)Q_2 = E_0\left[CR - \frac{1}{4\pi R}\left(\frac{a_1 r_1^2}{k_1}+\frac{a_2 r_2^2}{k_2}+\dots\right)\right]$$
$$= -\frac{CE_0}{R}\left[\left(\frac{a_1 r_1^2}{k_1}+\frac{a_2 r_2^2}{k_2}+\dots\right)(k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots) - (a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots)^2\right],$$

expression que l'on peut écrire

$$(R+R_0)Q_2 = \frac{Q''}{R}\Sigma a_1 a_2 k_1 k_2\left(\frac{r_1}{k_1}-\frac{r_2}{k_2}\right)^2.$$

Cette décharge est toujours de même signe que la décharge primaire instantanée.

On voit ainsi qu'un diélectrique constitué par un ensemble de couches de diverses natures peut donner lieu aux phénomènes connus sous le nom d'*absorption électrique* et de *décharges résiduelles*.

L'étude des cas où les substances différentes sont disposées autrement conduirait à des résultats analogues, même si les éléments ont des dimensions microscopiques.

Un milieu homogène peut d'ailleurs être le siège d'une nouvelle espèce de polarisation électrique analogue à celle que produisent les actions chimiques et donnant lieu à une sorte de constitution feuilletée.

Sans préciser davantage la nature des phénomènes, ces considérations suffisent pour faire concevoir le caractère de l'absorption électrique.

Toutefois le défaut d'homogénéité ne paraît pas être la seule cause du phénomène, car l'expérience montre que l'existence des charges résiduelles peut être attribuée, dans le plus grand nombre des cas, à une espèce de déformation élastique qui serait la suite de la polarisation du diélectrique. Il est, en effet, à remarquer que toutes les actions, telles que des chocs répétés, des vibrations, des variations brusques et en sens contraires de la température, qui facilitent le retour à l'état normal d'un corps qui a subi une déformation élastique permanente, hâtent également l'apparition des charges résiduelles et le retour à l'état naturel.

La propagation de la chaleur ne donne lieu à aucun phénomène que l'on puisse rapprocher de la charge résiduelle des diélectriques, et, sous ce rapport, l'analogie, si grande d'ailleurs, des deux ordres de phénomènes paraît complètement en défaut.

CHAPITRE DIXIÈME

ÉNERGIE DES COURANTS

176. Dégagement de chaleur. — Lorsqu'un système de conducteurs électrisés éprouve une modification quelconque, sans l'intervention d'aucune force étrangère, l'énergie électrique dans le second état est nécessairement moindre que dans le premier. L'énergie perdue pendant la transformation peut être utilisée sous une forme équivalente, telle qu'un travail mécanique, l'élévation d'un poids, l'accroissement de force vive d'un système, un changement d'état physique, une opération chimique ou enfin un dégagement de chaleur.

Dans le cas d'un courant permanent, le potentiel est invariable en chaque point, malgré le mouvement continu d'électricité; l'énergie perdue dans une partie quelconque des conducteurs est alors proportionnelle au temps.

Considérons deux points A et B maintenus respectivement aux potentiels V_1 et V_2, et, sur les surfaces de niveau qui passent en A et B, deux portions S_1 et S_2 correspondantes, c'est-à-dire découpées par un même tube de flux. La quantité d'électricité qui traverse ces deux surfaces est la même; l'énergie W, perdue par le courant dans cet intervalle pendant l'unité de temps, est égale au produit de la masse d'électricité qui s'écoule, c'est-à-dire de l'intensité I du courant, par la chute du potentiel $V_1 - V_2$, si le courant va de A en B, c'est-à-dire par la force électromotrice E entre ces deux points. On a donc

$$W = I(V_1 - V_2) = IE.$$

Nous admettrons comme un fait expérimental qu'aucune partie de cette énergie n'est employée à changer la force vive

des masses électriques. Le fait est évident si les surfaces S_1 et S_2 sont égales, puisqu'alors les vitesses sont les mêmes à l'entrée et à la sortie du tube. Pour le cas général, nous avons déjà fait remarquer que le flux est en chaque point parallèle à la force et que, par suite, aucun effet attribuable à l'inertie des masses électriques ne paraît intervenir dans les phénomènes de régime permanent.

Si, d'un autre côté, le conducteur est immobile, au moins dans son ensemble, et si le courant ne produit aucun travail mécanique extérieur, l'énergie est nécessairement utilisée dans le conducteur lui-même.

177. Loi de Joule. — Deux cas peuvent se présenter : ou bien la chute de potentiel entre les points A et B est continue et s'effectue suivant la loi d'Ohm ; ou bien il se trouve quelque part, dans l'intervalle de ces points, deux surfaces voisines entre lesquelles existe une chute brusque de potentiel, constante et indépendante de l'intensité du courant, c'est-à-dire une force électromotrice constante H. En tous les points où la variation de potentiel est continue, l'énergie électrique se dépense également d'une manière continue; elle se transforme en énergie calorifique et donne lieu à un dégagement de chaleur le long du conducteur. Là où existe une chute brusque de potentiel, la dépense d'énergie électrique s'y trouve localisée; elle se traduit par un phénomène thermique ou par tout autre effet physique équivalent.

Considérons d'abord le premier cas et supposons qu'il n'y ait pas de variations de potentiel indépendantes du courant. Si R est la résistance du conducteur entre deux points A et B, la loi d'Ohm donne

$$V_1 - V_2 = E = IR;$$

l'énergie dépensée entre ces deux points est donc

$$W = IE = I^2R.$$

Ainsi, *l'énergie calorifique dégagée sur un conducteur pendant l'unité de temps est égale au produit du carré de l'intensité du courant par la résistance du conducteur.* La quantité de chaleur correspondante, telle qu'on peut la mesurer par

les procédés calorimétriques, est le quotient de l'énergie W par l'équivalent mécanique de la calorie. Donc

La quantité de chaleur dégagée est proportionnelle à la résistance du conducteur et au carré de l'intensité du courant.

C'est la forme sous laquelle Joule a établi cette loi importante par expérience ([1]).

178. Relation des lois d'Ohm et de Joule. — Considérons un conducteur de capacité C électrisé au potentiel V, ou un condensateur de même capacité dont les armatures ont une différence de potentiel V. L'énergie électrique du système a pour expression (65)

$$W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2.$$

Supposons que l'on réunisse le conducteur au sol, ou les deux armatures de la batterie entre elles, par un fil d'une résistance R assez grande pour que la décharge ait une durée appréciable, sous la forme d'un courant d'intensité graduellement décroissante.

La quantité $-dQ$ d'électricité qui s'écoule pendant le temps dt et la perte d'énergie correspondante $-dW$ sont

$$-dQ = -C\,dV = I\,dt,$$
$$-dW = -CV\,dV = V\,dQ = IV\,dt.$$

Si la résistance est assez grande pour que le courant varie d'une manière très lente, la loi d'Ohm est applicable à chaque instant; il en résulte

$$V = IR,$$
$$\frac{-dW}{dt} = IV = I^2R,$$

c'est-à-dire que l'énergie dépensée pendant l'unité de temps est exprimée par la loi de Joule.

Nous venons de déduire la loi de Joule du principe de la conservation de l'énergie et de la loi d'Ohm ; réciproquement

([1]) J.-P. Joule, *Phil. Mag.* (3), t. XIX, p. 260 ; 1841.

le même principe, combiné avec la loi de Joule, conduit à la loi d'Ohm. En effet, les équations

$$W = EI = I^2R$$

donnent la loi d'Ohm

$$E = IR.$$

Nous ferons remarquer encore que, dans un circuit complexe qui ne renferme pas de forces électromotrices localisées, *l'énergie dégagée est un minimum lorsque la distribution des intensités est régie par la loi d'Ohm.*

Considérons, par exemple, une série d'arcs conducteurs de résistances $r, r', \ldots,$ entre deux points A et B dont la différence de potentiel $V_1 - V_2 = E$ est maintenue constante. Quand on applique la loi d'Ohm, le courant i dans le premier conducteur est tel que $ir = E$. Supposons que, par une altération du régime, l'intensité dans ce conducteur devienne $i + j$.

L'énergie calorifique dégagée sur l'ensemble des conducteurs dans le nouveau système aura pour expression

$$\Sigma r(i+j)^2 = \Sigma ri^2 + 2\Sigma rij + \Sigma rj^2.$$

Dans le deuxième terme du second membre, le produit ri est une constante E pour tous les arcs et, d'autre part, la somme Σj est nécessairement nulle si le courant primitif qui aboutit au point A n'est pas modifié; il reste donc

$$\Sigma r(i+j)^2 = \Sigma ri^2 + \Sigma rj^2.$$

L'énergie dégagée est évidemment minimum quand les j sont nuls, c'est-à-dire quand l'intensité se partage sur tous les arcs d'après la loi d'Ohm.

179. Phénomène de Peltier. — Supposons maintenant que sur le conducteur qui joint les deux points A et B, entre lesquels existe toujours la même force électromotrice $V_1 - V_2 = E$, le potentiel éprouve en un point P entre deux surfaces voisines une chute brusque $U_1 - U_2 = H$ indépendante du courant.

En appelant r et r' les résistances des deux portions AP et PB, l'intensité du courant est

$$I = \frac{V_1 - U_1}{r} = \frac{U_2 - V_2}{r'} = \frac{V_1 - V_2 - (U_1 - U_2)}{r + r'} = \frac{E - H}{R}.$$

L'énergie totale dépensée entre les points A et B est IE, ce qui donne

$$W = IE = I^2R + IH.$$

Cette énergie se compose donc de deux parties : l'une proportionnelle au carré de l'intensité et qui échauffe le conducteur dans toute sa longueur, correspond à la loi de Joule ; l'autre, proportionnelle à l'intensité, est localisée au point P. Cette dernière partie est positive, si la chute se fait dans le sens du courant, et négative dans le cas contraire. S'il n'y a pas d'autre travail que celui qui correspond aux changements de température, cette énergie se traduira par un dégagement de chaleur en P dans le premier cas, par une absorption de chaleur dans le second, c'est-à-dire par un refroidissement. Tel est l'effet, connu sous le nom de *phénomène de Peltier*, qui se produit au contact de deux métaux.

Il peut se faire aussi que l'énergie localisée IH soit corrélative d'une réaction chimique, qui absorbe la chaleur correspondante si H est positif, et produise au contraire cette chaleur si H est négatif, de telle sorte que les variations de température soient alors dues uniquement à l'énergie calorifique dégagée en vertu de la loi de Joule.

La réciproque est évidente. Si l'on constate, en un point P quelconque du circuit, la production d'un travail calorifique ou chimique dont l'énergie est simplement proportionnelle à l'intensité du courant, on peut affirmer qu'il existe en ce point une variation brusque du potentiel, positive ou négative suivant le signe du travail. Si, de plus, le travail ainsi localisé change de signe avec le sens du courant, on en conclura que la variation de potentiel correspondante est fixe et indépendante du courant.

Considérons, en particulier, ce dernier cas ; soit r la résistance de la région où se manifeste la chute de potentiel, et supposons qu'il n'y ait au point considéré que des phénomènes

calorifiques. La quantité de chaleur dégagée se compose de deux parties : l'une I^2r, définie par la loi de Joule, est indépendante du sens du courant; l'autre, due à l'effet Peltier, a pour valeur IH et change de signe avec le sens du courant. L'énergie calorifique dégagée est donc

$$I^2r \pm IH = \left(\frac{Ir}{H} \pm 1\right) IH.$$

A mesure qu'on fait décroître l'intensité, le terme $\frac{Ir}{H}$ diminue; dès qu'il devient inférieur à l'unité, l'effet Peltier prédomine et les effets calorifiques changent de signe avec le courant; ces effets tendent à devenir égaux et de signes contraires quand on renverse le courant.

Une question se présente ici à propos du phénomène de Peltier. L'effet calorifique que l'on observe pendant le passage du courant, à la soudure des deux métaux, mesure la chute brusque de potentiel qui existe en ce point, et semble devoir mesurer, par conséquent, la force électromotrice de contact qui existe entre eux d'après la théorie de Volta. Le résultat qu'on obtient ainsi concorde-t-il avec celui que donnent les autres procédés, l'emploi des électromètres, par exemple?

L'expérience répond d'une manière négative : non seulement les valeurs fournies par les deux procédés ne sont pas concordantes, mais les corps ne s'y trouvent pas rangés dans le même ordre et les forces électromotrices sont même parfois de signes contraires. Il est donc certain qu'on ne mesure pas le même phénomène dans les deux cas. L'explication la plus plausible de ce désaccord est que, dans les mesures électrostatiques, on se trouve en présence d'un phénomène complexe où l'état physique des surfaces et la nature du milieu qui se trouve nécessairement interposé entre les métaux en contact jouent un rôle considérable.

180. Décompositions chimiques. — Toutes les fois qu'un composé liquide est traversé par un courant, il subit une décomposition progressive : certains éléments apparaissent sur le conducteur qui amène le courant, d'autres sur celui qui l'emporte. Faraday a désigné ce phénomène sous le nom d'*électrolyse;* il appelle *électrolyte* le corps soumis à la décomposi-

tion, *électrodes* les deux conducteurs qui servent à l'entrée et à la sortie du courant, le premier étant l'électrode *positive* ou *anode*, le second l'électrode *négative* ou *cathode*. Les éléments de la décomposition sont des *ions*; l'*anion* se porte sur l'anode et le *cation* sur la cathode.

Deux conditions sont nécessaires pour la production de l'électrolyse : il faut que le courant puisse traverser le composé et que celui-ci soit liquide ou en dissolution, ou tout au moins à l'état pâteux. Ainsi le verre au rouge donne des signes évidents de décomposition, parce qu'il devient à la fois conducteur et pâteux.

Il est extrêmement remarquable que les produits de la décomposition n'apparaissent que sur les électrodes. Clausius, développant une théorie proposée d'abord par Grotthus, interprète ce phénomène d'une manière ingénieuse. L'hypothèse consiste à admettre que les éléments, molécules ou atomes, qui composent les corps sont dans un état d'agitation continuelle; mais, tandis que les excursions de chaque élément sont limitées dans les solides, ces excursions peuvent se poursuivre à toute distance dans les liquides et suivant des directions quelconques.

Ainsi les deux atomes d'hydrogène que l'on suppose entrer dans la constitution d'une molécule d'eau ne seraient pas liés invariablement à l'atome correspondant d'oxygène; entraînés dans un tourbillonnement incessant, ils peuvent quitter ce premier atome d'oxygène pour s'unir à celui d'une molécule voisine et se transporter ainsi, par voie d'échanges successifs, à des distances infiniment grandes par rapport au rayon d'activité réciproque des éléments. Dans l'état ordinaire, ces mouvements se produisent suivant des directions indéterminées; le passage de l'électricité aurait pour effet de leur imprimer une tendance systématique, en vertu de laquelle les atomes d'hydrogène descendant le courant seraient poussés vers la cathode; les atomes d'oxygène, au contraire, remontent le courant et marchent vers l'anode.

181. Lois de Faraday. — C'est avec les étincelles des machines que l'on a constaté d'abord la décomposition de l'eau par l'électricité en ses éléments gazeux. On obtient des résultats plus facilement mesurables en produisant la décharge des

batteries entre deux fils d'or ou de platine plongés dans le liquide et séparés par un très petit intervalle. Il y a alors avantage à employer les *électrodes de Wollaston*, qui consistent en un fil de platine soudé dans un tube de verre, de manière à ne laisser en contact avec le liquide que la section même du fil. Toutefois l'étincelle électrique donne toujours un mélange des deux gaz. L'expérience fut répétée au moyen du courant de la pile par Carlisle et Nicholson (¹), et les gaz sont alors séparés aux deux électrodes.

Dans tous les cas, quelle que soit la provenance de l'électricité et le mode d'observation, la *quantité d'eau décomposée est proportionnelle à la quantité d'électricité qui passe*.

Cette loi, énoncée par Faraday, a été surtout vérifiée par la mesure électromagnétique des courants ; mais la détermination directe du débit d'électricité par les méthodes électrostatiques permet également d'en donner une démonstration très exacte. Dans des expériences récentes, Warren de la Rue (²) a fait passer à travers l'eau les décharges d'un condensateur de capacité considérable, puisqu'elle dépassait $\frac{1}{17}$ de celle de la Terre, chargé avec des forces électromotrices dans les rapports de 1, 2 et 3; quoique le volume du mélange des deux gaz fut inférieur à 25 millimètres cubes, les mesures vérifient à 0,05 près que le volume des gaz est proportionnel à la force électromotrice, c'est-à-dire à la quantité d'électricité.

Cette proportionnalité permet de considérer les électrolytes comme des mesureurs d'électricité ; on appelle *voltamètre* un appareil disposé de manière à recueillir les gaz qui proviennent de la décomposition de l'eau.

Le travail de décomposition chimique étant proportionnel à l'intensité du courant, il doit exister quelque part dans le voltamètre une chute brusque de potentiel H, indépendante de l'intensité. L'énergie rendue disponible en ce point est employée à la décomposition de l'eau et peut être calculée en valeur absolue.

Soit Q la quantité d'électricité qui a traversé le voltamètre pendant un certain temps, et P le poids d'eau décomposée.

(¹) Carlisle et Nicholson, *Biblioth. Britann.*, t. XV, p. 11 ; 1800.
(²) Warren de la Rue, *Ann. de chim. et de phys.* [5], t. XIII, p. 468 ; 1878.

Ces deux quantités étant proportionnelles, on peut écrire $P = pQ$, le facteur p exprimant le poids d'eau décomposée par l'unité d'électricité. Enfin, en appelant a la chaleur de combinaison de l'unité de poids d'eau à pression constante et J l'équivalent mécanique de la calorie, le produit JaP représente l'énergie nécessaire pour décomposer un poids P d'eau. Cette énergie étant fournie par la chute du courant, on a

$$QH = JaP,$$
$$H = \frac{JaP}{Q} = Jap.$$

Ainsi, entre les deux électrodes d'un voltamètre traversé par un courant il existe, outre la différence de potentiel due à la résistance du conducteur liquide intermédiaire, une chute brusque, dont le siège est indéterminé, qui peut se produire soit toute entière sur une électrode, soit partiellement sur les deux, et qui a pour expression numérique le travail mécanique correspondant à l'énergie absorbée par la quantité d'eau que décompose l'unité d'électricité.

182. Polarisation des électrodes. — Par quel mécanisme se produit cette différence de potentiel? Il est évident qu'avant le passage du courant les deux électrodes, si elles sont formées d'un même métal, toutes deux en platine par exemple, sont à un même potentiel, probablement différent de celui de l'eau, en vertu de la loi de Volta; mais les variations de sens contraires qui existent alors, à chacune des électrodes, donneraient dans le voltamètre un travail qui serait évidemment nul. Quand le courant est établi, les deux chutes sont inégales et leur différence devient égale à H. On est donc conduit à admettre, en suivant les idées de Volta, qu'il s'est produit une modification des surfaces en contact. Le dépôt sur les électrodes des éléments de l'électrolyte donne une explication suffisante de cette modification.

Il suffit, en effet, qu'une lame ait été employée comme électrode ou même plongée dans un gaz pour qu'on trouve, quand on la met dans l'eau en présence d'une lame de même nature, mais neuve ou récemment portée au rouge, une différence de potentiel entre les deux lames.

Considérons, en particulier, la décomposition de l'eau. Les

premières portions de gaz qui viennent au contact de la lame de platine, paraissent, sinon former avec elle une véritable combinaison, tout au moins s'y déposer à un état de condensation dans lequel le gaz est loin d'avoir l'énergie potentielle qui correspond à l'état libre. Cet effet de condensation des gaz doit avoir lieu surtout au début, et il va ensuite en diminuant d'une manière progressive jusqu'à ce que l'épaisseur de la couche soit devenue assez grande pour que les nouvelles bulles n'éprouvent plus aucune action de la part de la lame et puissent se dégager.

Ce n'est qu'à partir de ce moment que le travail de la décomposition de l'eau atteint sa valeur normale. Jusque là, il n'était que la différence entre cette valeur normale et le travail correspondant à la condensation ou à la formation d'hydrures et de composés oxygénés.

La modification subie ainsi par la surface des lames serait la cause du phénomène, appelé *polarisation des électrodes*, qui se manifeste par le développement d'une force électromotrice inverse de celle qui produit le courant.

La polarisation peut prendre des valeurs très différentes. Le courant ne se maintient, en effet, dans le circuit renfermant un électrolyte, que si la force électromotrice extérieure est supérieure à la chute de potentiel ayant son siège sur les électrodes. Lorsque cette force électromotrice e est inférieure à la polarisation H corrélative du dégagement des gaz, le courant s'établit d'abord, si les deux électrodes sont dans le même état, mais il s'affaiblit bientôt et devient sensiblement nul ; à ce moment, la chute de potentiel sur les électrodes est égale à la force électromotrice e. La quantité d'électricité $q = \int i dt$ nécessaire pour atteindre ce résultat est proportionnelle à la surface immergée des électrodes ; c'est la *capacité de polarisation* relative à l'état considéré.

On conçoit ainsi comment la polarisation n'est pas instantanée, même avec une force électromotrice suffisante pour entretenir le courant, et comment elle peut croître d'une manière continue depuis zéro jusqu'à une limite maximum. La capacité de polarisation n'est définie que si l'on atteint le régime du dégagement continu des gaz.

183. Courants secondaires. — Une fois la polarisation établie, si on rompt le courant primitif et qu'on réunisse les deux électrodes par un conducteur, un courant limité se produit en sens contraire du courant primitif, en vertu de la force électromotrice de polarisation ; c'est un *courant secondaire*.

Le courant secondaire fait disparaître peu à peu, en reformant de l'eau, les couches de gaz attachées aux électrodes et la force électromotrice ne tarde pas à s'annuler ; la quantité totale d'électricité mise en mouvement pendant la durée du courant secondaire est égale à celle qu'il avait fallu dépenser pour produire la polarisation.

Il est clair que ce courant secondaire sera lui-même permanent si l'on maintient constante la force électromotrice de polarisation ; il suffit, pour cela, de faire en sorte que la surface des électrodes reste en contact avec les couches gazeuses qu'avait produites l'électrolyse. C'est précisément ce qui a lieu dans le *couple à gaz* de Grove.

184. Électrolytes successifs. — Supposons que, dans un circuit, on ait introduit plusieurs couples de Grove, placés à la suite les uns des autres dans le même ordre, et plusieurs voltamètres. Soit n le nombre des couples, n' celui des voltamètres, R la résistance totale du circuit et I l'intensité du courant qui le parcourt. Pendant chaque unité de temps, le travail fourni par l'ensemble des couples est $nJapI$; celui qui est dépensé par les voltamètres est $n'JapI$; enfin une quantité de travail I^2R est convertie en chaleur dans le circuit, en vertu de la loi de Joule. S'il n'existe aucun autre travail extérieur positif ou négatif, on doit avoir

$$nJapI = n'JapI + I^2R,$$
$$IR = (n - n')Jap = (n - n')H.$$

Le produit IR est une quantité essentiellement positive ; le courant ne peut donc exister que si $n > n'$.

Lorsque le régime permanent est établi, la polarisation étant supposée complète dans les couples ainsi que dans les voltamètres, il y a dans chacun d'eux un même travail effectué pendant le même temps, positif dans les uns, négatif dans les autres. En d'autres termes, *pour chaque unité d'électricité*

qui traverse le système, une même quantité d'eau se forme dans les couples et se décompose dans les voltamètres.

Cette seconde loi de Faraday se vérifie encore alors même que la polarisation ne serait pas complète en tous les points de la chaîne considérée. Supposons, pour fixer les idées, que dans l'un des couples l'épaisseur des couches de gaz soit tombée au-dessous de sa valeur limite et que la force électromotrice n'ait plus qu'une valeur H' inférieure à H; le transport d'une unité d'électricité ne correspond plus dans ce couple au même travail que dans les autres, mais la relation $H' = J a' p$ est toujours satisfaite, si l'on désigne par a' la chaleur de formation de l'unité de poids d'eau avec de l'oxygène et de l'hydrogène à l'état de combinaison partielle où il se trouvent sur le platine, et le couple ainsi altéré donne naissance à la même quantité d'eau que tous les autres.

La loi est d'ailleurs générale : *pour tout électrolyte, le poids des éléments combinés ou décomposés est proportionnel à la quantité d'électricité qui passe.* L'opération peut être positive ou négative, soit avec polarisation des électrodes, comme pour la décomposition de l'eau ou du sulfate de cuivre avec des électrodes de platine, soit sans polarisation appréciable, comme dans l'électrolyse du sulfate de cuivre par deux électrodes de cuivre. Il en résulte, comme conséquence, que l'électrolyte n'agit *jamais* simplement à la manière d'un conducteur et ne laisse passer aucune fraction du courant sans qu'il existe une action chimique corrélative.

185. Relation des énergies chimique et électrique. — Dans l'électrolyse du sulfate de cuivre par deux lames de cuivre, si les deux lames se maintiennent réellement dans le même état, avec dépôt de cuivre métallique sur la cathode et dissolution d'une quantité égale sur l'anode pour former du sulfate, la force électromotrice de contact du métal avec le liquide est la même de part et d'autre; dans ce cas, il doit y avoir égalité entre la chaleur produite et la chaleur dépensée. Au contraire, toute différence dans l'état des deux lames, analogue à celle que produirait, par exemple, la formation d'un sous-oxyde de cuivre sur l'anode, s'accusera par un défaut de compensation entre les quantités de chaleur absorbées et dégagées.

Il est donc nécessaire de faire une réserve importante sur l'équivalence de l'énergie chimique et du travail électrique localisé. Ce principe n'est applicable que s'il ne se produit, au point où a lieu l'opération chimique, aucun travail extérieur ni aucune variation de température indépendante des résistances. Si cette condition n'est pas réalisée, on doit tenir compte de tous les travaux secondaires, physiques ou chimiques, auxquels peut donner lieu l'électrolyse.

Dans l'électrolyse de l'eau, par exemple, l'énergie du courant produit d'abord la séparation de l'oxygène et de l'hydrogène et ensuite le travail nécessaire pour que les gaz occupent un certain volume à la pression extérieure.

Lorsque le courant provient d'une pile de Grove, le même travail est fourni par chacun des couples. D'ailleurs le travail extérieur reste invariable, tant que la loi de Mariotte est vraie, pour un même poids d'eau décomposée et, par suite, pour un même débit d'électricité. Dans ces limites, la condition d'équilibre des couples ou des électrolytes est donc indépendante de la pression.

Pour des pressions très élevées, la loi de Mariotte est très éloignée de la vérité; la chaleur de combinaison de l'hydrogène et de l'oxygène est d'ailleurs modifiée; et l'on sait que la décomposition par la pile exige alors l'emploi de forces électromotrices plus grandes. La chaleur de formation de l'eau est d'ailleurs fonction de la température, et les conditions d'équilibre dans un circuit pourront être profondément modifiées, si les couples et les électrolytes sont à des températures différentes.

D'autre part, il peut arriver que certains éléments de la décomposition éprouvent des réactions secondaires indépendantes de l'action directe du courant et donnant lieu à une absorption ou à un dégagement de chaleur. Le résultat final de l'électrolyse n'est plus alors en relation simple avec la force électromotrice, et celle-ci ne peut être calculée par la chaleur de combinaison des éléments, considérés dans l'état où ils apparaissent après l'opération.

186. Équivalents électrochimiques. — Soient $A, A', A'', ..$ divers électrolytes, $p, p', p'', ..$ les poids de chacun d'eux décomposés par l'unité d'électricité. Ces nombres sont appelés

les *équivalents électrochimiques* des différents corps; l'expérience montre qu'ils sont proportionnels à leurs équivalents chimiques ordinaires ou à leurs poids atomiques.

Si l'on désigne par a, a', a'',... les chaleurs de combinaison de l'unité de poids pour chacun des composés, les éléments de la combinaison étant pris dans l'état où ils se trouvent par le fait du courant, c'est-à-dire sans tenir compte des réactions secondaires, les produits ap, $a'p'$, $a''p''$,... seront les chaleurs de combinaison des équivalents. Par un raisonnement analogue à celui qui a été fait pour l'eau, on voit que les forces électromotrices H, H', H''..., relatives à ces diverses électrolytes, sont déterminées par les relations

$$\frac{H}{ap} = \frac{H'}{a'p'} = \frac{H''}{a''p''} \cdots\cdots = J.$$

La force électromotrice d'un électrolyte est représentée par l'énergie calorifique de combinaison de son équivalent électrochimique.

187. Loi d'Ed. Becquerel. — L'application de cette loi de Faraday ne présente pas d'ambiguité quand il s'agit de composés chimiques analogues. Si l'on produit, par un même courant, l'électrolyse de l'eau et d'une série de sulfates neutres de protoxydes, par exemple, l'équivalent électrochimique de chaque métal est le poids qui se dépose pour le dégagement d'un gramme d'hydrogène; mais il y a doute lorsque les composés n'ont pas la même formule. Avec deux sulfates neutres, l'un de protoxyde, l'autre de sesquioxyde de fer, décomposés par le même courant, on peut se demander si le même poids de fer ou le même poids d'oxygène sera mis en liberté dans les deux électrolytes. Ed. Becquerel [1] a montré que *le métalloïde fait la loi:* par conséquent les poids de fer seront, pour les deux électrolytes, dans le rapport de 3 à 2. Il en est de même pour les sels des autres acides, les chlorures, les sulfures, etc.

188. Des couples électriques. — Considérons un circuit composé de divers électrolytes, les uns donnant lieu à des

[1] Ed. Becquerel, *Ann. de Ch. et de Phys.* (3), t. XI, p. 162; 1844.

actions positives, les autres à des actions négatives. En désignant par a pour ceux de la première espèce, et par b pour ceux de la seconde, les chaleurs de combinaison de l'unité de poids, par R la résistance totale du circuit et par I l'intensité du courant, on aura, sous la réserve que la totalité des actions chimiques est liée au passage du courant,

$$\Sigma J a p I = \Sigma J b p I + I^2 R,$$
$$IR = J(\Sigma ap - \Sigma bp) = E_0 - E' = E.$$

Le produit IR, qui correspond à la chaleur dégagée dans le circuit en raison des résistances, est la force électromotrice résultante E ; c'est l'excès de la force électromotrice E_0 des couples sur la polarisation totale E' de l'ensemble des électrolytes. Le courant ne peut se maintenir que si l'on a

$$\Sigma ap > \Sigma bp.$$

Si cette condition n'est pas remplie et que tous les électrolytes soient à l'état naturel, le courant s'établit d'abord au moment de la fermeture du circuit. Une décomposition incomplète polarise les électrodes et le courant cesse dès que la somme des forces électromotrices de polarisation atteint la valeur E_0; le système reste alors en équilibre. Tel est le cas d'un circuit qui renferme un couple Daniell (**192**) et un voltamètre; la substitution du zinc au cuivre dans le couple Daniell produit 24,2 calories, tandis que la décomposition de l'eau en exige 34,5.

189. Dépolarisation par diffusion. — Il peut arriver cependant que l'on constate alors l'existence d'un courant continu très faible. Ce courant est dû à la cause suivante : la polarisation des électrodes dans un voltamètre, par exemple, se dissipe peu à peu par suite de la diffusion des gaz qu'elles ont absorbés; on conçoit que cette diffusion sera plus ou moins rapide suivant les conditions de l'expérience, mais surtout suivant la valeur de la polarisation elle-même et de son écart par rapport à la polarisation maximum. Le courant observé rétablit alors les pertes dues à la diffusion et maintient l'état d'équilibre qui correspond au maximum de polari-

sation pour les conditions de l'expérience. Ainsi s'expliquent les diverses particularités auxquelles donnent lieu les phénomènes de polarisation. Quand on unit à un voltamètre une source de force électromotrice insuffisante pour donner un dégagement de gaz continu, l'expérience montre que la force électromotrice de polarisation croît avec l'intensité du courant permanent dont il vient d'être question, mais moins rapidement; que, pour une valeur donnée de ce courant, la force électromotrice diminue quand on augmente la surface des électrodes; enfin, que la force électromotrice reste constante si l'intensité du courant et la surface des électrodes croissent dans le même rapport.

190. Couple de Volta. — Quelques mots nous suffiront maintenant pour compléter la théorie de la pile. Le couple de Volta proprement dit se compose de deux lames, l'une de zinc, l'autre de cuivre, plongées dans de l'eau rendue conductrice par l'addition d'une petite quantité d'acide sulfurique ou d'un sel quelconque, la lame de cuivre étant soudée à une lame de zinc qui fait partie du couple suivant. Entre deux métaux extrêmes identiques, on a ainsi trois contacts, zinc-cuivre, cuivre-eau et eau-zinc. La force électromotrice peut donc s'exprimer par les symboles habituels,

$$E = Zn|Cu + Cu|Aq + Aq|Zn.$$

Si l'eau ne jouait que le rôle d'un conducteur, suivant les idées de Volta, on aurait

$$Cu|Aq + Aq|Zn = 0$$

et, par suite,

$$E = Zn|Cu.$$

D'après cette manière de voir, la force électromotrice du couple de Volta ne dépendrait que du contact zinc-cuivre, et ces deux métaux réunis par une couche d'eau se trouveraient au même potentiel. L'altération superficielle des métaux au contact des liquides ou des gaz rend très difficile la vérification rigoureuse de l'hypothèse de Volta.

Quoi qu'il en soit, cette altération est tellement rapide et

amène dans la valeur de la force électromotrice des changements si importants, qu'au point de vue pratique, la force électromotrice du couple de Volta doit être considérée comme dépendant, pour une notable part, du milieu qui forme le troisième élément.

Lorsque le couple est fermé par un conducteur de résistance R, il se produit un courant dont l'intensité est donnée d'abord par la relation $E = IR$, mais l'eau est aussitôt décomposée, l'oxygène remonte le courant et oxyde la lame de zinc, l'hydrogène le descend et polarise la lame de cuivre; il en résulte une force électromotrice inverse. Quand le régime permanent est établi, la force électromotrice de polarisation a une valeur E' et l'intensité I' est

$$E - E' = I'R.$$

Si on laisse reposer le couple, la polarisation s'annule lentement par diffusion des gaz. Quand on ferme de nouveau le circuit au bout d'un certain temps, le courant reparaît d'abord avec l'intensité primitive I, si l'influence de la couche d'oxyde de zinc est négligeable, pour reprendre ensuite l'intensité I' au bout d'un temps généralement très court, mais qui peut être assez long si les surfaces des électrodes sont très grandes et la résistance du circuit considérable. Pendant que le couple reste ouvert, la différence de potentiel des extrémités est donc égale à E.

Dans un circuit fermé, la force électromotrice utilisable est seulement $E - E'$. Il se produit dans chaque couple de l'oxyde de zinc et de l'hydrogène aux dépens du zinc et de l'eau. Comme on peut supposer que l'oxygène a passé par l'état gazeux en allant de l'eau au zinc, on voit que l'énergie disponible du couple correspond à l'excès de la chaleur de formation de l'oxyde de zinc sur celle de l'eau pour le même poids d'oxygène. Si l'eau est acidulée, la différence correspond à la substitution du zinc à l'hydrogène dans l'acide sulfurique hydraté : cette différence est de 17,7 calories environ.

La couche d'hydrogène qui recouvre le cuivre a encore pour effet d'augmenter beaucoup la résistance du couple, ce qui est une nouvelle cause d'affaiblissement du courant.

191. Couples non polarisables. — Des moyens mécaniques, comme l'agitation du liquide ou le frottement de la lame de cuivre par un corps étranger, permettent d'éliminer la plus grande partie du gaz, de diminuer beaucoup la résistance et même la polarisation ; mais on peut supprimer complètement la couche par une action chimique et obtenir ainsi des *couples non polarisables*.

Un liquide qui aurait la propriété de dissoudre simplement l'hydrogène, sans effet calorifique, augmenterait déjà la force électromotrice de tout le travail que doit effectuer le gaz pour se dégager à la pression extérieure ; mais si l'hydrogène entre dans une nouvelle combinaison chimique, ou même si l'on tient compte de la chaleur de dissolution du gaz, la force électromotrice doit être considérée comme égale à la somme algébrique des énergies produites aux deux électrodes, ou aux deux pôles du couple.

Tel est, par exemple, le couple employé par Joule, où la lame de cuivre est recouverte par une couche d'oxyde que l'hydrogène réduit peu à peu. La force électromotrice correspond alors à la différence des chaleurs d'oxydation du cuivre et du zinc pour un même poids d'oxygène.

Dans d'autres cas, le liquide renferme en dissolution un sel du métal qui constitue l'électrode positive, par exemple une dissolution de sulfate de cadmium dans laquelle plongent une lame de zinc et une lame de cadmium. Le sulfate dissous subit l'électrolyse, quand le circuit est fermé, et il se dépose sur la lame de cadmium une quantité de cadmium équivalente au point de zinc dissous. La force électromotrice correspond à la chaleur de substitution du zinc au cadmium dans le sulfate, soit environ 8,3 calories.

Les choses restent dans le même état tant que la proportion du sulfate de zinc dissous n'est pas assez grande pour que ce sel lui-même prenne part à l'électrolyse. A partir de ce moment, la polarisation du couple apparaît de nouveau.

En fonction des forces électromotrices de contact, la force électromotrice de ce couple peut être exprimée par les symboles suivants :

$$E = Zn|Cd + Cd|\text{sulfate} + \text{sulfate}|Zn.$$

192. Couples à deux liquides. — Dans le *couple de Daniell* à sulfates, imaginé pour la première fois par Becquerel [1], on emploie deux liquides : une dissolution concentrée de sulfate de cuivre autour de la lame de cuivre et une dissolution de sulfate de zinc autour de la lame de zinc. Les deux liquides sont séparés par une membrane, comme une peau, ou par un vase de terre poreuse, afin d'empêcher le mélange des dissolutions sans interrompre la conductibilité.

Pendant que la lame de zinc se dissout, le cuivre provenant de l'électrolyse du sulfate de cuivre se dépose sur la lame de cuivre. La force électromotrice correspond à la différence des chaleurs de formation du sulfate de zinc et du sulfate de cuivre, c'est-à-dire à la chaleur de substitution du zinc au cuivre dans le sulfate, soit 24,2 calories.

Ce couple présente une constance remarquable et c'est un de ceux dans lequel la force électromotrice change le moins par suite des variations de la température.

Dans le *couple de Grove*, le cuivre est remplacé par du platine : l'hydrogène est absorbé par de l'acide azotique et forme des composés nitrés d'un degré d'oxydation plus faible ; le zinc est placé dans une solution d'acide sulfurique ou de sulfate de zinc. En substituant du charbon au platine, on obtient le *couple de Bunsen*.

L'énergie disponible dans le couple de Grove et dans le couple Bunsen correspond à une quantité de chaleur d'environ 47 calories, ils ont donc une force électromotrice presque double de celle des couples de Daniell ; les liquides présentent d'ailleurs une résistance beaucoup plus faible. Aussi les emploie-t-on de préférence toutes les fois qu'on veut obtenir des courants très intenses ; mais les liquides s'altèrent rapidement, la résistance augmente, la force électromotrice diminue et le courant ne tarde pas à s'affaiblir.

193. Phénomènes électrostatiques dans les piles. — Le nom de *pile* donné habituellement à la réunion de plusieurs couples en communication les uns avec les autres provient de la forme imaginée d'abord par Volta. La pile à colonne de Volta se compose d'une série de doubles lames de zinc et de

[1] A. Becquerel, *Ann. de Ch. et de Phys.* (2), t. XLI, p. 5; 1829.

cuivre superposées dans le même sens et séparées les unes des autres par des rondelles de drap humide.

Un couple est formé par l'ensemble des corps qui existent entre deux zincs, c'est-à-dire zinc, cuivre, eau, zinc. On peut imaginer que chacune des lames de zinc appartient ainsi par moitié à deux couples successifs.

Si la pile commence à la partie inférieure par un cuivre et se termine en haut par un zinc, on voit que la première lame de cuivre n'intervient pas. La différence de potentiel étant égale à e pour chaque couple, le potentiel ira en croissant de bas en haut et, s'il y a n couples, la force électromotrice E de la pile est

$$E = en.$$

Pile non isolée. — Si la pile est mise en communication avec le sol par sa partie inférieure, à l'aide de conducteurs dont on puisse négliger l'influence, l'extrémité supérieure A a un potentiel $V_a = E = ne$ proportionnel au nombre des couples, quelles que soient d'ailleurs les dimensions de chacun d'eux. On vérifie facilement cette propriété, soit au moyen d'un électromètre, soit par la mesure des charges communiquées à un condensateur.

Pile isolée. — Si la pile, que l'on suppose formée de couples identiques, a été maintenue isolée pendant un temps assez long pour qu'elle ait pu prendre son équilibre, par suite des déperditions extérieures, la charge totale doit être nulle et la distribution des potentiels symétrique par rapport au point milieu.

Les potentiels aux extrémités A et B, ou sur les deux *pôles* de la pile, sont

$$V_a = -V_b = \frac{V_a - V_b}{2} = \frac{E}{2} = \frac{ne}{2},$$

et, sur le m^e couple à partir du pôle A,

$$V_m = V_a - me.$$

Si l'on donne à la pile un excès de charge Q_1, cette charge se distribuera comme sur un conducteur ordinaire de même

forme et produira à l'intérieur un potentiel constant V_1 tel qu'on ait, en appelant P la capacité de la pile,

$$Q_1 = PV_1.$$

Le potentiel V_1, s'ajoutant en chaque point au potentiel primitif, ne troublera pas la loi des contacts.

Supposons maintenant qu'on mette le m^e couple en communication avec une capacité C. Cette capacité prend une charge Q ; il en résultera pour la pile une chute V de potentiel en chaque point, de sorte qu'en désignant par V'_m le potentiel nouveau du couple considéré, on aura

$$Q = CV'_m = PV.$$

La loi des contacts n'étant pas troublée, le nouveau potentiel V'_a du pôle positif est

$$V'_a = \frac{ne}{2} + V_1 - \frac{C}{P} V'_m = \frac{ne}{2} + V_1 - \frac{C}{P}(V'_a - me),$$

$$V'_a\left(1 + \frac{C}{P}\right) - V_1 = e\left(\frac{n}{2} + m\frac{C}{P}\right).$$

On déterminerait de la même manière la distribution des potentiels sur une pile quelconque, composée d'éléments inégaux. Dans ce cas, le point neutre de la pile isolée et non chargée n'est plus au milieu.

194. Potentiels à l'intérieur de la pile. — Figurons la pile par une droite telle que chaque portion de longueur soit proportionnelle à la résistance de la partie qu'elle représente, et élevons en chaque point une ordonnée proportionnelle au potentiel de ce point. Pour une pile de Volta, par exemple, le potentiel croît d'une même quantité à chaque contact zinc-cuivre; la courbe présentera donc aux points correspondants une variation brusque et constante de l'ordonnée. Si la pile est ouverte, le potentiel reste constant d'un contact au suivant, la courbe figurative des potentiels sera formée d'une série d'échelons équidistants, comme les marches d'un escalier. La ligne de potentiel zéro passe par le milieu si la pile

est restée isolée, ou par un point quelconque si elle est reliée à une capacité ou au sol.

Pour la pile fermée, trois cas peuvent se présenter :

1° Le conducteur interpolaire a une résistance négligeable vis-à-vis de celle de la pile. Les deux pôles sont sensiblement au même potentiel, et chaque contact produit la même variation e; mais, d'un contact au suivant, il y a une chute continue de valeur égale. L'intensité est alors la même qu'avec un seul couple, car en appelant r la résistance de chacun d'eux, la loi d'Ohm donne

$$I = \frac{ne}{nr} = \frac{e}{r}.$$

2° La résistance de la pile est négligeable vis-à-vis de celle du conducteur interpolaire. Dans ce cas, la variation des potentiels dans l'intérieur de la pile est à très peu près la même que si elle était ouverte. A l'extérieur, la chute de potententiel est continue, et si R est la résistance du conducteur interpolaire, l'intensité du courant est alors proportionnelle au nombre des couples, car on a

$$I = \frac{E}{R} = n\frac{e}{R}.$$

3° Enfin, si la résistance du conducteur interpolaire est de même ordre que celle de la pile, le potentiel s'élève toujours d'une quantité constante à chaque contact et baisse d'une manière continue, mais d'une quantité moindre, d'un contact au suivant; la différence des potentiels des deux pôles a une valeur finie, moindre que dans le cas de la pile isolée, mais d'autant plus grande que la résistance interpolaire est plus grande, et l'intensité du courant est

$$I = \frac{E}{R + nr}.$$

195. Pile plongée dans un milieu conducteur. — Nous avons admis jusqu'à présent qu'aucune perte d'électricité n'a lieu par la surface latérale de la pile, mais il peut arriver que cette perte ne soit pas négligeable. Supposons qu'une pile à colonne

de Volta, composée de lames infiniment minces, soit plongée dans un milieu conducteur, et que l'électricité s'écoule en même temps par les parois latérales et par les extrémités ; ce serait le cas d'une pile plongée dans l'eau si l'on néglige les effets de polarisation. Soit ε la force électromotrice de la pile par unité de longueur, ρ la résistance intérieure et ρ' la résistance extérieure par unité de longueur (**164**).

Le flux d'électricité est encore parallèle aux génératrices dans la plus grande étendue de chaque section normale de la pile, et une partie s'échappe latéralement en chaque point, de sorte que les surfaces de niveau sont planes et se raccordent avec la surface latérale, comme dans la figure 41.

Entre deux points infiniment voisins P et P', dont les potentiels sont V et V', l'intensité I du courant intérieur satisfait à l'équation

$$V' = V + \varepsilon dx - I\rho dx,$$

$$(1) \qquad I = \frac{1}{\rho}\left(\varepsilon - \frac{dV}{dx}\right).$$

Supposons le régime permanent établi et considérons deux tranches successives. Le flux d'électricité $i dx$ qui s'échappe par un élément dx de la surface latérale est l'excès $I - I' = -dI$ du flux I qui traverse la première sur le flux I' qui traverse la seconde. On a donc

$$i = \frac{V}{\rho'} = -\frac{dI}{dx} = \frac{1}{\rho}\frac{d^2V}{dx^2}.$$

Posant encore $\beta^2 = \frac{\rho}{\rho'}$, on peut écrire

$$\frac{d^2V}{dx^2} - \beta^2 V = 0;$$

c'est la même condition que celle qui convient au régime permanent d'un fil avec perte par la surface. Pour déterminer les constantes de l'intégrale

$$V = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x},$$

supposons que l'on compte les longueurs à partir du milieu

de la pile et que, tout étant symétrique, le potentiel soit nul pour $x=0$; on a alors $A+B=0$ et

$$V=A(e^{\beta x}-e^{-\beta x}).$$

L'intensité du courant dans la pile et celle du courant latéral i par unité de longueur ont pour expressions

$$(2)\quad \begin{cases} I=\frac{1}{\rho}\left(\varepsilon-\frac{dV}{dx}\right)=\frac{1}{\rho}\left[\varepsilon-A\beta(e^{\beta x}+e^{-\beta x})\right], \\ i=\frac{A}{\rho'}(e^{\beta x}-e^{-\beta x}). \end{cases}$$

La constante A se déterminera, soit par le courant I_0 au milieu de la pile, soit par le potentiel $\pm V_1$ aux extrémités; il en résulte, en appelant $2l$ la longueur de la pile,

$$(3)\qquad \rho I_0=\varepsilon-2A\beta,\qquad V_1=A(e^{\beta l}-e^{-\beta l}).$$

Si l'on désigne par R_1 la résistance du milieu à partir de l'une des extrémités de la pile jusqu'au sol, ou la moitié de la résistance totale entre les deux pôles, et par I_1 le courant correspondant, on a aussi

$$I_1=\frac{V_1}{R_1}=\frac{A}{R_1}(e^{\beta l}-e^{-\beta l})=\frac{1}{\rho}\left[\varepsilon-A\beta(e^{\beta l}+e^{-\beta l})\right],$$

$$A\left[\left(\beta+\frac{\rho}{R_1}\right)e^{\beta l}+\left(\beta-\frac{\rho}{R_1}\right)e^{-\beta l}\right]=\varepsilon.$$

Lorsque la perte latérale est nulle, $\beta=0$, la constante A est infinie et le second terme de l'intensité I se présente sous une forme indéterminée, mais on en déduit finalement la valeur ordinaire

$$I=\frac{2l\varepsilon}{2\rho l+2R_1}=\frac{E}{2\rho l+2R_1}.$$

La résistance totale de la pile et du milieu, à partir du point P, est encore donnée par l'expression (**165**)

$$\frac{R+\sqrt{\rho\rho'}}{R-\sqrt{\rho\rho'}}=Ce^{2\beta x}=\frac{R_1+\sqrt{\rho\rho'}}{R_1-\sqrt{\rho\rho'}}e^{2\beta(x-l)}.$$

196. Phénomènes électrocapillaires. — Il résulte des expériences précédentes que toute modification de la surface de contact de deux corps amène une variation de la force électromotrice. Cette loi peut être considérée comme générale, et l'on doit admettre *à priori* qu'il existe une relation entre les forces électromotrices de contact de deux corps et toute autre propriété dépendant de l'état des surfaces.

Si l'on emploie, par exemple, une surface de mercure dans l'eau acidulée comme anode, le mercure se polarise, c'est-à-dire que la différence de potentiel de contact des deux liquides augmente de plus en plus avec la force électromotrice extérieure, jusqu'à ce que commence le dégagement des bulles de gaz. Comme les propriétés capillaires du mercure, c'est-à-dire sa tension superficielle, dépendent uniquement de l'état de la surface, il est à prévoir qu'elles changeront avec la polarisation.

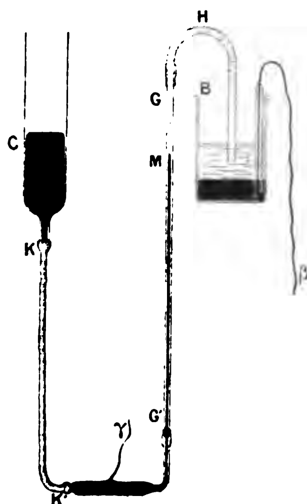


Fig. 42.

M. Lippmann (¹) a montré qu'il en est ainsi. La tension capillaire du mercure au contact de l'eau acidulée n'est définie que si la différence de potentiel de deux liquides est invariable; elle croît d'abord avec la polarisation du mercure,

(¹) G. Lippmann, *Ann. de chim. et de phys.* (5), t. V, p. 494; 1875.

jusqu'à ce que celle-ci atteigne environ 0,9 de la force électromotrice d'un couple Daniell, et diminue ensuite à mesure que la polarisation augmente.

Pour déterminer cette tension superficielle, M. Lippmann emploie, par exemple, la disposition suivante :

Un tube capillaire GG′ (fig. 42) renferme une colonne de mercure surmontée par de l'eau acidulée communiquant par un siphon avec un liquide semblable contenu dans un vase B, au fond duquel se trouve une couche de mercure. D'autre part, le tube GG′ est en relation par un tube de caoutchouc KK′ avec un vase de grand diamètre C contenant aussi du mercure. Des fils de platine β et γ communiquent avec le mercure du vase B et celui du tube capillaire.

Quand ces fils sont réunis directement, la différence des niveaux en C et M correspond à la tension superficielle normale A_0. Si R et R′ sont les rayons de courbure principaux de la surface du mercure en M et p_0 la pression au même point par unité de surface, on a

$$p_0 = A_0\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right). \tag{4}$$

Les fils β et γ sont mis en communication avec un électromètre et on établit un excès de potentiel x sur le premier. Le mercure s'abaisse en M; la tension superficielle prend donc une valeur plus grande A. On relève alors le vase C de manière à ramener le mercure au même point M; en appelant p l'excès de pression correspondante, on a

$$p + p_0 = A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = p_0\frac{A}{A_0}.$$

L'expérience indique que la pression p, *compensatrice* de la différence de potentiel x, est représentée, au moins pour la plus grande partie, par une courbe parabolique de la forme

$$p = (ax - bx^2)p_0;$$

il en résulte

$$A = A_0(1 + ax - bx^2). \tag{5}$$

Le maximum p_1 de la pression compensatrice a lieu pour la valeur x_1 déterminée par la condition $a = 2bx_1$, qui donne

$$p_1 = \frac{ax_1}{2} p_0 = bx_1^2 p_0.$$

Inversement, les fils β et γ étant soustraits à toute force électromotrice extérieure, si on élève le vase C, ce qui augmente la surface de contact du mercure avec l'eau, puisque ce liquide forme une gaîne le long du tube capillaire, la différence des niveaux C et M se maintient plus élevée, de sorte que la tension capillaire augmente. En même temps, la valeur de la différence de potentiel x des fils augmente, si elle était d'abord inférieure à son maximum x_1, ou diminue si elle était supérieure au maximum. Les mêmes effets se produisent en sens contraire quand on abaisse le vase C.

Dans les deux cas, la tension superficielle varie de manière qu'elle tend à s'opposer au mouvement produit. Cette propriété permet d'expliquer un certain nombre d'expériences relatives au mouvement d'une goutte de mercure dans l'eau acidulée, sous l'influence de l'électrisation.

La corrélation des deux phénomènes est une conséquence des principes généraux.

En effet, si S est la surface de contact d'une masse de mercure avec l'eau acidulée, les quantités S et x sont les varia- indépendantes du phénomène.

Soit dq la quantité d'électricité qui va de l'eau au mercure; on peut écrire

$$dq = X\,dS + YS\,dx. \tag{6}$$

Le coefficient X est la capacité de l'unité de surface, à différence de potentiel constante. Le coefficient Y est la charge relative à l'unité de surface, la surface restant constante, pour $dx = 1$; le produit YS est la capacité électrique de l'électrode, à surface constante. Comme cette capacité est, toutes choses égales, proportionnelle à la surface, le coefficient Y est une simple fonction de x.

La valeur de dq devant être la différentielle exacte d'une

fonction des variables indépendantes, d'après le principe de la conservation de l'électricité, il en résulte

$$(7) \qquad Y = \frac{\partial X}{\partial x}.$$

D'autre part, l'énergie apportée par la charge dq est $x\,dq$. Quand la surface change de dS, le travail de la tension capillaire est $-A\,dS$ et le travail extérieur nécessaire pour produire cette variation de surface est $A\,dS$. L'accroissement total d'énergie du système est donc

$$dW = x\,dq + A\,dS = (A + Xx)\,dS + YSx\,dx.$$

La variation d'énergie étant nulle pour un cycle fermé, cette expression est aussi une différentielle exacte, ce qui donne

$$Yx = \frac{\partial(A + Xx)}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} + X + x\frac{\partial X}{\partial x},$$

ou, en tenant compte de (7),

$$(8) \qquad X = -\frac{\partial A}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}.$$

Les capacités X et Y sont ainsi des fonctions de la tension superficielle et, comme celle-ci ne dépend que de x, il en est de même pour X et Y. En vertu de l'équation (2), la fonction A n'étant pas linéaire, le coefficient Y n'est pas nul. On peut alors écrire

$$dq = X\,dS + S\frac{dX}{dx}\,dx = d(XS) = -d\left(S\frac{dA}{dx}\right),$$

$$dW = d\left[S(A + Xx)\right] = d\left[S\left(A - x\frac{dA}{dx}\right)\right] = d\left[SA^2\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{A}\right)\right].$$

Il résulte de l'équation (6) que, si l'on déforme la surface, l'état électrique du système est modifié.

A différence de potentiel constante, $dx = 0$, la charge augmente ou diminue avec l'accroissement de surface, suivant

que la différence de potentiel x est supérieure ou inférieure à sa valeur maximum.

A charge constante, les liquides restant isolés, on a

$$YS\,dx = -X\,dS = \frac{dA}{dx}\,dS.$$

La capacité Y étant toujours positive, l'accroissement de potentiel est positif ou négatif suivant que la tension superficielle A est inférieure ou supérieure au maximum. On voit ainsi quelle est la réciprocité des phénomènes.

197. Distance des couches électriques. — Si l'on admet, avec von Helmholtz, l'idée de la couche double correspondant aux forces électromotrices de contact (**139**), les attractions et répulsions qui s'exercent entre les éléments de ces couches se superposent à l'action des forces moléculaires proprement dites, de manière à en diminuer l'effet; la tension superficielle, qui est la résultante, atteint sa valeur maximum lorsque la couche double est nulle.

L'hypothèse de la couche double conduit à une relation parabolique du second degré entre la tension superficielle A et la différence de potentiel x, conformément à ce qu'indique l'observation.

La capacité Y étant alors une constante $2bA_0$, au moins entre certaines limites, la distance ε des couches électriques est indépendante de la différence de potentiel; l'expérience permet d'en apprécier la grandeur [1].

Les deux valeurs de Y, calculées par la double couche ou par les phénomènes capillaires, donnent, en effet,

$$Y = \frac{1}{4\pi\varepsilon} = -\frac{d^2A}{dx^2} = 2bA_0,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi bA_0}.$$

La tension superficielle normale A_0 s'obtiendra en opérant avec un tube à section circulaire de rayon R; pour $x = 0$, la colonne de mercure de hauteur égale à la différence de niveau des surfaces C et M (fig. 42), corrigée de celle qui correspond

[1] G. Lippmann, *Journal de phys.* [2], t. II, p. 113; 1883.

à la colonne d'eau donnée par la différence de niveau MB, détermine la pression p_0; par suite

$$A_0 = \frac{R}{2} p_0.$$

Quant à la pression compensatrice p, elle est simplement proportionnelle à l'élévation correspondante du niveau C.

La valeur de A_0, ainsi déterminée, est de 30,1 milligrammes par millimètre, ou 295 dynes par centimètre (17).

Dans les mesures de M. Lippmann, la différence de potentiel était évaluée comme une fraction u de la force électromotrice D du couple Daniell, d'où résulte $x = u\mathrm{D}$. Les coefficients relatifs à ce mode de détermination étant a' et b', les équations précédentes deviennent

$$p = (a'u - b'u^2)p_0 = \left(a'\frac{x}{\mathrm{D}} - b'\frac{x^2}{\mathrm{D}^2}\right)p_0,$$

$$\mathrm{Y} = 2b'\frac{A_0}{\mathrm{D}^2}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{8\pi b'} \cdot \frac{\mathrm{D}^2}{A_0}.$$

On a donc, pour le maximum de tension superficielle,

$$\frac{p_1}{p_0} = b' u_1^2.$$

L'expérience a donné

$$u_1 = 0{,}91 \qquad \text{et} \qquad \frac{p_0}{p_1} = \frac{75}{35{,}85} = 2{,}09;$$

d'où

$$\frac{1}{b'} = u_1^2 \frac{p_0}{p_1} = (0{,}91)^2 . 2{,}09 = 1{,}73.$$

Substituant ces valeurs de b' et de A_0 dans l'expression de ε, il en résulte

$$\varepsilon = \frac{1{,}73}{8\pi} \cdot \frac{\mathrm{D}^2}{295} = \frac{10^{-3}}{4{,}28}\mathrm{D}^2.$$

La force électromotrice D vaut environ 1 volt, ou $\frac{1}{300}$ en unités électrostatiques; on trouve finalement

$$\varepsilon = \frac{10^{-7}}{38}\,\text{centim.} = \frac{1^c}{380\,000\,000}.$$

Cette épaisseur donne une idée des distances moléculaires; il est intéressant de constater que le résultat ainsi obtenu est très voisin de celui auquel était arrivé Lord Kelvin (**143**) par des considérations toutes différentes.

198. Travail chimique des piles. — On a réservé, jusqu'à présent, comme actions secondaires, les phénomènes chimiques qui ne sont pas liés au passage du courant, de sorte que l'énergie totale des réactions, ou la *chaleur chimique*, serait représentée finalement par l'échauffement du circuit en vertu de la loi de Joule, ou par la *chaleur voltaïque*, mais cette relation n'est qu'accidentelle.

Favre [1] avait reconnu dès 1858 que la chaleur chimique est souvent très différente de la chaleur voltaïque; la force électromotrice n'est donc pas, d'une manière générale, proportionnelle à la somme algébrique des énergies thermiques des réactions dont la pile est le siège pour l'unité d'électricité. L'énergie chimique est souvent supérieure et quelquefois inférieure à la chaleur voltaïque; dans ce dernier cas, la température de la pile ne peut rester constante que si elle emprunte de la chaleur aux corps environnants.

Pour rendre compte de cette circonstance, Von Helmholtz [2] considère l'énergie des corps sous deux espèces, l'une *libre*, c'est-à-dire capable de se transformer en un travail extérieur, l'autre *dépendante*, qui ne se manifeste que par un dégagement de chaleur.

On peut traduire ce principe, admis comme hypothèse, de la manière suivante [3] :

L'énergie voltaïque d'un couple équivaut au travail non compensé (75) *que fourniraient les réactions chimiques si elles se produisaient sans courant.*

En d'autres termes, *l'excès de la chaleur totale sur la chaleur voltaïque équivaut au travail compensé qui accompagne la réaction.*

Supposons la pression uniforme et constante. Soit P l'équivalent électrochimique d'un des éléments du couple, Φ et S

(1) P.-A. Favre, *C. R. de l'Académie des sciences*, t. XLVI, p. 658 et t. XLVII, p. 599; 1858.

(2) Von Helmholtz, *Journal de phys.* [2], t. III, p. 396; 1884.

(3) P. Duhem, *Potentiel thermo-dynamique*, p. 111.

le potentiel thermodynamique et l'entropie relatifs à l'unité de masse, C l'énergie correspondant à la chaleur spécifique et V le volume spécifique.

Lorsque le couple est traversé par une quantité dq d'électricité, sa force électromotrice étant E, l'énergie voltaïque est $E\,dq$, le poids de l'un des éléments augmente de $P\,dq$ et le travail non compensé correspondant est $P\Phi\,dq$. On a donc

$$E = -\Sigma P\Phi. \tag{9}$$

D'autre part, le travail compensé $dq\,\Sigma PS$ est égal à l'excès $A\,dq$ de la chaleur chimique sur la chaleur voltaïque, ce qui donne

$$A = -T\Sigma PS. \tag{10}$$

Quand il s'agit d'une dissolution, dont le courant modifie la richesse, la quantité de liquide restant invariable, le passage de la quantité dq d'électricité augmente le poids du corps dissous de $dm = P\,dq$; les variations du potentiel thermodynamique Φ' et l'entropie S' sont alors, en tenant compte des expressions (14) de n° 75,

$$P\,dq\,\frac{\partial \Phi'}{\partial m} = P\varphi\,dq,$$

$$P\,dq\,\frac{\partial S'}{\partial m} = P s\,dq.$$

Il suffit donc dans les équations (9) et (10) de remplacer les termes relatifs à la dissolution par leurs dérivées partielles par rapport au corps dissous.

La dérivée de l'équation (9) par rapport à T donne alors, en tenant compte de l'équation (13) du n° 75 pour les métaux et des équations (14)′ pour les dissolutions,

$$\frac{\partial E}{\partial T} = -\Sigma P\frac{\partial \Phi}{\partial T} = \Sigma PS,$$

ou

$$A = -T\frac{\partial E}{\partial T}. \tag{11}$$

C'est la relation fondamentale établie par Von Helmholtz. Si la valeur de A est positive, c'est-à-dire si la chaleur chimique est en excès sur la chaleur voltaïque, le second membre doit être positif : la force électromotrice diminue quand la température augmente.

L'inverse a lieu quand la valeur de A est négative : la force électromotrice croît alors avec la température.

Ces deux propriétés sont d'ailleurs réciproques.

Pour que la force électromotrice soit indépendante de la température, il faut que la quantité A soit constamment nulle, c'est-à-dire que

$$\Sigma P \frac{\partial S}{\partial T} = 0,$$

Remplaçant les dérivées par leurs valeurs tirées des équations du n° 75, on peut écrire

$$\Sigma PC = 0.$$

Cette équation signifie que le passage du courant n'entraîne aucune variation dans la chaleur spécifique moyenne du couple. En d'autres termes, *la loi de Kopp et Wœstyne doit s'appliquer à tous les éléments du couple pour que la force électromotrice soit indépendante de la température*.

M. Lippmann (¹) avait démontré cette propriété directement par la considération des couples reversibles.

La dérivée de l'équation (9) par rapport à la pression donne encore, en tenant compte des relations déjà citées,

$$\frac{\partial E}{\partial p} = -\Sigma P \frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\Sigma PV.$$

Le dernier membre représente la diminution de volume du couple que produit le passage de l'unité d'électricité.

Si donc les réactions chimiques sont accompagnées d'un changement de volume, la force électromotrice croît avec la pression lorsque le volume diminue et varie en sens inverse de la pression quand le volume augmente.

Pour les couples qui dégagent des gaz, comme le couple

(¹) G. Lippmann, *C. R. de l'Acad. des sciences*, t. XCIX, p. 895; 1884.

Bunsen, le passage du courant augmente le volume; ces couples ont une force électromotrice d'autant moindre qu'ils fonctionnent sous une pression plus grande.

Dans les couples à gaz, au contraire, le volume diminue beaucoup; leur force électromotrice croît avec la pression.

Enfin les couples du genre Daniell, dont le volume ne varie pas sensiblement, ont une force électromotrice à peu près indépendante de la pression.

199. Couples réversibles. — La considération des couples réversibles permet encore de présenter ces résultats sous une autre forme [1].

Supposons qu'une pile réversible de force électromotrice E soit mise en communication par des conducteurs de résistance négligeable avec les plateaux d'un condensateur. Si les plateaux se rapprochent, de manière que la capacité augmente de dC, la charge électrique augmente de $dq = E\,dC$.

Le travail extérieur $d\mathfrak{T}$ est représenté par l'énergie $E\,dq$ que la pile fournit au condensateur :

$$d\mathfrak{T} = E\,dq.$$

On considérera ici q et T comme variables indépendantes.

En appelant dQ l'énergie calorifique absorbée et dU la variation d'énergie de la pile, on a

$$dQ = dU + E\,dq = \left(E + \frac{\partial U}{\partial q}\right) dq + \frac{\partial U}{\partial T}\,dT.$$

Si les phénomènes sont réversibles, l'application du principe de Carnot (73) donne

$$E + \frac{\partial U}{\partial q} = T\,\frac{\partial E}{\partial T},$$

$$(12) \qquad -\frac{\partial U}{\partial q} = E - T\,\frac{\partial E}{\partial T}.$$

Le premier membre de cette équation représente l'énergie fournie par la pile, à température constante, pendant le passage de l'unité d'électricité, ou la chaleur chimique; le pre-

(1) A. Potier, *Journal de phys.* [2], t. IV, p. 220; 1885, et t. VIII, p. 223; 1889.

mier terme du second membre est le travail correspondant utilisable à l'extérieur, ou la chaleur voltaïque; le dernier terme est l'excès A de la chaleur chimique sur la chaleur voltaïque. On retrouve ainsi la relation (11) de von Helmholtz.

On en déduirait directement la condition nécessaire entre les chaleurs spécifiques des éléments pour que la force électromotrice soit indépendante de la température.

200. Effets de contact. — Si les plateaux du condensateur sont formés de métaux différents, zinc et cuivre par exemple, reliés simplement par un fil extérieur, la différence de potentiel V a pour origine le contact des métaux. La variation d'énergie du système, en dehors du condensateur, pour le passage de l'unité d'électricité, est encore

$$(13) \qquad -\frac{\partial U}{\partial q} = V - T\frac{\partial V}{\partial T}.$$

Cette variation doit être nulle, à température constante, puisque la surface de contact des deux métaux n'est pas modifiée; il en résulterait

$$V = T\frac{\partial V}{\partial T}, \quad \text{ou} \quad V = AT.$$

La force électromotrice de contact V serait proportionnelle à la température. Or, les expériences indiquent que cette relation n'est pas vérifiée, au moins d'une manière générale; le raisonnement est donc incomplet.

Les seules parties du système qui aient subi un changement d'état dans la transformation considérée sont les surfaces opposées des armatures. On doit en conclure que ces surfaces sont le siège d'une énergie spéciale variable avec leur distance, c'est-à-dire avec la charge. Si l'on désigne par λdq la variation de cette énergie que produit l'accroissement de charge dq, le coefficient λ est l'accroissement d'énergie des surfaces pour l'unité d'électricité; le travail extérieur est alors $(V+\lambda)dq$, ce qui donne

$$dQ = \left(V + \lambda + \frac{\partial U}{\partial q}\right)dq + \frac{\partial U}{\partial T}dT.$$

Le principe de Carnot donne alors, en admettant que λ soit indépendant de la température,

$$V+\lambda+\frac{\partial U}{\partial q}=T\frac{\partial V}{\partial T}.$$

On retrouve ainsi l'équation (13), avec cette seule différence que la valeur de V a été augmentée de λ. Comme l'énergie U est invariable à température constante, il en résulte

$$\lambda=T\frac{\partial V}{\partial T}-V.$$

L'énergie correspondant au terme λ est localisée à la surface des métaux, proportionnelle à cette surface S et variable avec la densité superficielle σ.

Désignant par M et M' les énergies des deux métaux par unité de surface, on a

$$\lambda dq=S\lambda d\sigma=S(dM+dM'),$$

ou, les densités σ et σ' des éléments correspondants étant égales et de signes contraires,

$$\lambda=\frac{d(M+M')}{d\sigma}=\frac{dM}{d\sigma}-\frac{dM'}{d\sigma'}.$$

Si la valeur de λ n'est pas nulle, on en conclut que l'état du diélectrique est inégalement modifié au contact de deux métaux, de natures différentes ou de même nature, dont les potentiels sont inégaux. Il existe à la surface de chaque métal, une force électromotrice $\frac{dM}{d\sigma}$ dirigée du diélectrique vers le métal.

L'expérience montre que la valeur de V est indépendante des charges, au moins entre certaines limites; on pourrait admettre que, pour les métaux, ces forces électro-motrices sont constantes et l'énergie superficielle simplement proportionnelle à la charge.

Les plateaux d'un condensateur se comportent ainsi comme les électrodes dans un liquide.

Si L est l'énergie du liquide par unité de surface, l'arrivée de l'unité d'électricité sur le métal est accompagnée du départ

d'une charge égale de la surface liquide et la variation d'énergie correspondante est

$$P = \frac{dM}{d\sigma} - \frac{dL}{d\sigma'}.$$

Tant qu'il n'y a pas d'action chimique, cette expression représente la force électromotrice due au contact de l'électrode et de l'électrolyte, c'est-à-dire que la variation d'énergie de l'ensemble pour la surface S est $P\,dq = P\,d(S\sigma)$.

Lorsque deux métaux plongent dans un même liquide, la polarisation totale est $P - P'$; si les charges par unité de surface sont les mêmes, la polarisation se réduit à

$$P - P' = \frac{dM}{d\sigma} - \frac{dM'}{d\sigma'},$$

c'est-à-dire à la même valeur que dans l'air. Cette conséquence est vérifiée par les expériences de M. Pellat [1] dans le cas de charges nulles.

Si les dérivées $\frac{dM}{d\sigma}$ et $\frac{dM'}{d\sigma'}$ sont constantes, la dérivée $\frac{dP}{d\sigma}$ est la même fonction de σ pour deux métaux différents; or cette dérivée est l'inverse de la capacité de polarisation, laquelle doit être la même fonction de la densité superficielle pour deux métaux différents.

Si l'on veut tenir compte de l'effet Peltier, il suffit de remarquer que l'énergie calorifique absorbée à la surface de contact, pour maintenir la température constante, correspond à la différence de niveau électrique H; on a alors

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = H = V + \lambda = T\,\frac{\partial V}{\partial T}.$$

Cette valeur de H n'est donc pas égale, en général, à la différence de potentiel V qui serait déterminée par des méthodes électrométriques (**179**).

[1] PELLAT, *C. R. de l'Acad. des sciences*, t. CVIII, p. 567; 1889.

CHAPITRE ONZIÈME

PHÉNOMÈNES THERMOÉLECTRIQUES

201. Découverte de Seebeck. — Lorsqu'il existe des différences de température dans une chaîne de métaux fermée, particulièrement aux points de contact, la somme des forces électromotrices n'est plus nécessairement nulle, puisque chacune d'elles est fonction de la température, et il peut se produire dans le circuit un courant, dit *thermoélectrique*. Cette découverte importante est due à Seebeck (1).

On constate habituellement ces courants par leur action électromagnétique, au moyen d'un *galvanomètre* intercalé dans le circuit, et on déduit de la loi d'Ohm la force électromotrice correspondante. On pourrait également couper le circuit en un point pris en dehors des soudures et déterminer par les méthodes ordinaires électrostatiques la différence de potentiel des deux bouts ainsi isolés.

Considérons un cadre rectangulaire dont un côté est formé par une barre de *bismuth*, et les trois autres par une lame de *cuivre* soudée aux deux bouts du bismuth. Si l'on chauffe l'une des soudures, on constate que le cadre agit sur une aiguille aimantée placée à l'intérieur; il se produit donc un courant électrique, et le système forme un *couple thermoélectrique*. Dans ce cas, le courant va du bismuth au cuivre à travers la soudure la plus chaude; on dit que le cuivre est négatif par rapport au bismuth. Si l'on remplace le bismuth par de l'antimoine, le courant est inverse, il va du cuivre à l'antimoine

(1) Seebeck, *Mém. de l'Acad. de Berlin*, t. IX, p. 265; 1821. — *Ann. de chim. et de phys.* [2], t. XXII, p. 199; 1823.

par la soudure chaude; l'antimoine est donc négatif par rapport au cuivre.

Il est naturel de penser que les métaux se classent suivant une série régulière, au point de vue de cette nouvelle propriété, et que l'antimoine, négatif par rapport au cuivre, est à plus forte raison négatif par rapport au bismuth. C'est ce que l'expérience vérifie, en effet, et la force électromotrice pour les mêmes températures aux soudures est plus grande avec le couple bismuth-antimoine qu'avec chacun des deux couples bismuth-cuivre ou cuivre-antimoine.

202. Lois des courants thermoélectriques. — Sans discuter les expériences qui ont permis d'étudier ces phénomènes, nous nous bornerons à en résumer les lois.

I. Loi de Volta. — *Dans un circuit métallique quelconque, dont tous les points sont à la même température, il n'y a jamais de courant.*

En effet, la somme algébrique de toutes les forces électromotrices de contact est alors nulle (**141**).

II. Loi de Magnus ([1]). — *Dans un circuit homogène, il n'y a jamais de courant permanent, quelles que soient la forme du conducteur et les variations de température qui existent entre les différents points du circuit.*

Cette loi entraîne comme conséquence, ou bien que la variation de température d'un point à un autre ne détermine aucune différence de potentiel entre ces deux points, ou bien que cette différence, si elle existe, ne dépend que des températures elles-mêmes et nullement de la loi de transition.

Depuis le point le plus chaud du circuit jusqu'au point le plus froid, on trouve en effet, par deux chemins différents, la même chute de température et, puisque le courant est nul, la même variation de potentiel, quel que soit le mode de passage d'une température à l'autre sur les deux chemins.

Il résulte de la loi de Magnus que *la force électromotrice d'un couple ne dépend que des températures des deux soudures, quelle que soit la distribution de la température dans les conducteurs qui les séparent.*

Nous représenterons par $E_1^2(AB)$ la force électromotrice du

([1]) Magnus, *Pogg. Ann.*, t. LXXXIII, p. 469; 1851. — *Ann. de chim. et de phys.* [3], t. XXXIV, p. 105; 1852.

couple formé par les deux métaux A et B lorsque les soudures froide et chaude sont aux températures t_1 et t_2, le courant allant de A en B à travers la soudure chaude. Cette force électromotrice est une fonction des deux températures t_1 et t_2.

III. Loi des températures successives (Becquerel). — *Pour un couple donné, la force électromotrice entre deux températures quelconques* t_1 *et* t_2 *est la somme des forces électromotrices que l'on obtient entre* t_1 *et* t_n *d'une part, puis entre* t_n *et* t_2, *la température* t_n *étant intermédiaire aux deux premières* (1).

Cette loi peut se traduire de la manière suivante :

$$E_1^2 = E_1^n + E_n^2.$$

Nous savions déjà que la force électromotrice ne dépend que des températures des deux soudures : on voit maintenant qu'elle peut être exprimée par la différence de deux termes, dont l'un ne contient que la température t_1, l'autre la température t_2, ces deux termes étant les valeurs d'une même fonction de la température. On peut donc écrire

$$E_1^2 = F(t_2) - F(t_1).$$

IV. Loi des métaux intermédiaires (Becquerel). — *Si deux métaux* A *et* B *sont séparés dans un circuit par un ou plusieurs métaux intermédiaires maintenus tous à une même température* t, *la force électromotrice est la même que si les deux métaux étaient unis directement et la soudure portée à la même température* t.

Cette loi a une grande importance pratique : elle montre, en particulier, que la substance employée pour souder deux métaux n'a aucune influence sur les phénomènes auxquels ils donnent lieu.

On peut encore la traduire par l'équation

$$E(AB) = E(AC) + E(CB).$$

En effet, si deux métaux A et B sont réunis à la soudure chaude par un métal intermédiaire C, on peut, d'après la loi

(1) A. Becquerel, *Ann. de chim. et de phys.* [2], t. XXXI, p. 371; 1826 et t. XLI, p. 353; 1829.

de Magnus, imaginer qu'un point P de ce troisième métal est à la température inférieure t et interposer, de même, à la soudure froide un morceau du métal C maintenu à la température de cette soudure. On a alors dans le circuit, entre les mêmes limites de température, les deux couples AC et CB; la force électromotrice résultante est celle qui se produirait directement entre les métaux A et B.

V. Phénomènes d'inversion. — Pour certains couples thermoélectriques, l'intensité du courant augmente d'une manière continue à mesure qu'on élève la température de la soudure chaude, celle de la soudure froide restant invariable. Le couple est alors dit à *marche uniforme*, lorsque la force électromotrice est proportionnelle à la différence des températures des deux soudures.

Dans la plupart des cas, au contraire, la force électromotrice du couple, après avoir passé par un maximum, devient nulle, puis change de signe.

Il y a donc, à partir d'une certaine température, *inversion* du courant, et l'intensité augmente ensuite d'une manière continue sans manifester de nouvelle inflexion. Ce phénomène a été découvert par Cumming (1).

Gaugain a constaté que la température d'inversion dépend de celle de la soudure froide, et que *la moyenne des températures des deux soudures au moment de l'inversion est toujours égale à la température du maximum d'intensité.*

203. Représentation des phénomènes. — Gaugain (2), dans un travail remarquable sur ce sujet, représente la marche des phénomènes thermoélectriques par un procédé graphique qui permet de vérifier facilement les lois qui précèdent. Désignant par t_0 la température de la soudure froide, il prend pour abscisse l'excès de température $t - t_0$ de la source chaude, la soudure froide ayant une température constante de 20°, et pour ordonnée une longueur proportionnelle au courant observé, c'est-à-dire à la force électromotrice correspondante, puisque la résistance du circuit est invariable.

On observe sur ces courbes (fig. 43) les propriétés suivantes :

1° Elles sont symétriques par rapport à l'ordonnée maxi-

(1) Cumming, *Thomson, Ann. phil.*, t. VI, p. 177; 1823.
(2) Gaugain, *Ann. de chim. et de phys.* [3], t. LXV, p. 5; 1862.

mun, ce qui vérifie la loi relative à la température d'inversion, car, en appelant t_m la température du maximum et t_i celle d'inversion, on a toujours

$$t_m = \frac{t_0 + t_i}{2}.$$

Ces courbes ont été considérées par Gaugain comme des branches d'hyperboles à axe vertical, mais on peut aussi bien les remplacer par des paraboles ; les différences des ordonnées calculées par les deux méthodes pour un même couple sont de l'ordre des erreurs expérimentales. La théorie indique, en effet, comme nous le verrons plus loin, que la courbe représentative des forces électromotrices en fonction de la température doit être une parabole.

2° Si l'on mène une horizontale par un point M_1, qui corres-

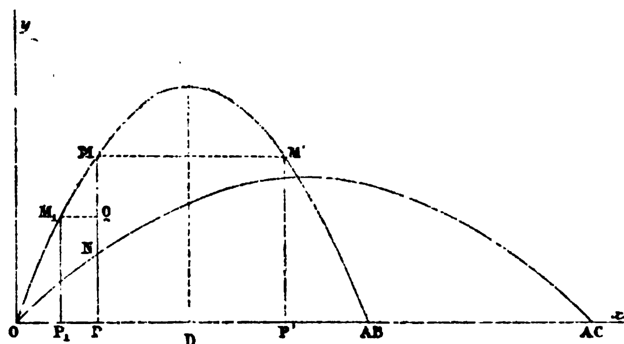


Fig. 43.

pond à la température t_1, les ordonnées, comptées à partir de cette droite représentent les forces électromotrices obtenues directement quand on maintient la soudure froide à cette température t_1. La loi des températures successives se trouve ainsi vérifiée, puisqu'on a

$$MP = MQ + QP = MQ + M_1P_1.$$

Si OP représente la température de la soudure froide et qu'on mène l'horizontale MM', OP' sera la nouvelle température d'inversion ; on voit que le phénomène d'inversion dépend de l'état des deux soudures.

3° Si deux courbes AB et AC représentent les forces électromotrices pour les couples formés par un métal A associé respectivement à deux métaux B et C, l'expérience montre que la différence MN des ordonnées des deux courbes représente la force électromotrice du couple formé par les deux métaux B et C. La relation $MP = PN + NM$ équivaut donc à la loi des métaux intermédiaires.

$$E(AB) = E(AC) + E(CB).$$

204. Conséquences du principe de Volta. — En laissant à part le phénomène de l'inversion, on peut considérer les lois qui précèdent comme des conséquences du principe de Volta, que les seules différences de potentiel indépendantes du courant se produisent aux surfaces de contact.

Dans cet ordre d'idées, la force électromotrice d'un couple est la somme algébrique des deux forces électromotrices de sens contraires qui existent aux deux soudures.

Si l'on convient de représenter par $\frac{B|A}{t} = H$ la différence de potentiel de contact des métaux B et A sur la soudure à la température t, c'est-à-dire l'élévation de niveau quand on va du métal A au métal B, on aura

$$E_1^2(AB) = \frac{B|A}{t_2} - \frac{B|A}{t_1} = H_2 - H_1.$$

Soit I l'intensité du courant qui traverse le circuit dont la résistance totale est R. Pendant l'unité de temps, l'énergie calorifique empruntée à la soudure chaude est IH_2 et l'énergie dégagée à la soudure froide IH_1; la différence est transformée en chaleur, qui se dégage le long du circuit conformément à la loi de Joule, et l'on a

$$IH_2 = IH_1 + I^2R, \qquad I = \frac{H_2 - H_1}{R}.$$

Le système peut donc être considéré comme une machine thermique fonctionnant entre deux sources aux températures t_1 et t_2, et produisant un travail extérieur I^2R.

La loi de Magnus est comprise dans l'hypothèse même qu'il n'existe de force électromotrice qu'aux soudures.

La loi des températures successives résulte de l'identité

$$E_1^2(AB) = \frac{B|A}{t_2} - \frac{B|A}{t_n} + \frac{B|A}{t_n} - \frac{B|A}{t_1} = E_1^n + E_n^2.$$

Enfin la loi des métaux intermédiaires est également évidente, car on a, par définition,

$$E_1^2(AC) + E_1^2(CB) = \frac{C|A}{t_2} - \frac{C|A}{t_1} + \frac{B|C}{t_2} - \frac{B|C}{t_1}.$$

Le principe de Volta donnant, pour une température quelconque, $B|A = B|C + C|A$; l'équation précédente devient

$$E_1^2(AC) + E_1^2(CB) = \frac{B|A}{t_2} - \frac{B|A}{t_1} = E_1^2(AB).$$

205. Conséquences de l'inversion. — Considérons un circuit composé de deux métaux A et B. Pour rendre compte de l'inversion avec les seuls effets de contact, il faudrait admettre que la différence de potentiel H_2 à la soudure chaude augmente d'abord avec la température, passe par un maximum, diminue ensuite et devient égale, pour la température d'inversion, à la différence de potentiel H_1 sur la soudure froide. Puis la valeur de H_2 continuerait de décroître; dans ce cas, le courant étant changé de signe, le jeu des forces électriques produirait un dégagement de chaleur sur la soudure chaude, une absorption à la soudure froide, outre l'échauffement du circuit en vertu de la loi de Joule.

On peut alors imaginer que les causes de refroidissement du circuit par rayonnement soient tellement diminuées qu'il soit possible de supprimer la source de chaleur, et que le seul passage du courant suffise, non seulement à entretenir la température de la soudure chaude, mais à l'élever encore, et à diminuer celle de la soudure froide, ce qui aurait pour résultat d'exagérer le courant. Cette manière de concevoir le phénomène permettrait donc de réaliser un circuit métallique

possédant la singulière propriété de transporter de la chaleur des points les plus froids sur les points plus chauds, sans aucune dépense d'énergie. Un pareil résultat n'est pas aussi manifestement impossible que le mouvement perpétuel, mais il est incompatible avec l'allure générale des phénomènes calorifiques; il est d'ailleurs en contradiction directe avec le principe de Carnot.

L'hypothèse des seules forces électromotrices de contact aux soudures exigerait, en effet, que tous les couples eussent une marche uniforme.

Pour le montrer, supposons qu'un couple thermoélectrique fonctionnant entre les températures t_1 et t_2 soit mis en communication avec un électrolyte à réactions réversibles, dont la force électromotrice de décomposition est E. L'énergie calorifique du couple étant employée à l'échauffement du circuit et à l'opération chimique, on aura

$$IH_2 - IH_1 = I^2R + IE.$$

Si l'intensité du courant I est très petite, la résistance R conservant une valeur modérée, le terme I^2R est négligeable devant les autres; la force électromotrice d'opposition E est alors très peu inférieure à $H_2 - H_1$ et l'excès de chaleur fournie par la source chaude produit le travail extérieur IE. Supposons que, par un moyen quelconque, on fasse croître E jusqu'à une valeur E′, très peu supérieure à $H_2 - H_1$, le courant changera de sens; si la valeur absolue de l'intensité est restée la même, les mêmes quantités de chaleur seront encore mises en jeu à chaque soudure, mais en sens inverse, et l'électrolyte fournira cette fois du travail au lieu d'en absorber. Dans le cas d'un courant très faible, la pile thermoélectrique se comporte donc comme une machine thermique réversible, et on peut lui appliquer le principe de Carnot. Les énergies calorifiques $Q_1 = IH_1$ et $Q_2 = IH_2$ absorbées ou fournies par les deux sources, suivant le jeu de la machine, doivent être proportionnelles aux températures absolues T_1 et T_2 des soudures correspondantes, ce qui donne

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}, \quad \text{ou} \quad \frac{H_2}{T_2} = \frac{H_1}{T_1} = A.$$

Il en résulterait

$$\frac{H_2 - H_1}{T_2 - T_1} = \frac{E_1^2}{T_2 - T_1} = A,$$

et, par suite,

$$E_1^2 = A(T_2 - T_1).$$

La force électromotrice étant alors proportionnelle à la différence des températures des deux soudures, tous les couples auraient une marche uniforme et, dans ces conditions, le phénomène de l'inversion du courant ne devrait jamais se présenter.

206. Théorie de lord Kelvin. — Il faut donc admettre l'existence de forces électromotrices autres que les différences de potentiel de contact, qui soient capables de donner également des phénomènes calorifiques réversibles [1].

Les moindres changements dans l'état physique des métaux, tels que la trempe, la torsion ou la traction, etc., modifient leurs propriétés électriques et suffisent pour mettre en défaut la loi de Magnus; il est donc naturel de généraliser le principe de Volta et d'admettre que le contact de deux parties du même métal à des températures différentes donne aussi lieu à une différence de potentiel.

La force électromotrice qui résulte des inégalités de la température est nulle dans un fil homogène, parce que la chute totale de potentiel de part et d'autre du maximum a la même valeur; mais cette compensation cesse d'avoir lieu de part et d'autre de la soudure des deux métaux et on doit tenir compte de la variation continue du potentiel que les différences de température déterminent le long des conducteurs.

Pour préciser les idées, considérons un couple cuivre-fer, fonctionnant entre les températures t_1 et t_2, et soient H_1 et H_2, (fig. 44) les forces électromotrices de contact à ces deux températures; supposons en outre que, le long du cuivre C*u*, par suite de l'élévation de température depuis t_1 jusqu'à t_2, le potentiel ait crû d'une quantité c indépendante de l'intensité

[1] W. Thomson, *Phil. trans. L. R. S.*; 1856, p. 469.

du courant; qu'inversement sur le fer F*e* il y ait, pour le même excès de température, une diminution de potentiel f; le potentiel, dans le voisinage de la soudure chaude, s'est élevé pour cette cause de la quantité $f + c = h$, et la force électromotrice du couple est maintenant

$$E = H_2 + h - H_1.$$

Nous avons admis d'abord que la température t_2 est inférieure à celle qui produit l'inversion. Le courant allant du

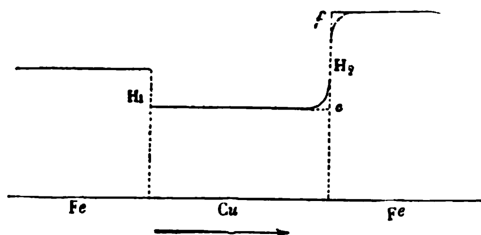


Fig. 44.

cuivre au fer par la soudure chaude, l'énergie calorifique qu'il absorbe tant à la soudure chaude que sur les points voisins est égale à $(H_2 + h)$ I, et celle qu'il dépense à la soudure froide est H_1I.

La température inférieure t_1 restant invariable, la force électromotrice du couple augmente tant que la somme $H_2 + h$ est croissante, et un maximum peut se produire pour une température t_m, évidemment indépendante de t_1, déterminée par la condition

$$\frac{dH_2}{dt} + \frac{dh}{dt} = 0.$$

Nous verrons qu'à ce moment la valeur de H_2 est nulle et qu'elle devient ensuite négative. La différence de potentiel au voisinage de la soudure est alors due seulement aux variations de température sur les deux métaux.

La température continuant à croître, H_2 change de signe, le fer qui était positif par rapport au cuivre devient négatif. Si

l'on met ce changement de signe en évidence, l'inversion du courant a lieu au moment où $h - H_1 - H_2 = 0$.

Pour une température plus élevée sur la soudure chaude, la force électromotrice change de signe et devient $H_1 + H_2 - h$. Dans ce cas, le courant, marchant en sens inverse, absorbe de l'énergie calorifique aux deux soudures, IH_2 à la soudure chaude, IH_1 à la soudure froide; il en dégage une quantité Ih sur les points où la température est variable et I^2R dans le parcours du circuit.

Telle est l'idée générale de la théorie, dont nous allons développer les conséquences mathématiques.

207. Pouvoirs thermoélectriques. — D'après la loi des températures successives, la force électromotrice d'un couple est la différence des valeurs d'une même fonction pour les températures des deux soudures. Si ces températures t et $t+dt$ sont infiniment voisines, la force électromotrice est aussi infiniment petite et a pour expression

$$dE = F(t+dt) - F(t) = \frac{dF}{dt} dt;$$

on peut donc écrire

$$(1) \qquad \frac{dE}{dt} = \frac{dF}{dt} = \varphi(t).$$

Lord Kelvin appelle la fonction $\varphi(t)$ *le pouvoir thermoélectrique des deux métaux considérés à la température* t. Cette fonction n'est autre chose que le coefficient angulaire de la tangente aux courbes de Gaugain. La force électromotrice du couple, pour les températures t_1 et t_2 des deux soudures, est l'intégrale $\int \varphi(t)\,dt$ du pouvoir thermoélectrique, prise entre les mêmes limites de température.

La propriété suivante permet d'exprimer d'une manière très simple l'ensemble des phénomènes.

Le pouvoir thermoélectrique de deux métaux A *et* B *à une température* t *est égal à la différence des pouvoirs thermoélectriques des mêmes métaux* A *et* B *par rapport à un troisième métal quelconque* X.

On a, en effet, par la loi des métaux intermédiaires,

$$E(AX) = E(AB) + E(BX).$$

$$\frac{dE(AX)}{dt} = \frac{dE(AB)}{dt} + \frac{dE(BX)}{dt};$$

la dernière équation peut s'écrire

$$\varphi(AX) = \varphi(AB) + \varphi(BX),$$

$$(2) \qquad \varphi(AB) = \varphi(AX) - \varphi(BX).$$

Si donc on connaît le pouvoir thermoélectrique des différents métaux par rapport à un métal de comparaison X, il sera facile d'en déduire le pouvoir thermoélectrique de deux métaux quelconques par l'équation (2).

Soit AX (fig. 45) la courbe qui représente la valeur de φ en

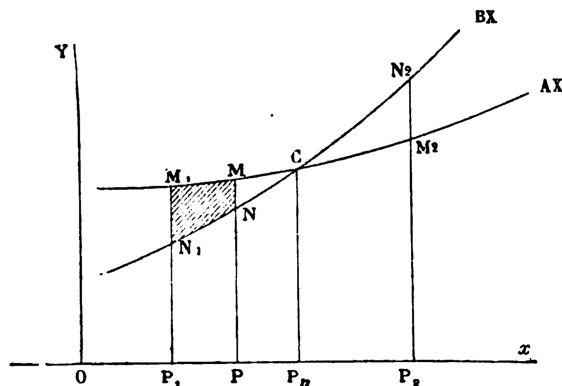


Fig. 45.

fonction de t pour les deux métaux A et X, BX la courbe analogue pour les deux métaux B et X; on aura

$$\varphi(AB) = MP - NP = MN.$$

La force électromotrice du couple AB entre les températures t_1 et t a pour expression

$$E_{t_1}^{t}(AB) = \int_{t_1}^{t} \varphi(t)\,dt = \text{aire } M_1MNN_1;$$

elle est donc représentée par l'aire du quadrilatère compris entre les courbes AX, BX et les ordonnées relatives aux deux températures t_1 et t.

Si, la soudure froide restant à une température constante t_1, on fait croître la température t de la soudure chaude, la force électromotrice croît comme l'aire du quadrilatère, jusqu'à ce que la température atteigne la valeur t_n, qui correspond au point de rencontre C des deux courbes.

A cette température t_n, pour laquelle la force électromotrice est maximum, le pouvoir thermoélectrique des deux métaux A et B est nul; on l'appelle le *point neutre*. Quand la température dépasse celle du point neutre, la force électromotrice décroît, puisqu'elle n'est plus représentée que par la différence de deux aires triangulaires qui ont leur sommet en C; elle devient nulle pour la température t_2 telle qu'on ait

$$\text{aire}\, M_2CN_2 = \text{aire}\, M_1CN_1.$$

Lorsque la température dépasse t_2 sur la soudure chaude, la force électromotrice devient négative et il y a inversion du courant; on voit ainsi la relation qui existe entre la température d'inversion et celle de la soudure froide.

Les résultats deviennent très simples quand les courbes AX et BX sont des droites. La figure M_1MNN_1 est alors un trapèze, dont la surface a pour valeur

$$P_1P \times \frac{M_1N_1 + MN}{2} = (t - t_1)\frac{\varphi(t_1) + \varphi(t)}{2} = (t - t_1)\varphi\left(\frac{t + t_1}{2}\right).$$

Dans ce cas, la différence des ordonnées des deux droites, ou la fonction $\varphi(t)$, est proportionnelle à $t_n - t$ et peut être représentée par $a(t_n - t)$, ce qui donne

$$E_{t_1}^{t}(AB) = a(t - t_1)\left[t_n - \frac{t_1 + t}{2}\right].$$

Cette expression de la force électromotrice, en fonction des températures des deux soudures, a été donnée d'abord par Avenarius comme résultat empirique; la courbe représenta-

tive de la force électromotrice en fonction de la température variable t est alors une parabole et nous avons vu aussi que cette forme s'accorde avec les expériences de Gaugain.

Si la valeur de φ est une constante A, ce qui aurait lieu en particulier pour des pouvoirs thermoélectriques représentés par des droites parallèles, le quadrilatère M_1N est un parallélogramme de surface proportionnelle à la différence $t - t_1$ des températures ; le couple AB est alors à marche uniforme.

208. Chaleur spécifique d'électricité. — D'une manière générale, le circuit renferme deux espèces de variations de potentiel : les unes brusques et localisées, comme celles qui résultent du principe de Volta et qui correspondent au phénomène de Peltier, les autres continues, liées aux inégalités de température et capables de donner, comme les premières, des phénomènes calorifiques réversibles. Si l'on désigne respectivement par ΣH et par $\int dh$ les sommes relatives à ces deux espèces de variations entre deux points d'un conducteur, la force électromotrice correspondante est

$$E = \Sigma H + \int dh.$$

D'après la loi de Magnus, la valeur de h entre deux points M et M′ d'un même métal ne dépend que des températures correspondantes t et t' ; on peut donc poser

$$dh = f(t)\,dt = \sigma\,dt.$$

Si l'intensité du courant est assez faible pour que l'échauffement du circuit, en vertu de la loi de Joule, puisse être considéré comme négligeable, l'énergie calorifique développée ou absorbée pendant l'unité de temps dans la portion du conducteur où se produit la variation dh, sous l'influence du passage d'un courant d'intensité I, a pour expression

$$I\,dh = I f(t)\,dt - I\sigma\,dt.$$

La quantité σ est la variation de potentiel et, par suite, le travail calorifique pour l'unité de courant, qui correspond à

une variation de température égale à l'unité; c'est une fonction de la température caractéristique de la nature du conducteur. Lord Kelvin a donné à cette grandeur physique le nom de *chaleur spécifique d'électricité*.

209. Force électromotrice d'un couple. — Cela posé, considérons un circuit formé d'un nombre quelconque de métaux $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$. Soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots\ldots \sigma_n$ les chaleurs spécifiques d'électricité pour ces différents métaux; $H_{1.2}, H_{2.3}, \ldots\ldots H_{n.1}$ les variations brusques de potentiel correspondant aux forces électromotrices de contact; enfin $t_{1.2}, t_{2.3}, \ldots\ldots$ les températures des soudures et t_0 la température constante du fil extérieur. La force électromotrice totale du circuit peut être représentée par l'expression

$$E = H_{1.2} + H_{2.3} + \ldots + H_{n.1} + \int_0^{1.2} \sigma_1 dt + \int_{1.2}^{2.3} \sigma_2 dt + \ldots + \int_{n.1}^{0} \sigma_1 dt,$$

ou, en réunissant les deux intégrales extrêmes,

$$(3) \qquad E = \Sigma H + \int_{n.1}^{1.2} \sigma_1 \, dt + \int_{1.2}^{2.3} \sigma_2 \, dt . + \int_{2.3}^{3.4} \sigma_3 \, dt + \cdots$$

Supposons que le circuit ne se compose que de deux métaux A et A'; les forces électromotrices de contact H_1 et H_2 aux températures t_1 et t_2 des soudures sont en général de signes contraires. En mettant leurs signes en évidence, on aura

$$(4) \qquad E = H_2 - H_1 + \int_1^2 (\sigma' - \sigma) \, dt.$$

Lorsque la différence $t_2 - t_1$ des températures est infiniment petite, on peut écrire

$$(5) \qquad \frac{dE}{dt} = \frac{dH}{dt} + \sigma' - \sigma = \varphi(AA').$$

Tant que le courant reste très faible, le système est encore assimilable à une machine thermique réversible.

Chacun des termes du second membre de l'équation (4) représente l'énergie calorifique absorbée par unité d'électricité, soit sur les soudures, soit sur les parties des conducteurs à

température variable. L'application du principe de Carnot donne alors

$$(6) \qquad \frac{H_2}{T_2} - \frac{H_1}{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{\sigma' - \sigma}{T}\, dT = 0,$$

et, lorsque la différence $T_2 - T_1$ est infiniment petite,

$$(7) \qquad 0 = \frac{d}{dT}\left(\frac{H}{T}\right) + \frac{\sigma' - \sigma}{T} = \frac{1}{T}\left[\frac{dH}{dT} + \sigma' - \sigma\right] - \frac{H}{T^2}.$$

En tenant compte de l'équation (5), il reste

$$(8) \qquad H = T\frac{dE}{dT} = T\varphi(T).$$

Ainsi, la force électromotrice de contact à la soudure de deux métaux, et par suite l'effet Peltier, est le produit de la température absolue par leur pouvoir thermoélectrique correspondant.

A la température T_n du point neutre le pouvoir thermoélectrique $\varphi(T_n)$ est nul; on a donc aussi $H_n = 0$. Pour $T_2 < T_n$, la fonction H_2 est positive, et le courant refroidit la soudure chaude. Lorsque T_2 est compris entre T_n et la température d'inversion T_i, H_2 est négatif; le courant échauffe en même temps la soudure froide et la soudure chaude. Enfin, si $T_2 > T_i$, le courant change de sens et refroidit les deux soudures.

Si l'expérience montre, ce qui paraît être au moins le cas le plus général, que la force électromotrice d'un couple peut être représentée par la formule

$$E = a(T - T_1)\left[T_n - \frac{1}{2}(T + T_1)\right],$$

il en résulte, pour une différence infiniment petite dT entre les températures des soudures,

$$\frac{dE}{dT} = a(T_n - T) = \varphi(T) = \frac{H}{T},$$

$$(9) \qquad H = aT(T_n - T).$$

La force électromotrice du couple et la force électromotrice de contact à la soudure des deux métaux, exprimées en fonc-

tion de la température, seraient donc toutes deux représentées par des courbes paraboliques.

Dans ce cas, le pouvoir thermoélectrique $\varphi(T)$ des deux métaux est proportionnel à $T_n - T$ ou $t_n - t$; il serait représenté par une ligne droite en fonction de la température.

210. Hypothèse de M. Tait. — M. Tait est arrivé au même résultat en admettant que la chaleur spécifique d'électricité σ est proportionnelle à la température absolue, c'est-à-dire que l'on peut écrire, en désignant par k et k' des coefficients constants pour chaque métal,

$$\sigma = kT, \qquad \sigma' = k'T.$$

L'équation (7) donne alors

$$\frac{H}{T} + (k' - k)T + C = 0,$$

et, comme la valeur de H est nulle au point neutre T_n,

$$\text{(10)} \qquad \frac{H}{T} = (k' - k)(T_n - T).$$

La force électromotrice du couple devient

$$E = \int_1^2 \frac{H}{T}\,dT = (k' - k)(T_2 - T_1)\left[T_n - \frac{T_1 + T_2}{2}\right].$$

Supposons que la valeur du coefficient k soit nulle pour un métal en particulier, ce qui paraît être le cas du *plomb*, d'après les expériences de M. Le Roux, et qu'on évalue les pouvoirs thermoélectriques des différents métaux par rapport au plomb; l'équation (10) donne alors

$$\frac{dE}{dT} = \varphi(T) = k'(T_n - T) = k'(t_n - t).$$

Dans ce cas, les droites qui représentent les pouvoirs thermoélectriques sont inégalement inclinées sur l'axe des températures; elles coupent cet axe au point correspondant à la température du point neutre avec le métal de comparaison,

et leur inclinaison sur l'axe est la chaleur spécifique d'électricité relative à chacun des métaux.

211. Transport électrique de la chaleur. — Il était important de vérifier par expérience l'hypothèse qui sert de base à cette théorie, c'est-à-dire l'existence de différences de potentiel dues aux variations de température. Le procédé employé par lord Kelvin consistait à constater qu'il se produit alors, par le passage d'un courant, des phénomènes calorifiques réversibles analogues à l'effet Peltier.

Considérons une barre de métal, en fer par exemple, dont la partie médiane AA′ (fig. 46) est maintenue à une tempéra-

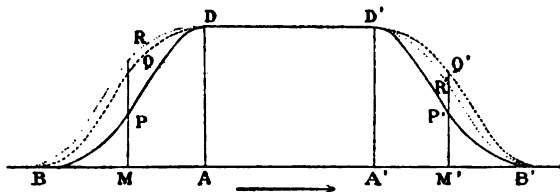


Fig. 46.

ture constante T, tandis que les points extrêmes B et B′ sont maintenus à 0°.

La distribution des températures est représentée par les courbes BDD′B′; tant que le courant ne passe pas, la distribution est évidemment symétrique et figurée par des courbes telles que BPD et D′P′B′. Le passage du courant produit en chaque point deux effets : 1° un échauffement réglé par la loi de Joule; 2° un dégagement ou une absorption de chaleur produits par la chute fixe de potentiel qui correspond à la différence des températures de deux points voisins.

Pour la loi de Joule seule, la distribution des températures doit rester symétrique et peut être représentée par les lignes BQD et D′Q′B′ marquées en traits discontinus.

Le second effet est réversible avec le sens du courant. Si le courant va de gauche à droite, dans le sens de la flèche, il se produira, par exemple, un nouvel échauffement dans la partie antérieure du fil BA, où les températures sont croissantes, et un refroidissement dans la partie postérieure A′B′ où les températures décroissent. La superposition des deux phé-

nomènes donne alors pour les températures une distribution dissymétrique, qui peut être figurée par les courbes pointillées BRD et D'R'B'.

La différence des températures finales t et t' en deux points symétriques M et M' correspond précisément à la seconde cause. Si l'échauffement est plus grand dans la partie antérieure à la région moyenne AA', où la température est maximum, il y a une sorte de *transport électrique de la chaleur* en sens inverse du courant; si l'excès de température se produit dans la partie postérieure, le transport électrique de chaleur a lieu dans le sens du courant.

Lord Kelvin a constaté ainsi que, pour le fer, le transport électrique de la chaleur est *négatif*, c'est-à-dire en sens contraire du courant, et que le transport est *positif* mais beaucoup plus faible pour le cuivre.

M. Le Roux [1] a étendu les mêmes observations à un grand nombre de métaux et vérifié que, dans tous les cas, l'effet est proportionnel à l'intensité du courant. Le *plomb* présente une exception remarquable; la différence des températures aux points symétriques est inappréciable, de sorte qu'à ce point de vue le métal est sensiblement neutre.

212. Caractère du phénomène de Peltier. — Ce mode de raisonnement conduit encore à l'interprétation déjà donnée (**206**) sur le phénomène de Peltier.

La force électromotrice à la soudure de deux métaux est exprimée par la formule générale

$$H = T\varphi(T) = T\frac{dE}{dT}.$$

Lorsque le couple est à marche uniforme, on a

$$E = A(T - T_1), \qquad H = AT.$$

Dans ce cas particulier, la force électromotrice à la soudure des métaux est proportionnelle à la température absolue, et l'effet Peltier doit suivre la même loi. Aux températures de 25° et de 100°, par exemple, on aurait

$$\frac{H_{100}}{H_{25}} = \frac{273 + 100}{273 + 25} = 1 + \frac{75}{298} = 1,25.$$

(1) Le Roux, *Ann. de chim. et de phys.* [4], t. X, p. 201; 1867.

D'après les expériences de M. Le Roux, le couple bismuth-cuivre satisfait assez exactement à cette condition, car le rapport des quantités de chaleur absorbées ou dégagées sur deux soudures, pendant le passage d'un courant extérieur, a été de 1,29.

Un courant qui traverse une soudure l'échauffe quand il passe dans un sens, la refroidit quand il passe en sens contraire. M. Ed. Becquerel a montré que le sens pour lequel il y a refroidissement est celui du courant que produirait l'échauffement artificiel de la même soudure. Quand un courant thermoélectrique traverse un circuit, les variations de température produites aux soudures par le courant lui-même tendent donc à l'affaiblir, et on peut dire qu'elles ont pour effet de développer une force électromotrice inverse de celle qui produit le courant. C'est là une réaction nécessaire : si elle n'avait pas lieu, un courant accidentel dans un circuit métallique produirait entre les soudures une différence de température qui irait en croissant et le courant s'entretiendrait de lui-même indéfiniment.

Dans un circuit de deux métaux dont la soudure chaude est à une température inférieure à celle du point neutre, la force électromotrice croît avec la température, l'effet Peltier tendra donc à diminuer la température de cette soudure. Au delà du point neutre, au contraire, la force électromotrice diminue quand la température augmente, et l'effet Peltier devra tendre à augmenter la température de la soudure chaude.

L'effet Peltier à la soudure chaude a donc un signe différent suivant que la température de cette soudure est inférieure ou supérieure à celle du point neutre; il en résulte que la force électromotrice de contact H a dû changer de signe au point neutre. C'est par un raisonnement analogue que lord Kelvin a montré d'abord cette propriété du point neutre et conclu à l'existence nécessaire de forces électromotrices dans un métal homogène à température non uniforme.

DEUXIÈME PARTIE. — MAGNÉTISME

CHAPITRE PREMIER

PRÉLIMINAIRES

213. Des aimants.— On donne, depuis la plus haute antiquité, le nom de *pierres d'aimant* à certaines pierres naturelles qui ont la propriété d'attirer la limaille de fer ; elles sont formées par un oxyde de fer, dit oxyde magnétique. Les différentes régions d'une pierre d'aimant ne jouissent pas au même degré de ces propriétés attractives : la limaille se porte de préférence sur certains points de la surface et y reste attachée sous forme de houppes.

Ces phénomènes ont une ressemblance évidente avec ceux de l'électricité statique. Toutefois, l'analogie n'est pas complète et l'observation révèle entre eux des différences essentielles : ainsi la pierre d'aimant n'agit pas sur tous les corps indistinctement ; la limaille attirée n'est point repoussée après le contact et, une fois détachée, ne jouit d'aucune propriété nouvelle, etc. A chaque pas, dans la suite de cette étude, nous aurons à relever des analogies et des différences de ce genre entre les deux ordres de phénomènes.

Par simple frottement, la pierre d'aimant, sans rien perdre de ses qualités primitives, peut aimanter l'acier, c'est-à-dire lui communiquer la propriété d'attirer le fer. Les barreaux d'acier aimantés artificiellement, ayant une forme plus régulière que les pierres d'aimant, sont d'un emploi plus commode

pour l'observation ; l'expérience montre d'ailleurs que les phénomènes présentent le même caractère dans les deux cas.

214. Aimants naturels et artificiels ; permanents et temporaires. — On donne le nom général d'*aimant* à tout corps qui a la propriété d'attirer la limaille de fer. Les aimants *naturels* sont les pierres d'aimant que l'on rencontre dans la nature ; les aimants *artificiels* sont des morceaux d'acier ou des échantillons de fer plus ou moins pur, auxquels on a communiqué des propriétés analogues.

Parmi les aimants artificiels, les uns conservent cette propriété nouvelle quand on supprime la cause qui l'a provoquée : ce sont les aimants *permanents*. L'acier trempé est le corps qui convient le mieux pour préparer les aimants permanents, et on l'emploie habituellement sous la forme de baguettes allongées ou de barreaux.

Les différentes variétés de fer et de fonte peuvent aussi être aimantées énergiquement par des pierres d'aimant ou des aimants artificiels, mais elles perdent la plus grande partie de leurs propriétés lorsque la cause aimantante a été supprimée. On obtient ainsi des aimants *temporaires*, et on appelle aimantation *résiduelle* l'aimantation relativement faible qui persiste, au moins pendant quelque temps, sur les corps auxquels on a communiqué une aimantation temporaire.

215. Corps magnétiques et corps diamagnétiques. — Jusqu'au siècle dernier, le fer était le seul corps dont on connût l'attraction par les aimants ; on remarqua ensuite que certains métaux, comme le nikel et le cobalt, dont les analogies chimiques avec le fer sont si remarquables, jouissent aussi des mêmes propriétés à un moindre degré. Enfin, à l'aide d'aimants très puissants, on reconnut qu'un très grand nombre de corps sont aussi attirés par les aimants, mais les actions qu'ils éprouvent sont incomparablement plus faibles. On a appelé *magnétiques* tous les corps qui sont attirables à l'aimant, et on a donné le nom de *magnétisme*, soit à l'ensemble des phénomènes auxquels donnent lieu les aimants, soit, par extension, à la cause de ces phénomènes.

En 1778, Brugmans a reconnu qu'un morceau de bismuth est, au contraire, repoussé par un aimant. L'importance de cette observation est restée méconnue jusqu'à ce que Faraday

eut découvert dans un certain nombre de corps la même propriété. A cause de la forme particulière sous laquelle il réalisait l'expérience, Faraday a appelé *diamagnétiques* les corps qui sont repoussés par les aimants.

En somme, on peut dire que tous les corps de la nature sont plus ou moins sensibles à l'action des aimants. On les a divisés en deux groupes : les corps *magnétiques*, *paramagnétiques* ou *positifs*, qui sont attirés comme le fer; les corps *diamagnétiques* ou *négatifs*, qui sont repoussés par les aimants, comme le bismuth.

216. Distribution du magnétisme. — Pôles. — On peut obtenir un barreau aimanté régulièrement, une aiguille par exemple, en la frottant à plusieurs reprises et toujours dans le même sens avec une pierre d'aimant naturelle ou avec le même point d'un aimant artificiel quelconque.

Quand on plonge une pareille aiguille dans la limaille de fer, les grains de limaille s'attachent surtout aux extrémités de l'aiguille, sur une certaine étendue, et adhèrent les uns aux autres bout à bout, de manière à former des houppes plus ou moins abondantes.

Les actions magnétiques paraissent donc concentrées aux extrémités des aimants réguliers. Nous appellerons ces extrémités les *pôles* de l'aimant, sauf à définir ensuite ce terme avec plus de précision.

217. Deux espèces de magnétisme. — Les deux extrémités ou pôles de l'aimant ne sont pas de même nature : en effet, tout aimant rendu mobile dans un plan horizontal prend une direction fixe dans l'espace. Cette direction est à peu près du nord au sud. L'aimant, écarté de cette direction, y revient quand on l'abandonne à lui-même, et c'est toujours la même extrémité qui pointe vers le nord. On appelle pôle *nord* d'un aimant l'extrémité qui se dirige ainsi vers le nord géographique, et pôle *sud* celle qui se dirige vers le sud. On peut donc marquer ces pôles une fois pour toutes sur les aimants permanents dont on fait usage.

218. Lois des actions magnétiques. — Les aimants réagissent les uns sur les autres. Le pôle nord d'un aimant présenté au pôle nord d'un autre aimant mobile le repousse, et attire au contraire le pôle sud. De même, les pôles sud de deux aimants

se repoussent. Les phénomènes sont donc analogues à ceux des actions électriques : *Deux pôles de même nom se repoussent et deux pôles de noms contraires s'attirent.*

Entre deux aimants voisins, il s'exerce ainsi quatre actions : deux répulsives entre les pôles de même nom et deux attractives entre les pôles de noms contraires. Si les aimants ont une longueur très grande par rapport à leurs dimensions transversales et sont situés à une distance notable par rapport à ces mêmes dimensions, on peut considérer l'action de chaque extrémité comme concentrée en un point. L'action réciproque de deux aimants se compose alors de quatre forces dirigées suivant les droites qui joignent deux à deux les centres d'action ou les pôles des deux aimants, et il est impossible en toute rigueur, dans les expériences, de les réduire à un nombre moindre.

Toutefois, en faisant agir l'un sur l'autre les pôles de deux aimants très longs, à des distances assez faibles et dans une position relative convenable pour que les actions des deux autres pôles puissent être considérées comme négligeables, Coulomb a pu établir par l'expérience que *les actions attractives ou répulsives qui s'exercent entre deux pôles sont en raison inverse du carré de leur distance.*

On doit remarquer cependant que rien ne prouve l'existence de ces forces élémentaires. L'expérience montre bien que l'action réciproque des systèmes probablement très complexes qui constituent les aimants peut être réduite à des forces attractives ou répulsives dirigées ainsi suivant les droites qui joignent les pôles ; mais, comme un pôle ne peut jamais être séparé de son congénère, l'action directe de deux pôles est une pure conception de l'esprit ; cette conception, sans réalité démontrée par l'expérience, est néanmoins très avantageuse pour représenter et calculer les phénomènes.

219. Des masses magnétiques. — L'action des deux pôles à une distance déterminée dépend des qualités particulières de chacun des aimants. L'expérience indique que les actions exercées sur les pôles des deux aimants dans des conditions identiques, par un système quelconque, sont dans un rapport constant ; on peut considérer ce rapport comme étant celui des quantités de magnétisme ou des *masses magnétiques* des

deux pôles, et admettre, comme définition, que l'action d'un système quelconque sur un pôle est proportionnelle à la masse magnétique du pôle; il en résulte que l'action réciproque de deux pôles est proportionnelle séparément à la masse de chacun d'eux, c'est-à-dire au produit de leurs masses magnétiques.

En désignant ces masses par m et m', l'action des deux pôles à la distance r a donc pour expression $k\frac{mm'}{r^2}$, k étant un coefficient qui dépend du choix des unités. Comme on l'a fait en électricité statique (11), ce coefficient disparaîtra si l'on prend comme unité de masse magnétique celle d'un pôle qui, agissant sur un pôle identique à l'unité de distance, exerce une répulsion égale à l'unité de force. L'action est répulsive ou attractive, suivant que les pôles sont de même nom ou de noms différents.

Si deux pôles de masses m et m' sont liés l'un à l'autre, l'action du système ainsi formé sur un troisième pôle de masse M placé à une distance très grande par rapport à celle qui sépare les deux pôles juxtaposés, est égale à

$$\frac{mM}{r^2}+\frac{m'M}{r^2}=\frac{M(m+m')}{r^2};$$

elle est proportionnelle à la somme $m+m'$ des deux masses si les pôles sont de même nom, et à la différence $m-m'$ s'ils sont d'espèces différentes. Les masses magnétiques s'ajoutent donc à la manière des quantités algébriques, et on peut les affecter, comme les masses électriques, des signes $+$ et $-$; nous conviendrons de donner le signe $+$ à la masse magnétique d'un pôle nord et le signe $-$ à celle d'un pôle sud.

L'action de deux pôles sera positive dans le cas d'une répulsion, les masses étant de même signe, et négative dans le cas d'une attraction.

La loi des actions élémentaires étant la même que pour les phénomènes électriques, on peut appliquer tous les théorèmes relatifs au potentiel électrique, au moins en ce qui concerne les masses fixes et en faisant abstraction pour le moment des phénomènes relatifs aux conducteurs. En particulier, les considérations des lignes de force, des tubes et des flux de force sont immédiatement applicables au magnétisme.

220. Champ magnétique. — Un *champ magnétique* est un espace dans lequel se manifestent des forces magnétiques. La *direction* et l'*intensité* du champ en un point sont la direction et l'intensité de l'action que subirait une masse magnétique positive égale à l'unité. Le champ est *uniforme* lorsque cette action en tous les points a la même grandeur et la même direction.

221. Définition des pôles. — Axe magnétique d'un aimant. — Nous avons supposé dans ce qui précède que les actions d'un aimant se réduisaient à celles de deux centres magnétiques situés aux extrémités; il n'en est ainsi, et encore d'une manière approximative, que dans le cas, que nous avons spécifié, de longs aimants cylindriques très éloignés par rapport à leurs dimensions transversales. En réalité, les propriétés magnétiques sont sensibles dans toute l'étendue de l'aimant, et présentent seulement un maximum très marqué dans le voisinage des extrémités. C'est ce qu'on reconnaît facilement à la manière dont la limaille s'attache à l'aimant. On doit donc admettre qu'il y a dans l'aimant une série de masses magnétiques, les unes positives, les autres négatives, distribuées suivant une certaine loi et dont l'ensemble constitue la masse magnétique totale.

Supposons l'aimant placé dans un champ magnétique uniforme. Les actions qu'exerce le champ aux différents points sont parallèles entre elles et, pour chaque élément de volume, proportionnelles à la masse qui s'y trouve. Toutes celles qui agissent sur les masses positives sont de même sens : elles ont une résultante égale à leur somme, parallèle à leur direction et appliquée au centre de masse, ou au centre de gravité, des masses positives. Il en est de même pour les masses négatives sur lesquelles le champ produit des actions parallèles aux précédentes, mais de sens opposé. L'aimant est donc soumis à l'action de deux forces parallèles et de sens contraires appliquées, l'une au centre de gravité des masses positives, l'autre au centre de gravité des masses négatives. Ces deux points d'application sont les *pôles* de l'aimant; on appelle *axe magnétique* de l'aimant la ligne qui joint les deux pôles, et la *direction* de l'axe magnétique est comptée du pôle négatif vers le pôle positif.

L'aimant est évidemment en équilibre stable lorsque son axe magnétique est parallèle à la direction du champ et de même sens ; l'équilibre est instable si ces deux directions sont parallèles et de sens contraires.

222. Le magnétisme total d'un aimant est nul. — Le voisinage de la Terre peut être considéré comme un champ magnétique uniforme.

L'expérience montre, en effet, que dans une étendue considérable par rapport aux dimensions des aimants dont on fait usage, mais très petite par rapport au rayon de la Terre, tous les aimants, soumis à la seule action de la Terre, tendent à prendre la même direction.

Coulomb a vérifié en outre que, sur tout barreau aimanté, l'action du champ terrestre est purement directrice, qu'elle n'a ni composante verticale ni composante horizontale : elle n'a pas de composante verticale, car le poids d'un barreau d'acier est rigoureusement le même avant et après l'aimantation ; la composante horizontale est aussi nulle, car un fil auquel on suspend un aimant n'est pas dévié de la verticale. *Les deux forces de sens contraires appliquées aux deux pôles sont donc égales et se réduisent à un couple.* Il en résulte cette conséquence importante que, dans tout aimant, la somme des masses positives est égale à la somme des masses négatives ; en d'autres termes, *la somme totale des masses magnétiques d'un aimant est nulle.*

Sous ce rapport, l'état d'un aimant est comparable à celui que prend par influence un diélectrique, ou un conducteur maintenu isolé.

223. Moments magnétiques. — Soit m la valeur absolue de la masse de chaque pôle et l la distance des deux pôles; on appelle *moment magnétique* M de l'aimant le produit ml de la masse par cette distance.

On peut représenter un aimant par une droite OA (fig. 54) ayant pour direction l'axe magnétique et pour longueur la valeur numérique du moment magnétique M.

Ce mode de représentation revient à supposer tous les pôles identiques, de masse égale à l'unité, par exemple, et à les placer sur l'axe magnétique à une distance proportionnelle au moment magnétique de l'aimant considéré.

Lorsqu'un système formé de plusieurs aimants liés entre eux est placé dans un champ uniforme, l'action du champ sur chacun des aimants se réduit à un couple; on peut donc, pour évaluer l'action totale, transporter tous les aimants parallèlement à eux-mêmes, par exemple de façon que tous les pôles négatifs soient superposés.

Considérons deux aimants représentés par les droites OA et OA′ (fig. 47) et soit G le milieu de la droite AA′, c'est-à-dire le centre de gravité des deux masses positives égales à 1 situées en A et A′. Le système équivaut à un aimant unique dont la longueur serait égale à OG et les masses égales à ± 2, ou à un aimant de longueur double OB avec des masses égales à ± 1.

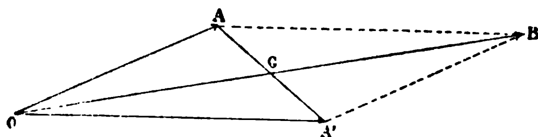


Fig. 47.

L'aimant résultant est ainsi représenté par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites OA et OA′.

Les moments magnétiques des aimants se composent donc comme les forces. Pour un système quelconque d'aimants liés entre eux, le moment résultant est représenté par la droite qui ferme le polygone construit en ajoutant bout à bout les moments de tous les aimants.

La projection de cette droite sur un axe quelconque étant égale à la somme des projections de tous les côtés du polygone, on voit que *l'axe magnétique d'un système est la droite sur laquelle la somme des projections des moments partiels des aimants qui constituent le système est un maximum.*

De même, on peut remplacer un aimant par un nombre quelconque d'aimants dont le moment magnétique résultant est égal au moment de l'aimant proposé, par exemple, par les trois projections de ce moment magnétique sur trois axes rectangulaires.

Lorsque deux systèmes magnétiques sont très éloignés l'un de l'autre, leur action réciproque est égale à celle des

aimants résultants, car chacun des systèmes peut être considéré comme étant situé dans un champ uniforme produit par l'autre système.

224. Action d'un champ uniforme sur un aimant. — Si l'on considère un aimant de moment $M = ml$ situé dans un champ uniforme F dont la direction fait avec l'axe de l'aimant l'angle θ, le moment du couple produit par l'action du champ est égal à $Fml \sin\theta$ ou $FM \sin\theta$. C'est le couple qui tendrait à faire tourner l'aimant autour d'une droite perpendiculaire à l'axe magnétique et à la direction du champ; on représentera ce couple par une longueur parallèle à cette droite.

Si l'aimant est mobile autour d'un axe de direction quelconque, le couple de rotation ne dépend que des projections du moment magnétique et du champ sur un plan perpendiculaire à cet axe, puisque les projections parallèles à l'axe sont sans influence.

Il en résulte une méthode importante pour la comparaison des champs. Si un aimant de moment magnétique M exécute des oscillations d'amplitude très petite de part et d'autre de sa position d'équilibre, autour d'un axe perpendiculaire au plan que forment les directions du moment magnétique et du champ, le couple $FM \sin\theta$ est sensiblement proportionnel à l'angle θ; le nombre n des oscillations simples par seconde est alors, en appelant K le moment d'inertie,

$$n^2 = \frac{M}{\pi^2 K} F.$$

225. Systèmes astatiques. — Lorsque les moments magnétiques OA et OA′ (fig. 47) de deux aimants ont la même valeur et sont directement opposés, le moment résultant OB est nul. Dans ce cas, l'équilibre est stable pour une direction quelconque du système dans un champ uniforme; le système est dit *astatique*.

Si les moments OA et OA′ sont égaux, le moment résultant OB est dirigé suivant la bissectrice de l'angle AOA′; si cet angle est voisin de 180°, le moment résultant est très petit et à peu près perpendiculaire aux deux autres. Ainsi, lorsque deux aiguilles aimantées formant un système *quasi astatique*

sont situées dans un champ uniforme, elles sont en équilibre stable dans une direction perpendiculaire au champ.

Ce cas est précisément celui des aiguilles magnétiques employées pour certains galvanomètres. Le système est d'autant plus voisin d'être astatique que la direction des aiguilles libres se rapproche plus d'être perpendiculaire à la projection du champ sur un plan normal à l'axe de rotation.

226. Polarité magnétique. — Rupture d'un aimant. — Lorsqu'on brise une aiguille aimantée, chacun des fragments devient un aimant complet ayant deux pôles de même intensité et de signes contraires, et le phénomène se répétera indéfiniment, aussi loin qu'on puisse pousser la division mécanique.

Ce fait est capital dans la théorie du magnétisme; il montre d'abord qu'il est impossible d'obtenir une masse magnétique positive ou négative indépendante et qui ne soit pas associée à une masse égale et de signe contraire; ensuite que le magnétisme est un phénomène essentiellement particulaire. On est conduit à admettre, comme pour les diélectriques, que le magnétisme est dû à une espèce de polarisation des molécules pondérables, dont chacune serait un petit aimant avec ses deux pôles situés rigoureusement sur les faces terminales.

227. Aimantation par influence. — La chevelure de limaille de fer qui reste suspendue à un aimant démontre que chaque parcelle de limaille est devenue elle-même un petit aimant. Le nombre des grains en contact direct avec l'aimant est relativement très petit; les autres, reliés successivement entre eux et rattachés aux premiers, forment des chaînes où les parcelles sont réunies par leurs pôles de noms contraires. Toutefois l'aimantation acquise par les grains de limaille est passagère; dès que cette limaille est détachée et éloignée de l'aimant, elle reprend sa neutralité première.

De même, un barreau de fer doux s'aimante quand il est placé sur le prolongement d'un aimant et prend deux pôles placés semblablement à ceux de l'aimant, c'est-à-dire que les deux extrémités voisines de l'aimant et du fer doux sont des pôles de signes contraires. Ce fer doux aimanté peut agir à son tour de la même manière sur un second morceau de fer primitivement neutre, et ainsi de suite. Dès qu'on enlève l'aimant primitif, l'aimantation du premier barreau de fer

doux et de tous ceux qui le suivent disparaît, au moins pour la plus grande partie, et toutes les actions qu'ils exerçaient les uns sur les autres disparaissent en même temps.

Plus généralement, lorsqu'un corps magnétique quelconque est placé dans un champ magnétique, il devient lui-même un aimant. C'est une aimantation *par influence* ou *induite*.

Si le corps est isotrope, l'axe d'aimantation en chaque point est parallèle à la direction de la force résultante. Cette résultante provient de l'action du champ et de celle qui est produite par le magnétisme induit. Si le corps considéré est infiniment petit, l'aimantation est exactement parallèle à la direction du champ au point considéré.

Il en résulte aussi cette conséquence que l'action d'un aimant est nulle sur un corps neutre et que toute action exercée par les aimants sur les corps magnétiques est précédée d'une induction magnétique sur ces derniers.

On voit encore l'analogie de ce phénomène avec celui de l'induction électrostatique sur les diélectriques.

Le magnétisme développé ainsi par induction ne dépend pas seulement de l'intensité du champ, mais aussi de la nature de la substance considérée; l'aimantation, très énergique avec le fer pur et le nickel, est beaucoup plus faible avec tous les autres corps magnétiques.

228. Fer doux. — Force coercitive. — Le fer est dit absolument *doux* si, après avoir été placé dans un champ magnétique très intense, il perd toute aimantation dès qu'il en est retiré. Le fer qui possède cette propriété, au point de vue magnétique, est aussi du fer doux, au sens mécanique : il peut être facilement courbé, travaillé, et possède peu d'élasticité. Réciproquement, le fer ordinaire n'est pas doux au sens magnétique du mot; lorsqu'il est impur ou qu'il a subi des modifications mécaniques, il reste plus ou moins aimanté, et cette propriété est désignée par le nom assez barbare de *force coercitive*. Un échantillon de fer a une force coercitive d'autant plus grande qu'il conserve une plus grande quantité de magnétisme rémanent; en même temps, ce fer s'aimante plus difficilement par induction. La force coercitive est donc une propriété analogue au frottement dans les organes mécaniques; elle s'oppose, entre certaines limites, aux mo-

difications que les forces extérieures tendent à produire et empêche qu'un état d'équilibre unique corresponde à des conditions extérieures données.

Pour l'acier, la force coercitive est très grande; ce métal s'aimante par induction plus difficilement que le fer doux, mais aussi il conserve bien mieux le magnétisme une fois acquis. Les qualités magnétiques de l'acier varient avec la composition du métal et son mode de préparation; elles dépendent beaucoup de la manière dont la trempe a été effectuée, ainsi que du degré de recuit auquel le barreau a été ensuite soumis. La force coercitive est d'autant plus grande que l'acier est plus dur et la trempe plus roide.

Jusqu'ici nous avons admis implicitement que le magnétisme d'un aimant est invariable et indépendant des forces auxquelles l'aimant est soumis; mais cette sorte de *rigidité magnétique* est un cas limite qui ne se trouve jamais réalisé en toute rigueur. Lorsqu'un aimant, placé dans un champ magnétique intense, s'y trouve dans sa position normale d'équilibre, son aimantation augmente un peu; elle diminue, au contraire, s'il est orienté suivant une direction opposée. Ces variations sont faibles en général et passagères, comme celle du fer doux dans les mêmes circonstances; elles sont le plus souvent négligeables quand il s'agit de barreaux d'acier fortement aimantés placés dans un champ magnétique peu intense, tel que le champ terrestre.

229. Influence de la température. — La chaleur agit aussi sur le magnétisme des aimants. Une élévation de température modérée diminue le magnétisme, mais d'une manière temporaire, et l'aimant reprend avec sa température initiale son magnétisme primitif. Dans les limites entre lesquelles varie la température ambiante, les effets produits sont sensiblement proportionnels aux variations de la température, de sorte que, si l'on appelle M_0 et M_t les moments magnétiques d'un aimant aux températures de zéro et de t degrés, on peut écrire, en désignant par a un coefficient qui dépend de la nature de l'acier,

$$M_t = M_0(1 - at).$$

Un échauffement plus grand, dépassant 100° par exemple,

produit un affaiblissement définitif du magnétisme, et un barreau d'acier chauffé au rouge vif a ordinairement perdu, quand il revient à la température ordinaire, toute trace sensible d'aimantation.

La chaleur produit des effets analogues sur les propriétés magnétiques du fer doux. A la température ambiante, le magnétisme induit dans le fer par un champ déterminé change peu avec les variations de température, mais au delà de 100° la diminution du magnétisme induit devient très rapide. Pouillet a même constaté qu'au rouge-cerise le fer ne conserve plus la propriété d'être attiré par les aimants. A cette température, le fer doux ne serait donc plus magnétique.

230. **Des fluides magnétiques.** — Les physiciens du siècle dernier, en particulier Œpinus et Coulomb, ont cherché à expliquer les phénomènes magnétiques par une hypothèse analogue à celle des fluides électriques.

Dans cet ordre d'idées, il est nécessaire encore d'attribuer aux fluides, aux aimants et aux corps magnétiques toute une série de propriétés qui permettent de satisfaire à l'ensemble des expériences.

On admet donc l'existence de deux *fluides magnétiques* impondérables, composés, comme les fluides électriques, de molécules agissant par répulsion sur les molécules de même espèce et par attraction sur les molécules d'espèce différente, les actions étant en raison inverse du carré de la distance. La combinaison de ces deux fluides en quantités égales est sans action sur les corps et constitue un fluide *neutre*.

En vertu des phénomènes d'induction magnétique, on doit admettre que le fluide neutre existe en quantité presque indéfinie dans les corps magnétiques et qu'il se partage en fluides distincts sous l'influence des aimants.

Comme les aimants permanents ou temporaires sont toujours complets, quelles que soient leurs dimensions, il faut aussi que les fluides compris dans un élément de volume ne le quittent jamais, pour passer sur un élément voisin, de sorte que la séparation de ces fluides ne s'effectue que dans l'étendue de chaque molécule.

Enfin, aucune force intérieure étrangère aux actions directes des fluides magnétiques ne s'oppose à leur séparation ou à

leur réunion dans le fer doux. Dans le fer impur et dans l'acier, au contraire, il y a une résistance particulière, une sorte de frottement appelé force coercitive, qui limite l'aimantation par influence et empêche ensuite la recombinaison des fluides lorsque les actions extérieures ont disparu.

Il n'y a pas lieu de s'étonner que la théorie des fluides, avec tous ces compléments qui ne s'y rattachent que d'une manière arbitraire, parvienne à expliquer les phénomènes; dans ces conditions, la conformité des expériences avec la théorie n'apporte aucun argument en faveur des hypothèses; nous n'en ferons d'ailleurs aucun usage.

231. Champ terrestre. — Le champ magnétique qui environne la terre et qu'on peut appeler le *champ terrestre*, est sensiblement uniforme dans un espace de petites dimensions par rapport à celle du rayon terrestre, mais la direction et l'intensité du champ varient d'un point à un autre. En outre, ces éléments en un lieu éprouvent avec le temps des variations périodiques et accidentelles; on doit d'abord en faire abstraction et considérer l'état magnétique du globe à un instant déterminé.

L'axe magnétique d'un aimant suspendu librement par son centre de gravité et soustrait à toute autre action que celle du champ terrestre prendrait, dans sa position d'équilibre, la direction du champ. Dans nos contrées, cette direction est à peu près du sud au nord, et elle est fortement inclinée sur l'horizon, le pôle nord pointant vers le sol.

On appelle *méridien magnétique* en un lieu le plan déterminé par la verticale et par la direction du champ magnétique terrestre.

La *déclinaison* est l'angle que fait le méridien magnétique avec le méridien astronomique. La déclinaison est dite *occidentale* lorsque le pôle nord d'un aimant libre se met à l'ouest du méridien géographique qui passe par son milieu; elle est *orientale* si ce pôle nord est à l'est du méridien.

L'*inclinaison* est l'angle que fait la direction du champ avec sa projection sur le plan horizontal.

Une aiguille aimantée mobile seulement autour d'un axe vertical n'obéira qu'à la composante horizontale H du champ terrestre et viendra se placer de manière que son axe d'ai-

mantation soit dans le méridien magnétique. Si on l'en écarte d'un angle δ, le couple qui tend à l'y ramener a pour valeur, en appelant M le moment magnétique de l'aiguille, $HM\sin\delta$; il est proportionnel au sinus de l'angle d'écart. Ce résultat a été vérifié par des expériences très précises de Coulomb, au moyen de la balance de torsion.

Si l'aiguille est suspendue librement par son centre de gravité, ou mobile autour d'un axe horizontal passant par ce point et perpendiculaire au méridien magnétique, la direction que prend l'axe magnétique de l'aiguille dans la position d'équilibre est la direction même du champ terrestre; l'angle que fait alors son axe magnétique avec l'horizon mesure précisément l'inclinaison.

Appelons, en un point, I l'inclinaison et T l'intensité du champ terrestre; la composante horizontale H du champ est égale à $T\cos I$ et la composante verticale $Z = T\sin I$.

Supposons maintenant qu'une aiguille soit mobile autour d'un axe horizontal faisant l'angle α avec la normale au méridien magnétique. On peut remplacer la composante horizontale H par ses deux projections, l'une égale à $H\sin\alpha$ parallèle à l'axe de rotation, et l'autre $H\cos\alpha$ perpendiculaire à cet axe. L'aiguille n'obéit qu'aux deux forces Z et $H\cos\alpha$ situées dans le plan qu'elle décrit; dans sa position d'équilibre, elle fait avec l'horizontale un angle i déterminé par la relation

$$\operatorname{cotg} i = \frac{H\cos\alpha}{Z} = \operatorname{cotg} I \cos\alpha.$$

L'angle i est l'inclinaison *apparente* dans l'azimut α relatif au méridien magnétique. Lorsque l'azimut α est égal à 90°, l'angle i est aussi de 90° et l'aiguille est verticale.

Si l'observation est faite successivement dans deux azimuts rectangulaires α et α', on a $\cos\alpha' = \pm\sin\alpha$ et l'inclinaison i' relative à la seconde expérience a pour valeur

$$\operatorname{cotg} i' = \mp \operatorname{cotg} I \sin\alpha.$$

Il en résulte cette relation fréquemment utilisée

$$\operatorname{cotg}^2 i + \operatorname{cotg}^2 i' = \operatorname{cotg}^2 I.$$

Si l'aiguille est chargée d'un poids supplémentaire ou, ce qui revient au même, si l'axe de rotation ne passe pas par le centre de gravité, la direction d'équilibre est modifiée.

Supposons, en particulier, qu'un poids p, à une distance d de l'axe de rotation, maintienne l'aiguille horizontale dans un certain plan; l'action du champ terrestre se réduit à celle de la composante verticale, et la condition d'équilibre est

$$pd = \mathrm{MZ} = \mathrm{MT}\sin \mathrm{I}.$$

Cette condition est indépendante de l'azimut du plan vertical dans lequel se meut l'aiguille; le contrepoids qui rend l'aiguille horizontale dans un plan la rendra horizontale dans tous les plans. On peut donc, en plaçant une aiguille sur un pivot vertical, l'équilibrer de manière qu'elle reste toujours horizontale; mais le moment du contrepoids dépend de la composante verticale, et celui-ci devra être modifié si on veut se servir de l'aiguille sous d'autres latitudes.

232. Distribution du magnétisme terrestre. — Les éléments du champ magnétique terrestre, intensité, déclinaison, inclinaison, ne sont pas les mêmes aux différents points du globe. Ces éléments varient en fonction des coordonnées géographiques suivant des lois très compliquées; mais, si l'on s'en tient à une première approximation, les variations peuvent être formulées d'une manière très simple.

Le méridien magnétique d'un lieu coupe la surface du globe suivant un grand cercle; tous les points de ce grand cercle ont le même plan pour méridien magnétique.

Tous les méridiens magnétiques se coupent sensiblement suivant un même diamètre; ce diamètre est l'*axe magnétique* de la terre; les points où il perce la surface ont reçu, quoique l'expression soit incorrecte, le noms de *pôles magnétiques*. L'axe magnétique fait un angle de 15° environ avec la ligne des pôles géographiques.

Il est évident que la déclinaison est variable d'un point à un autre sur un même méridien magnétique. Il n'y a d'exception que pour le méridien qui, passant à la fois par l'axe magnétique et l'axe terrestre, se confond avec le méridien géographique; pour tous les points du grand cercle correspon-

dant la déclinaison est nulle. D'un côté de ce grand cercle, le pôle nord s'écarte vers l'ouest et la déclinaison est occidentale; de l'autre côté, le pôle nord s'écarte vers l'est et la déclinaison est orientale.

Le grand cercle perpendiculaire à l'axe magnétique est appelé *équateur magnétique*. Pour tous les points de l'équateur magnétique, le champ terrestre est horizontal et l'inclinaison nulle. De part et d'autre, l'inclinaison va en augmentant jusqu'aux pôles magnétiques où elle est de 90° : dans l'hémisphère nord, c'est le pôle nord qui s'abaisse vers le sol; dans l'hémisphère sud, c'est le pôle sud.

233. Hypothèse de l'aimant central. — Biot a cherché s'il était possible de représenter l'état magnétique du globe et la variation des éléments magnétiques à sa surface par l'hypothèse d'un aimant dirigé suivant l'axe magnétique; il a trouvé qu'on satisfait d'autant mieux aux observations que la distance des pôles de cet aimant fictif est plus petite.

Si l'on remplace ainsi la terre par un aimant de longueur infiniment petite par rapport au rayon, c'est-à-dire par deux masses voisines égales et de signes contraires, on sait (108) qu'à la latitude λ à partir de l'équateur magnétique, l'inclinaison est donnée par l'équation

$$\operatorname{tang} I = 2 \operatorname{tang} \lambda.$$

Quant à l'intensité T du champ en un point quelconque de la surface, elle peut être exprimée en fonction de sa valeur T_e sur l'équateur par la formule

$$T^2 = T_e^2 (3 \sin^2 \lambda + 1).$$

Au pôle magnétique, l'intensité est $T_p = 2 T_e$; elle est donc deux fois aussi grande qu'à l'équateur.

Ces deux formules sont, au moins d'une manière approximative, conformes aux observations.

Quant au moment magnétique absolu de la terre M, on peut l'obtenir très simplement, en fonction du rayon R et du champ, par l'équation

$$M = T_e R^3 = \frac{TR^3}{\sqrt{3 \sin^2 \lambda + 1}}.$$

L'hypothèse d'un aimant terrestre a été introduite dans la science par Gilbert. Le pôle qui se trouverait dans l'hémisphère austral a reçu le nom de pôle *austral*, il est évidemment de même nature que le pôle nord des aimants ; le pôle situé dans l'hémisphère *boréal* est de même nature que le pôle sud des aimants.

Cette conception de l'aimant terrestre a fait aussi donner le nom de pôle austral au pôle qui se dirige vers le nord et de pôle boréal à celui qui se dirige vers le sud; dans la théorie des fluides, on dira donc, malgré la contradiction qui existe dans les termes, qu'un pôle nord contient du fluide austral et un pôle sud du fluide boréal. Mais il est préférable de renoncer à ces expressions *austral* et *boréal*, qui peuvent donner lieu à des équivoques, et appeler magnétisme *positif* celui qui correspond au pôle nord des aimants, magnétisme *négatif* celui du pôle sud.

234. Couches superficielles équivalentes. — L'hypothèse d'un aimant central infiniment petit n'est qu'une des formes sous lesquelles on peut représenter le magnétisme terrestre; c'est même celle qui présente le moindre degré de probabilité, attendu que la température certainement très élevée du centre du globe est incompatible avec l'existence de corps fortement aimantés.

Nous savons, par exemple, que deux couches hémisphériques superficielles égales et de signes contraires, distribuées de manière à donner en tout point de l'intérieur un champ uniforme (**116**), lesquelles représentent des couches de glissement (**126**), produiraient à l'extérieur le même champ que deux masses infiniment voisines. La densité de ces couches superficielles serait nulle sur l'équateur; aux pôles, elle aurait pour valeur

$$\sigma_0 = \frac{3}{8\pi} T_p = \frac{3}{4\pi} T_e,$$

et, en un point de latitude magnétique λ,

$$\sigma = \sigma_0 \sin\lambda.$$

Dans cette manière de voir, la terre serait donc recouverte de deux couches magnétiques, l'une négative dans l'hémis-

phère nord et l'autre positive dans l'hémisphère sud, la densité en chaque point étant proportionnelle au sinus de la latitude magnétique.

La masse totale de chacune des couches serait

$$m = \pi R^2 \sigma_0 = \frac{3}{4} R^2 T_e.$$

Nous verrons qu'il existe encore d'autres façons de représenter le magnétisme terrestre ; la conception d'un aimant central infiniment petit, inadmissible en elle-même, est donc en réalité la traduction mathématique très simple de plusieurs états équivalents, parfaitement compatibles avec les propriétés connues des corps magnétiques.

235. Variations du magnétisme terrestre. — Les variations qu'éprouve le magnétisme terrestre avec le temps présentent deux caractères différents : les unes sont purement accidentelles, les autres ont une marche périodique bien marquée.

Les variations à longue période, dites variations *séculaires*, peuvent être représentées, dans une première approximation, par une rotation de l'axe magnétique autour de l'axe de la terre, rotation en vertu de laquelle l'axe magnétique décrirait de l'est à l'ouest un cône circulaire d'environ 30°.

Comme le pôle magnétique de la terre, qui se trouve aujourd'hui vers la terre du Prince-de-Galles, par 100° de longitude Ouest, était en 1660 dans le voisinage du Cap Nord à 20° de longitude Est, on voit que la période de révolution complète serait d'environ 700 ans. La déclinaison à Paris, qui était orientale (11°13′E) en 1580, devint nulle en 1663 ; depuis cette époque elle est occidentale et a été en augmentant jusqu'en 1814 (20°25′W) ; elle est actuellement décroissante (15° 18′W en 1895) et redeviendra nulle vers 2000, si le phénomène continue à suivre la même marche. Le pôle magnétique sera alors de l'autre côté du pôle nord par rapport à nous. Depuis 1661, l'inclinaison magnétique à Paris a toujours été en décroissant : elle atteindra son minimum au moment où la déclinaison deviendra nulle.

Les variations à courte période paraissent liées au mouvement apparent du soleil, de la lune, etc., et suivent des lois qui ne sont pas encore bien connues.

Les valeurs moyennes de la déclinaison, par exemple, ont en un même lieu une oscillation *diurne* bien marquée, avec deux maxima et deux minima. L'amplitude de l'excursion de l'aiguille est beaucoup plus grande pendant le jour que pendant la nuit, et l'heure des déviations extrêmes est très différente suivant la position des stations. Ainsi, tandis que le maximum de déviation du côté de l'ouest a lieu, pour la marche moyenne annuelle, vers 9 heures du matin à Hobarton (Tasmanie), Batavia, le Cap et Sainte-Hélène, cette époque correspond au contraire au maximum à l'est pour l'hémisphère nord. Le maximum d'excursion à l'ouest se produit vers 1 heure de l'après-midi à Toronto (Canada), Londres et Paris; vers 2 heures à Saint-Pétersbourg; 3 heures à Nertschinsk et Pékin. Les heures de ces maxima et minima varient d'ailleurs avec les saisons. Les autres éléments du magnétisme, inclinaison et composantes du champ, présentent des oscillations analogues.

En dégageant de la variation diurne moyenne les observations relatives aux différents éléments magnétiques, on peut les rapporter aux jours *lunaires* et on trouve aussi dans les résidus une variation régulière.

Il existe également une variation périodique *annuelle*.

Enfin, les variations accidentelles elles-mêmes, qui semblent se produire simultanément sur une grande étendue, sinon sur la totalité de la surface du globe, et qu'on désigne habituellement sous le nom de *perturbations* ou d'*orages magnétiques*, paraissent aussi soumises dans leurs effets moyens à certaines périodes annuelles ou séculaires. Ces perturbations sont en relation directe avec le phénomène des aurores polaires et accompagnées de courants accidentels dans les fils télégraphiques.

CHAPITRE DEUXIÈME

CONSTITUTION DES AIMANTS

236. Diverses conceptions. — On peut imaginer qu'il existe en chaque point d'un aimant une certaine quantité de magnétisme libre, positif ou négatif, et que la somme algébrique de toutes les charges comprises dans un volume quelconque est nulle; c'est là l'hypothèse la plus générale et la moins définie.

D'autre part, les phénomènes que présente la rupture d'un barreau aimanté mettent en évidence ce fait capital que tout élément de volume est lui-même un aimant complet ayant, dans son état actuel, un axe magnétique et un moment déterminés. Nous disons dans son état actuel, car il est évident que si l'élément de volume, au lieu d'être séparé par la pensée du milieu environnant, en était réellement détaché, il ne conserverait pas nécessairement le même état que lorsqu'il faisait partie de la masse générale. Cette expérience suggère une autre conception.

Considérons deux molécules, ou éléments magnétiques, placées bout à bout et en contact par leurs pôles de noms contraires; si elles sont également aimantées, l'action pour tout point extérieur se réduit à celle des deux extrémités libres. De même, une série de molécules également aimantées et placées bout à bout, de manière que tous les axes magnétiques soient disposés suivant une même ligne, constituera une sorte de *filet magnétique uniforme*, dont l'action se réduit encore à celles des deux extrémités.

Si les éléments de cette file de molécules ne sont pas identiques, il existera un certain excès de magnétisme, positif

ou négatif, ou du magnétisme *libre* au contact de deux molécules consécutives. Le filet magnétique ainsi constitué n'est plus uniforme, mais il est évident qu'on pourra le considérer comme résultant de la juxtaposition de filets uniformes de longueurs différentes.

Un aimant quelconque, dans lequel les masses magnétiques sont distribuées d'une manière arbitraire, peut donc être subdivisé, soit en filets magnétiques non uniformes fermés ou aboutissant à la surface, soit en filets uniformes, les uns fermés, d'autres aboutissant à la surface, d'autres enfin terminés à l'intérieur. Tant qu'on ne fait aucune hypothèse sur la forme des filets, cette conception est la traduction pure et simple des faits et ne présente rien d'hypothétique ; elle sera précisée plus loin.

237. Potentiel magnétique. — Si l'on admet ainsi qu'un aimant possède des masses magnétiques disséminées dans l'intérieur et une couche distribuée sur la surface, il y aura lieu de considérer une densité cubique ρ du magnétisme libre et une densité superficielle σ, ces quantités étant définies comme pour l'électricité.

Le potentiel magnétique V de l'aimant en un point quelconque P aura pour valeur

$$(1) \qquad V = \int \frac{\sigma}{r}\, dS + \int \frac{\rho}{r}\, dv.$$

Dans la première intégrale, qu'on étendra à toute la surface de l'aimant, r désigne la distance du point P à l'élément de surface dS où la densité superficielle est σ. Dans la seconde, qui doit être étendue à tout le volume de l'aimant, r est la distance du point P à l'élément de volume dv, sur lequel la densité cubique du magnétisme est ρ.

La somme des masses magnétiques étant toujours nulle pour un aimant quelconque, on a l'équation de condition

$$(2) \qquad 0 = \int \sigma\, dS + \int \rho\, dv.$$

Le champ magnétique F en un point, c'est-à-dire l'action

qui s'exercerait sur l'unité de magnétisme, et ses composantes rectangulaires X, Y, Z s'exprimeront, comme en électricité statique, par les dérivées du potentiel magnétique V.

On démontrerait également que la somme ΔV des trois dérivées secondes partielles du potentiel est égale à zéro pour tout point extérieur, et à $-4\pi\rho$ pour tout point intérieur aux corps aimantés.

Les équations fondamentales étant les mêmes dans les deux genres de phénomènes, on pourra, sans nouvelle démonstration, appliquer les théorèmes déjà établis, à la condition que ces théorèmes ne dépendent point des propriétés des conducteurs et que, d'autre part, la force coercitive n'ait pas à intervenir.

238. Un aimant équivaut à une surface magnétique. — On voit ainsi, d'une manière immédiate, que l'action d'un aimant sur tout point extérieur est équivalente à celle d'une couche fictive, de masse totale égale à zéro, distribuée à la surface suivant une certaine loi.

On sait, en effet, que l'action extérieure d'un système quelconque de masses électriques est la même que celle d'une couche de masse égale à leur somme, distribuée suivant une loi convenable sur une surface fermée qui enveloppe le système (40, VIII). La conclusion s'applique évidemment au magnétisme, puisque les deux espèces de masses obéissent à la même loi élémentaire.

Les actions extérieures exercées par l'aimant permettent de calculer la densité de la couche fictive superficielle, mais n'apprennent rien sur la distribution réelle du magnétisme Pour connaître cette distribution, il faudrait déterminer aussi par expérience les forces qui agissent à l'intérieur de l'aimant, et y creuser des cavités dans lesquelles on introduirait des aiguilles d'épreuve; mais la soustraction d'une masse aimantée, si petite qu'elle soit, modifie le champ dans la cavité, parce qu'on supprime des masses très voisines dont l'effet n'est pas négligeable. L'aimant qui reste équivaut alors à deux couches fictives, l'une sur la surface extérieure et l'autre sur les parois internes de la cavité, et la somme ΔV des trois dérivées secondes du potentiel est devenue nulle, tandis qu'elle était primivement égale à $-4\pi\rho$.

239. Théorie de Poisson. — Pour établir la théorie de l'aimantation par influence, Poisson considère un corps aimanté comme formé de particules magnétiques disséminées dans un milieu imperméable au magnétisme. Ces particules sont sphériques et équidistantes dans un corps isotrope et homogène ; chacune d'elles renferme des quantités égales des fluides positif et négatif, partie à l'état neutre à l'intérieur, partie à l'état libre à la surface. Le moment magnétique de chaque élément de volume dv peut être représenté par qdv, le facteur q dépendant du degré d'aimantation. Si l'élément dv est très grand par rapport aux dimensions des particules, mais infiniment petit par rapport aux dimensions de l'aimant, toutes les particules qu'il renferme auront leurs axes magnétiques sensiblement parallèles et son moment magnétique sera la somme des moments des particules. En appelant h, comme nous l'avons fait déjà (**128**), le rapport de l'espace occupé par les particules au volume dv, le volume total des particules comprises dans cet élément est égal à hdv, et son moment magnétique sera $hqdv$. Cet élément se comportera pour tout point situé à une distance finie comme un aimant infiniment petit, ou comme l'ensemble de deux masses égales et contraires infiniment voisines. Le moment magnétique de l'aimant par unité de volume est égal à hq.

La valeur du rapport h varie d'un corps magnétique à un autre et, pour un même corps, la valeur de q en chaque point dépend du degré d'aimantation : les actions extérieures augmentent ou diminuent avec le produit hq. Dans les corps qui ne présentent pas de force coercitive, rien ne s'oppose au mouvement des fluides à l'intérieur d'une particule magnétique; l'équilibre ne peut donc subsister que si la résultante de toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures, est nulle en tout point de la molécule ; au contraire, dans un corps doué d'une force coercitive qui agit à la manière du frottement, il suffit que cette résultante soit inférieure à la valeur donnée de la force coercitive.

La théorie de Poisson n'est pas liée nécessairement à l'hypothèse des deux fluides, mais il est plus difficile de la dégager de cette conception particulière sur la structure des milieux magnétiques.

240. Théorie de Lord Kelvin. — Nous exposerons de préférence la théorie du magnétisme sous la forme que lui a donnée Lord Kelvin. Cette théorie, dans ses résultats essentiels, coïncide avec celle de Poisson, mais elle a l'avantage d'être indépendante de l'idée de fluide et de toute hypothèse sur la constitution du milieu, de sorte qu'elle paraît se rapprocher davantage des faits expérimentaux. L'idée fondamentale est de considérer une portion quelconque d'un corps aimanté comme un aimant complet, défini par la direction de l'axe et par son moment magnétique, c'est-à-dire comme un aimant infiniment petit ayant des masses $+m$ et $-m$ à ses extrémités, une longueur ds et, par suite, un moment magnétique égal à mds.

241. Intensité d'aimantation. — Cela posé, on appelle *intensité d'aimantation* I, ou simplement aimantation, en un point le quotient du moment magnétique d'un élément de volume par le volume lui-même, autrement dit la valeur du moment par unité de volume. On aura ainsi

$$I = \frac{m\,ds}{dv}. \tag{3}$$

Ce sont exactement les termes employés pour définir la polarisation des diélectriques (87).

L'aimantation est une grandeur géométrique, ou un vecteur, définie par sa direction, qui est l'axe magnétique de l'élément de volume, et par sa valeur numérique.

Le même mode de raisonnement permettra encore d'exprimer la distribution du magnétisme et le potentiel en fonction de l'aimantation I.

Si A, B et C sont les composantes rectangulaires de l'aimantation, la densité cubique au point dont les coordonnées sont x, y et z, est

$$\rho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right). \tag{4}$$

La densité superficielle σ en un point de la surface S est la projection de l'aimantation sur la normale ; on a donc, en appelant θ l'angle de ces deux directions,

$$\sigma = I\cos\theta. \tag{5}$$

Ces valeurs de ρ et σ, qui représentent les densités d'un fluide dans l'hypothèse de Coulomb, peuvent ainsi être considérées comme des quantités purement mathématiques définies par les équations (4) et (5).

L'équation de Poisson relative aux dérivées secondes du potentiel devient alors

$$(6) \qquad \Delta V = -4\pi\rho = 4\pi\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right).$$

Pour un point extérieur aux masses agissantes, le second membre est toujours nul, puisque l'aimantation est constante et égale à zéro.

242. Aimants uniformes. — Un aimant est dit *uniforme* lorsque, dans toute son étendue, l'aimantation est constante en grandeur et en direction; les dérivées des composantes A, B, C sont alors nulles et l'équation (4) donne $\rho = 0$; il n'y a donc de magnétisme qu'à la surface.

Dans ce cas, en vertu de la relation (5), l'expression (1) du potentiel se réduit à

$$V = I\int \frac{dS\cos\theta}{r}.$$

Tous les éléments de volume étant aimantés suivant la même direction, le moment magnétique M de l'ensemble est égal à la somme des moments de chacun d'eux. On a donc

$$M = \int I\,dv = I\int dv = vI.$$

Ainsi, *le moment magnétique d'un aimant uniforme est le produit du volume par l'aimantation.*

L'expression (5) de la densité superficielle montre que l'action extérieure d'un corps aimanté uniformément est équivalente à celle de deux couches de glissement (**126**), c'est-à-dire des couches qui résulteraient de la superposition de deux masses homogènes, de densités $\pm\rho$ égales et de signes contraires, dont la partie positive aurait glissé, parallèle à l'aimantation, d'une quantité δ telle qu'on ait $\rho\delta = I$.

Nous avons dit (**233** et **234**) qu'on pouvait expliquer l'action de la terre par un aimant infiniment petit placé au centre ou par deux couches de glissement ; on voit qu'on pourrait aussi supposer la terre uniformément aimantée, cette dernière condition étant équivalente aux deux autres.

243. Induction magnétique. — On ne peut déterminer le champ magnétique dans l'intérieur d'un aimant sans y creuser une cavité et, en supposant que les portions voisines n'aient pas été altérées, l'action dépend alors des couches distribuées sur les parois de la cavité (**88**).

Dans le cas d'une cavité cylindrique allongée, ou d'une fente, parallèle aux lignes d'aimantation, le champ F en un point ne dépend que du potentiel V des masses extérieures à l'élément du volume enlevé. Ses composantes X, Y et Z sont alors données par les dérivées partielles du potentiel prises en signe contraire.

C'est à la grandeur ainsi définie que l'on convient d'attribuer d'une manière spéciale le nom *force magnétique en un point de la masse aimantée*.

Si la cavité est un cylindre très aplati ou une fente infiniment mince perpendiculaire aux lignes d'aimantation, il se produit sur les faces des couches uniformes et les composantes X_1, Y_1 et Z_1 du champ F_1 ont pour valeurs (**89**)

$$(7)\qquad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= X + 4\pi A, \\ Y_1 &= Y + 4\pi B, \\ Z_1 &= Z + 4\pi C. \end{aligned} \right.$$

Le champ F_1 jouit des mêmes propriétés que la fonction qui a été désignée sous le nom d'*induction électrique* ; on l'appellera ici *induction magnétique*.

Sans qu'il soit nécessaire de répéter les raisonnements, on sait que l'induction magnétique satisfait à l'équation de continuité pour tous les points tant intérieurs qu'extérieurs aux milieux aimantés ; elle se confond avec le champ magnétique, pour tous les points extérieurs, puisque l'aimantation I et ses composantes A, B et C sont alors égales à zéro.

On appellera encore *ligne d'induction* une ligne à laquelle l'induction magnétique est tangente en chaque point; *tube*

d'induction un canal limité latéralement par des lignes d'induction, enfin *flux d'induction* au travers d'un élément de surface le produit de la surface de l'élément par la composante normale de l'induction. Le flux d'induction est une quantité constante dans toute l'étendue d'un tube d'induction.

L'induction magnétique est une quantité directement accessible à l'expérience et joue un rôle important dans un grand nombre de phénomènes.

244. Solénoïdes magnétiques. — Dans l'impossibilité de déterminer la structure intime d'un aimant par l'ensemble de ses actions extérieures, on est conduit à considérer le problème inverse, en étudiant les propriétés d'aimants constitués d'une manière particulière.

On appelle *solénoïde simple* un aimant ayant la forme d'un *tube* plein, de section constante a infiniment petite, en chaque point duquel l'aimantation I est elle-même constante et tangente à la direction du tube.

La densité magnétique est nulle dans toute l'étendue du solénoïde et sur sa surface latérale, puisqu'il constitue un filet (236) de molécules identiques; aux extrémités seulement existent deux masses magnétiques, égales et de signes contraires, dont la valeur commune est $m = \pm a\mathrm{I}$.

Si la section du solénoïde est variable et que l'aimantation, toujours parallèle au tube en chaque point, soit telle que le produit $a\mathrm{I}$ reste invariable, le système constitue encore un solénoïde magnétique simple.

Un solénoïde simple se comporte pour tous les points extérieurs comme un aimant dont les pôles seraient situés rigoureusement aux extrémités.

Le potentiel en un point P, situé à la distance r_2 du pôle positif $+m$ et à la distance r_1 du pôle négatif $-m$, a pour expression

$$\mathrm{V} = m\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = -m\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Si un pareil solénoïde est *fermé*, le potentiel est nul partout à l'extérieur; par suite le champ est nul, et l'on ne peut découvrir le magnétisme qui existe dans le système qu'en le brisant en un point et séparant les faces en regard.

Un solénoïde magnétique est *complexe* lorsque l'aimantation, toujours tangente en chaque point à la direction du tube, est telle que le produit $m = aI$ n'est pas constant. Un pareil système peut être considéré comme un faisceau de plusieurs solénoïdes simples de longueurs inégales.

Soit ds (fig. 48) un élément de la longueur s du solénoïde,

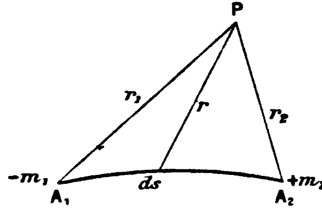


Fig. 48.

comptée dans le sens de l'aimantation. Le potentiel de cet élément au point P, situé à la distance r, est égal à $-m\frac{dr}{r^2}$, et le potentiel du solénoïde entier

$$V = \int -\frac{m\,dr}{r^2}.$$

Si l'on intègre le second membre par parties, en désignant par $-m_1$ et $+m_2$ les masses situées aux extrémités A_1 et A_2, on obtient

$$V = \frac{m_2}{r_2} - \frac{m_1}{r_1} - \int \frac{1}{r}\frac{dm}{ds}\,ds.$$

Le potentiel est le même que s'il y avait en chaque point du filet une *densité linéaire* $\lambda = -\frac{dm}{ds}$, et l'on peut écrire

$$V = \frac{m_2}{r_2} - \frac{m_1}{r_1} + \int \frac{\lambda\,ds}{r}.$$

245. Aimants solénoïdaux. — Un aimant est dit *solénoïdal* lorsqu'il peut être divisé en solénoïdes simples aboutissant à la surface ou fermés sur eux-mêmes. Dans ce cas, il n'y a pas

de magnétisme libre à l'intérieur de l'aimant, et la distribution est purement superficielle.

La densité cubique ρ étant nulle, il en résulte

$$(8) \qquad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, la densité est nulle en tout point intérieur; l'aimant est solénoïdal, puisque les éléments qui possèdent des masses égales et de signes contraires peuvent être joints deux à deux par des solénoïdes simples.

Le potentiel d'un aimant solénoïdal, en un point quelconque intérieur ou extérieur, ne dépend donc que de la densité superficielle du magnétisme, ou de la composante normale de l'aimantation en chaque point de la surface. Ce potentiel est indépendant de la manière dont varie l'aimantation intérieure, ou, en d'autres termes, de la forme intérieure des filets solénoïdaux qui aboutissent à la surface, ainsi que de l'existence de filets fermés.

Pour la Terre, par exemple, on peut imaginer encore que le magnétisme soit produit par des filets solénoïdaux, maintenus dans les roches superficielles à basse température, et aboutissant à la surface de manière à donner une distribution équivalente à celle d'une aimantation uniforme (**242**).

246. Feuillets magnétiques. — On appelle *feuillet magnétique simple* un aimant constitué par deux surfaces infiniment voisines équidistantes, chargées de couches magnétiques uniformes, égales et de signes contraires; ce système équivaut encore à un aimant formé de deux couches infiniment voisines non équidistantes, toujours égales et de signes contraires, et telles que la densité en chaque point soit en raison inverse de leur distance.

Si on désigne par h l'épaisseur du feuillet en un point et par σ la densité de la couche, le produit $h\sigma$ doit être une constante U, que l'on appelle la *puissance magnétique* du feuillet. Comme la densité σ est le quotient d'une masse magnétique par une surface, ou par le carré d'une longueur, la fonction U est le quotient d'une masse magnétique par une longueur; c'est donc un potentiel magnétique.

On peut dire encore qu'un feuillet magnétique simple est une lame infiniment mince dont l'aimantation est en chaque point normale à la surface et inversement proportionnelle à l'épaisseur. On a ainsi h(5) p. 359

$$U = h\sigma = hI.$$

La portion du feuillet qui correspond à l'élément de surface dS peut être considérée comme un aimant infiniment petit, dont le moment est $IhdS = UdS$.

Si l'on désigne par α, β et γ les cosinus directeurs de la normale à la surface S, comptée dans le sens de l'aimantation, les composantes du moment UdS sont αUdS, βUdS et γUdS. Or, les quantités αdS, βdS et γdS sont respectivement les projections de l'élément dS sur des plans perpendiculaires aux axes de coordonnées. Représentant par S_x, S_y et S_z les projections correspondantes de la surface entière, les composantes M_x, M_y et M_z du moment magnétique total sont

$$M_x = US_x, \quad M_y = US_y, \quad M_z = US_z;$$

le moment magnétique M du feuillet peut donc s'écrire

$$M^2 = U^2(S_x^2 + S_y^2 + S_z^2).$$

Il est clair que, si la surface du feuillet est plane, son moment magnétique est simplement $M = US$.

Le potentiel d'un élément dS de feuillet (fig. 49) au point P, situé à la distance r dans une direction qui fait l'angle θ avec la normale, est (86)

$$dV = U dS \frac{\cos\theta}{r^2}.$$

En appelant $d\omega$ l'angle solide sous lequel l'élément dS est vu du point P, on a

$$dS \cos\theta = r^2 d\omega$$

et, par suite,

$$dV = U\, d\omega.$$

Comme le facteur U est constant, le potentiel du feuillet au point P a pour expression

$$V = U\omega. \tag{9}$$

Il importe de bien préciser la signification de cet angle solide ω. Le potentiel dV est positif ou négatif suivant que le point P *voit* la surface positive ou la surface négative de l'élément de surface dS du feuillet. L'angle $d\omega$, considéré lui-même comme positif ou négatif, est la *surface apparente* de cet élément. L'angle ω, ou la surface apparente du feuillet total, est déterminé par un cône limité au contour même du feuillet ; il est positif ou négatif, suivant que la portion de feuillet que voit le point P dans le contour apparent est elle-même positive ou négative. Le potentiel du feuillet est donc indépendant de sa forme ; il ne dépend que de sa puissance magnétique et de son contour.

Il en résulte ce théorème important de Gauss [1].

Le potentiel d'un feuillet magnétique simple en un point

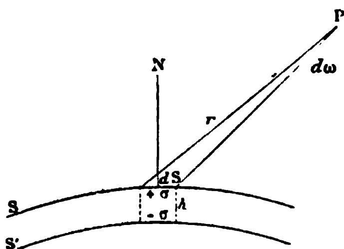


Fig. 49.

extérieur est égal au produit de la puissance magnétique du feuillet par sa surface apparente.

Pour que le potentiel soit nul en un point, il faut et il suffit que la surface apparente du feuillet soit nulle.

La surface apparente du feuillet est nulle si, le contour étant plan, le point considéré est situé dans ce plan.

Elle est nulle, le feuillet étant quelconque, quand elle se compose de parties de signes contraires donnant une somme algébrique nulle.

En particulier, si le feuillet forme une surface fermée, le potentiel est nul pour tout point extérieur. Pour un point intérieur à la surface du feuillet, l'angle ω est égal à 4π, le

(1) Gauss, *Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus*, § 38.

potentiel est donc constant et égal à $\pm 4\pi U$, de même signe que la surface intérieure. Ce potentiel ayant une valeur constante tant à l'intérieur qu'à l'extérieur, l'action du feuillet fermé sur un point quelconque est nulle.

Si deux feuillets magnétiques S et S′ (fig. 50) de même puissance ont le même contour et que leurs surfaces en regard soient de signes contraires, leurs potentiels sont égaux pour tous les points situés en dehors de l'espace qu'ils comprennent; ces potentiels diffèrent, au contraire, de $4\pi U$ pour tous les points situés entre les deux surfaces. En effet, le potentiel de l'un des feuillets S est positif et égal à $U\omega$, celui de l'autre feuillet S′ est $-U\omega'$; la différence est donc

$$U(\omega + \omega') = 4\pi U.$$

De même, pour deux points infiniment voisins situés de part et d'autre d'un feuillet magnétique, à une distance finie

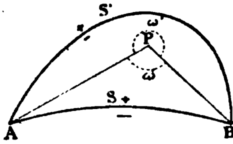


Fig. 50.

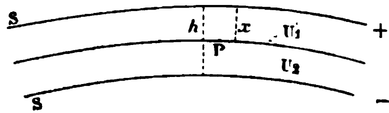


Fig. 51.

du contour, la différence des potentiels est égale $4\pi U$, car elle est pour l'un $U\omega$ et, pour l'autre, $-U(4\pi - \omega)$. Ainsi, quand le point considéré traverse un feuillet dans le sens de l'aimantation, c'est-à-dire de la face négative à la face positive, le potentiel augmente brusquement de $4\pi U$.

Si, le point restant fixe, le feuillet se déformait de manière à passer de la position S′ à la position S, le potentiel au point P éprouverait le même accroissement $4\pi U$.

En réalité, la variation du potentiel ne se fait pas sur une surface géométrique, parce que l'épaisseur du feuillet n'est pas rigoureusement nulle et il est facile de voir que le potentiel en P varie d'une manière continue pendant que le point traverse la couche aimantée.

En effet, partageons le feuillet SS′ (fig. 51) par une surface

intermédiaire qui forme deux nouveaux feuillets d'épaisseurs x et $h-x$, dont les puissances magnétiques U_1 et U_2 sont

$$\frac{U_1}{x}=\frac{U_2}{h-x}=\frac{U}{h}.$$

En un point P de cette surface, le potentiel a pour valeur

$$V=\omega U_2-(4\pi-\omega)U_1=U\left[\omega\frac{h-x}{h}-(4\pi-\omega)\frac{x}{h}\right],$$

$$V=U\left(\omega-4\pi\frac{x}{h}\right).$$

L'action normale du feuillet au point P est

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=-U\frac{\partial\omega}{\partial x}+4\pi U\frac{1}{h}=-U\frac{\partial\omega}{\partial x}+4\pi I.$$

Cette expression, comme on aurait pu le prévoir, est la composante normale de l'induction au point P. En effet, nous avons admis implicitement que nous placions le point P dans une fente infiniment mince perpendiculaire aux lignes d'aimantation; dans ce cas, $4\pi I$ est le terme qu'il faut ajouter aux actions extérieures pour avoir la valeur du champ à l'intérieur de la cavité.

Un feuillet magnétique est dit *complexe* lorsque, l'aimantation étant toujours normale en chaque point, la puissance magnétique ne conserve plus une valeur constante dans toute l'étendue du feuillet.

Le potentiel d'un feuillet complexe en un point extérieur P est alors représenté par l'intégrale suivante étendue à toute la surface du feuillet :

$$V=\int U d\omega=\int\frac{U\cos\theta}{r^2}dS.$$

247. Aimants lamellaires. — Un aimant est dit *lamellaire* quand il peut être divisé en feuillets magnétiques simples fermés ou en feuillets ouverts ayant leur contour sur la surface de l'aimant.

Désignons par U la somme des puissances magnétiques des feuillets que l'on rencontre en allant d'une origine fixe au point dont les coordonnées sont x, y, z, suivant une ligne tracée dans l'intérieur de l'aimant. Cette quantité U est une fonction des coordonnées, indépendante du chemin parcouru entre les deux points; elle a une valeur constante sur toute la surface du feuillet, mais varie d'un feuillet à un autre.

Les lignes d'aimantation sont, par définition, orthogonales aux surfaces des feuillets élémentaires, et l'intensité d'aimantation est en chaque point en raison inverse de la distance normale dn de deux feuillets consécutifs. On a donc

$$(10) \qquad I = \frac{dU}{dn}.$$

248. Potentiel d'aimantation. — Ainsi la fonction U jouit, au signe près, par rapport à l'aimantation, des mêmes propriétés que le potentiel par rapport aux forces extérieures. On peut, par analogie, appeler *potentiel d'aimantation* la fonction — U. Les composantes de l'aimantation, suivant les axes de coordonnées, sont respectivement égales aux dérivées partielles correspondantes de la fonction U :

$$A = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad B = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad C = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

On en déduit

$$(11) \qquad A\,dx + B\,dy + C\,dz = dU.$$

Le premier membre de cette équation est donc la différentielle exacte d'une fonction des coordonnées. Inversement, si l'expression $A\,dx + B\,dy + C\,dz$ est une différentielle exacte, les composantes de l'aimantation sont égales respectivement aux dérivées partielles de cette fonction, et l'aimantation est lamellaire.

Les conditions d'intégrabilité du premier membre de l'équation (11) donnent aussi, pour une aimantation lamellaire.

$$(12) \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial z}.$$

Lorsqu'un aimant peut être divisé en feuillets magnétiques

complexes, l'intensité d'aimantation n'est plus en raison inverse de la distance de deux feuillets infiniment voisins, mais les lignes d'aimantation sont encore orthogonales aux surfaces des feuillets, ce qui donne la condition

$$(13)\qquad \frac{A}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{B}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{C}{\frac{\partial U}{\partial z}}.$$

Dans ce cas, l'expression $A\,dx + B\,dy + C\,dz$ n'est plus une différentielle exacte. En éliminant la fonction U entre les équations (13), on obtient

$$(14)\quad A\left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right) + C\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right) = 0.$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, l'aimant est formé de feuillets magnétiques complexes, puisque les lignes d'aimantation sont orthogonales à un système de surfaces, à moins que chacune des expressions comprises entre parenthèses ne soit nulle séparément, auquel cas l'aimantation serait lamellaire, d'après les équations (12).

249. Potentiel d'un aimant lamellaire. — L'action extérieure d'un aimant lamellaire ne dépend que de la forme et de la position du contour des feuillets ouverts, c'est-à-dire des zones infiniment minces interceptées sur la surface par deux feuillets voisins, et nullement de la forme des feuillets.

Pour un point intérieur, l'induction magnétique s'obtiendra en composant l'action déterminée par ces zones successives avec un vecteur parallèle à l'aimantation au point considéré et égal à $4\pi I$. Les potentiels à l'aide desquels s'expriment ces actions peuvent être obtenus directement par les considérations suivantes.

Faisons d'abord abstraction des feuillets fermés et supposons qu'après avoir enlevé tous les feuillets ouverts que renferme l'aimant, on les remplace par des feuillets respectivement de même puissance, terminés aux mêmes contours, mais appliqués sur la surface elle-même : c'est l'opération qu'on pourrait réaliser physiquement si chacun des feuillets était

formé d'une membrane élastique, fixée par son contour, qu'on étendrait de manière à l'appliquer sur la surface de l'aimant, sans modifier sa puissance magnétique. Admettons, par exemple, dans la figure 52, que tous ces feuillets aient leurs faces positives tournées vers le haut, et qu'on les amène à recouvrir le point A de la surface de l'aimant où la fonction U a sa valeur maximum U_m.

La surface entière sera ainsi occupée par une série de feuillets dont la superposition constitue un feuillet complexe et ce système produit en tout point extérieur le même potentiel que l'aimant primitif.

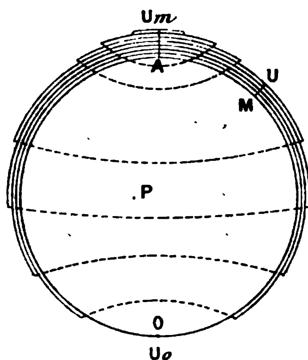


Fig. 52.

Considérons maintenant un point P situé à l'intérieur. Pour tous les feuillets primitivement compris entre les points P et A, le potentiel n'a pas changé par le fait de la transformation; mais, pour chacun des autres feuillets qui ont été traversés par le point P, le potentiel a diminué de $4\pi dU$. Soient donc U_p et U_0 les valeurs de la fonction U au point P et au point O de cette surface où elle est minimum; pendant la transformation, le potentiel P aura diminué de $4\pi(U_p - U_0)$, et il faudra ajouter cette quantité au nouveau potentiel du point P pour lui rendre la valeur qu'il avait primitivement.

En un point quelconque M, où la valeur primitive de la fonction considérée est U, la puissance magnétique du feuillet superficiel résultant ainsi constitué est $U - U_0$. Par suite, le potentiel de toutes les couches au point P est $\int (U - U_0)\, d\omega$.

Si le point P n'est pas entouré de feuillets fermés, le potentiel en ce point a diminué de $4\pi(U_p - U_0)$ pendant la transformation ; par suite, la valeur primitive de ce potentiel était

$$(15) \qquad V_i = \int (U - U_0)\, d\omega + 4\pi(U_p - U_0).$$

Il est facile de voir que les feuillets fermés ne modifient pas l'expression du potentiel intérieur.

Le potentiel extérieur n'est pas changé par le transport des feuillets à la surface ; il a pour expression

$$(16) \qquad V_e = \int (U - U_0)\, d\omega.$$

Les deux formules (15) et (16) peuvent être simplifiées, si l'on remarque que l'intégrale de la surface apparente $d\omega$ est égale à zéro pour les points extérieurs et à -4π pour les points intérieurs. Il vient alors

$$(15)' \qquad V_i = \int U\, d\omega + 4\pi U_p,$$

$$(16)' \qquad V_e = \int U\, d\omega.$$

250. Un système magnétique équivaut à un aimant lamellaire. — On a vu (**238**) que l'action extérieure d'un aimant équivaut à celle d'une couche superficielle dont la masse totale est nulle. Plus généralement, l'action d'un système magnétique quelconque à l'extérieur d'une surface S qui renferme toutes les masses agissantes, équivaut à celle d'une couche de masse totale nulle distribuée sur la surface S suivant une loi convenable.

Si l'on appelle σ la densité de la couche fictive en un point, F_n et F'_n les composantes normales, comptées à partir de la surface, du champ extérieur et du champ intérieur de cette couche, on a

$$4\pi\sigma = F_n + F'_n.$$

Considérons le champ intérieur F' et les surfaces de niveau

correspondantes. Si l'on distribue sur chacune de ces surfaces S' des couches magnétiques, de masses égales et de signes contraires, dont la densité σ' en chaque point est déterminée par la condition

$$4\pi\sigma' = F' = -\frac{dV'}{dn'},$$

l'action extérieure de cet ensemble de couches superposées est évidemment nulle.

Remarquons maintenant que le produit $\sigma' dn'$ est constant entre deux surfaces de niveau dont la différence de potentiel est dV'. Si donc on associe la couche négative de la surface S', où le potentiel est V', avec la couche positive de la surface voisine S″ au potentiel $V' + dV'$, on constitue, au moins dans toute la partie commune aux deux surfaces, un feuillet uniforme dont la puissance magnétique est $-\sigma' dn'$; on répétera le raisonnement de proche en proche pour tous les autres feuillets.

Mais, en formant le feuillet S'S″, on a laissé à la surface de l'aimant une zone négative, correspondant à la différence $S' - S''$ des deux surfaces de niveau. Le champ extérieur de l'ensemble de ces zones est donc égal et de signe contraire au champ produit par le système des feuillets.

Si dS' est un élément négatif de la surface S' sur la zone $S' - S''$ et dS l'élément correspondant de la surface S déterminé par un tube de force, on a

$$F'_n dS = F' dS' = 4\pi\sigma' dS'.$$

La charge magnétique de l'élément dS' est donc la même que celle que contiendrait l'élément dS avec une densité égale à $-\frac{F'_n}{4\pi}$.

Il en résulte que l'action extérieure de tous les feuillets équivaut à celle d'une couche superficielle de masse totale nulle dont la densité σ_1 en chaque point serait $4\pi\sigma_1 = F'_n$.

En prolongeant dans la surface S les surfaces de niveau extérieures, c'est-à-dire en considérant les surfaces de niveau d'induction correspondantes, on démontrera de même qu'un

système de feuillets uniformes définis par ces surfaces équivaut à une couche superficielle dont la densité σ_2 satisfait à la relation $4\pi\sigma_2 = F_n$.

L'ensemble de ces deux systèmes de feuillets a donc le même champ extérieur que la couche superficielle de densité $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$ égale à celle de la couche proposée.

Cet ensemble constitue encore une aimantation lamellaire puisque l'équation (11), s'appliquant aux deux systèmes, convient également à leur superposition.

La substitution n'est légitime, bien entendu, que quand on considère les actions extérieures à la surface S et ne s'applique pas aux actions intérieures; elle n'apprend rien en particulier sur la constitution réelle de l'aimant.

251. Potentiel d'induction. — Dans un système magnétique quelconque, l'induction obéit à la loi de continuité et l'on peut représenter ses composantes X_1, Y_1, Z_1 par les dérivées partielles, prises en signe contraire, d'une fonction Ω, qu'on appellera *potentiel d'induction* et qui satisfait à l'équation de Laplace (**243**). Il est à remarquer toutefois que cette quantité Ω n'est pas une simple fonction des coordonnées et ne représente pas un véritable potentiel, avec la signification habituelle attribuée à cette expression.

Supposons, en effet, que l'on suive une ligne d'induction fermée, en partant d'un point P pour y revenir, la fonction Ω diminue d'une manière continue et ne reprend pas au retour sa valeur primitive. En appelant dl un élément de la ligne d'induction, on a

$$d\Omega = -F_1\,dl.$$

Quand on est ainsi revenu au point primitif, après avoir parcouru la ligne d'induction, la nouvelle valeur Ω' de la fonction est devenue

$$\Omega' = \Omega - \int F_1\,dl.$$

L'intégrale $\int F_1\,dl$, qui représente le travail de l'induction F_1 sur l'unité de magnétisme, représente aussi la somme des travaux produits par le champ magnétique et par $4\pi I$. Sur

une ligne fermée le travail du champ est nul ; il ne reste alors que le travail relatif au vecteur $4\pi I$, lequel n'existe que dans l'intérieur de l'aimant.

Quand le système est un feuillet magnétique simple d'épaisseur h, ce dernier terme se réduit à $4\pi I h = 4\pi U$; il en résulte, pour une ligne d'induction fermée,

$$(17) \qquad \int F_1\, dl = 4\pi U = \Omega - \Omega'.$$

Il en serait de même pour un contour fermé quelconque traversant le feuillet.

L'intégrale est nulle, au contraire, et le travail correspondant nul si l'on n'a pas traversé le feuillet, ou qu'on l'ait traversé deux fois en sens opposés.

Le raisonnement s'applique également aux aimants lamellaires, en désignant par U la somme des puissances magnétiques des feuillets traversés par un chemin fermé quelconque, abstraction faite des feuillets qui auraient été coupés deux fois en sens opposés.

252. Force magnétomotrice. — Cette considération conduit à un autre ordre d'idées qui sera utilisé plus tard.

Soit φ le flux d'induction qui correspond à un tube élémentaire, S la section du tube en un point et dl un élément de la ligne d'induction ; on a

$$\varphi = F_1 S = \frac{F_1\, dl}{\frac{dl}{S}}.$$

Les quantités dl et S sont respectivement la hauteur et la section du cylindre qui forme l'élément de longueur du tube considéré. Le dénominateur de la dernière expression représente la résistance qu'offrirait ce cylindre, si sa conductivité était égale à l'unité, au passage d'un courant électrique qui suivrait le chemin des lignes d'induction ; on peut l'appeler par analogie *résistance magnétique* et le représenter par dr.

La valeur de φ, qui est constante le long du tube, est alors comparable à un courant électrique. La quantité $\frac{F_1\, dl}{dr}$ est la

même pour tous les éléments et la valeur de φ s'obtiendra encore en faisant la somme des numérateurs et des dénominateurs de toutes les fractions analogues pour une série d'éléments successifs.

Si r est la résistance du tube entre deux points P_1 et P_2, ou c sa conductance, Ω_1 et Ω_2 les potentiels d'induction correspondants, on aura donc

$$(18) \qquad \varphi = \frac{1}{r}\int F_1\, dl = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{r} = c(\Omega_1 - \Omega_2).$$

Lorsque le point P_2 coïncide de nouveau avec le point P_1, après qu'on a suivi un chemin fermé, le potentiel a pris une valeur différente et diminué d'une quantité déterminée $\delta\Omega$, définie par la condition

$$\delta\Omega = r\varphi = \frac{\varphi}{c}.$$

Poursuivant l'analogie avec les courants électriques, on peut dire que le tube considéré est le siège d'une force *magnétomotrice* $\delta\Omega$ et que le flux d'induction φ correspondant est défini, comme le courant, par la loi d'Ohm.

Si le tube d'induction traverse un feuillet magnétique U ou un aimant lamellaire, en coupant une suite de feuillets dont la somme des puissances magnétiques est U, ou encore un aimant quelconque, que l'on peut remplacer par l'aimant lamellaire équivalent, on a

$$4\pi U = r\varphi = \frac{\varphi}{c}.$$

Le flux total d'induction qui émane de la surface entière d'un feuillet est donc

$$\Phi = 4\pi U \Sigma c = 4\pi U C;$$

c'est le produit de $4\pi U$ par la conductance totale C de l'ensemble des tubes d'induction.

253. Énergie potentielle des aimants dans un champ. — L'énergie d'un aimant permanent dans un champ magnétique, produit par un système invariable, a pour expression

générale, en appelant m la masse magnétique située au point où le potentiel du champ est V,

$$(19) \qquad W = \sum mV = \int V\sigma dS + \int V\rho dv.$$

Cette énergie est le travail qu'il faudrait dépenser pour amener de l'infini dans la position qu'il occupe l'aimant considéré, ou inversement le travail que l'aimant pourrait produire en s'éloignant à l'infini.

Pour exprimer l'énergie en fonction de l'aimantation, il suffirait de remplacer les densités par leurs valeurs connues; mais il est plus simple de considérer le problème directement. Un élément de volume dv, dont le moment magnétique est $I dv$, équivaut à un petit aimant de masse m et de longueur ds, parallèle à la direction d'aimantation. En appelant V et V′ le potentiel du champ aux points où se trouvent les masses $-m$ et $+m$, l'énergie de cet élément est

$$dW = m(V' - V) = m ds \frac{V' - V}{ds} = I dv \frac{\partial V}{\partial s}.$$

Si δ est l'angle que fait la direction de l'aimant avec la direction du champ et dn la distance normale des deux surfaces de niveau V et V′ au point considéré, on a

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{dV}{dn}\cos\delta = -F\cos\delta,$$

$$dW = -FI\cos\delta . dv.$$

En appelant α, β, γ les cosinus directeurs du champ F, dont les composantes sont X, Y, Z, et λ, μ, ν les cosinus directeurs de l'aimantation I, on peut écrire

$$dW = -FI(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) dv = -(AX + BY + CZ) dv,$$

et l'énergie (19) de l'aimant total devient

$$(20) \quad W = -\int FI(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) dv = -\int (AX + BY + CZ) dv.$$

Lorsque le champ est uniforme, le facteur F et ses cosinus sont constants, ce qui donne

$$W = -F\left[\alpha\int A\,dv + \beta\int B\,dv + \gamma\int C\,dv\right].$$

Appelant M le moment magnétique de l'aimant, l, m, n ses cosinus directeurs et θ l'angle de sa direction avec celle du champ, on a

$$\int A\,dv = Ml, \qquad \int B\,dv = Mm, \qquad \int C\,dv = Mn,$$

$$(21) \qquad W = -FM(\alpha l + \beta m + \gamma n) = -FM\cos\theta.$$

Ce résultat particulier pouvait être écrit directement.

L'énergie est minimum et égale à $-FM$ quand l'angle θ est nul, c'est-à-dire quand l'axe magnétique est parallèle à la direction du champ; l'équilibre est stable. Il y a équilibre instable si ces deux directions sont opposées ; l'énergie est alors maximum et égale à FM. Enfin l'énergie est nulle quand les deux directions sont rectangulaires.

254. Cas des feuillets magnétiques. — Si le système est un feuillet magnétique simple S, le moment magnétique d'un élément de surface du feuillet est $U\,dS$; l'énergie potentielle de cet élément dans le champ est égale à $-UF\,dS\cos\theta$, et celle du feuillet

$$W = -U\int F\,dS\cos\theta.$$

L'expression $F\cos\theta$ représente la projection F_n de l'intensité du champ sur la normale au feuillet; le produit $F_n\,dS$ est le flux de force que le champ émet dans l'élément dS, ce flux étant compté positivement quand il traverse le feuillet de la face négative à la face positive, et négativement en sens contraire. L'intégrale du second membre exprime la valeur du flux limité au contour ; elle est donc indépendante de la forme de la surface qui s'y rattache. En appelant φ la valeur de ce flux, l'énergie potentielle du feuillet peut s'écrire

$$(22) \qquad W = -U\varphi.$$

Il en résulte que *l'énergie potentielle d'un feuillet dans un champ est égale au produit, pris en signe contraire, de la puissance du feuillet par le flux de force, émané du champ, qui pénètre par sa face négative.*

Ce résultat peut encore être obtenu directement. En effet, l'énergie d'une masse m dans le champ d'un feuillet magnétique simple a pour expression

$$dW = mV = mU\omega = Um\omega.$$

Or, le produit $m\omega$ est le flux de force qui émane de la masse considérée dans l'angle ω et qui, par conséquent, traverse le feuillet en entrant par la surface positive; il est égal et de signe contraire au flux qui entre par la face négative.

Comme l'énergie potentielle d'un système magnétique dans le champ du feuillet est la somme des énergies des différentes masses, c'est donc le produit de la puissance magnétique U du feuillet par la somme des flux de force qui le traversent, c'est-à-dire par le flux total de force qui émane du système et entre dans le feuillet par la face positive.

Si ce système est un second feuillet S′, le flux de force φ est proportionnel à la puissance magnétique U′ de ce second feuillet et on peut écrire $\varphi = M'U'$, le coefficient M' étant le flux de force que recevrait le premier feuillet, si la puissance du second était égale à l'unité. L'énergie du second feuillet dans le champ du premier est donc

$$W = -UU'M'. \tag{23}$$

L'énergie du premier feuillet dans le champ du second a la même valeur et s'exprimera de la même manière,

$$W = -U'UM,$$

en fonction du flux de force MU qui, émanant du premier feuillet, traverserait le second; on en conclut

$$M = M'. \tag{24}$$

Ainsi *quand deux feuillets magnétiques de puissances égales*

à l'unité sont en présence, le flux de force qui émane de l'un pour traverser l'autre, en entrant par une face de signe déterminé, est le même pour les deux.

On remarquera l'analogie de cette propriété avec les théorèmes (**42**, I et II) relatifs à l'induction électrostatique entre deux conducteurs.

D'après l'équation (22), l'énergie relative d'un feuillet dans un champ magnétique ne dépend que du flux de force qui traverse la surface limitée au contour du feuillet, lequel flux est indépendant de la forme de cette surface. Il en résulte que cette énergie relative et, par suite, l'action que le champ exerce sur le feuillet, peuvent être exprimées en fonction de la courbe du contour.

De même, l'énergie réciproque de deux feuillets donnée par l'équation (23) ne dépend que des deux contours; cette énergie et l'action réciproque des feuillets doivent également pouvoir s'exprimer en fonction des deux courbes qui limitent leurs contours.

255. Action d'un champ sur un feuillet. — Lorsqu'un feuillet, situé dans un champ magnétique quelconque, éprouve un déplacement infiniment petit, tel que le flux de force qui le traverse par la face négative varie de $d\varphi$, l'accroissement d'énergie potentielle est

$$dW = - U d\varphi.$$

Cet accroissement d'énergie est égal et de signe contraire au travail dT du champ sur le feuillet, ce qui donne

$$dT = U d\varphi.$$

Comme la forme du feuillet est indifférente, nous pouvons supposer qu'il fait partie d'une surface continue S (fig. 53), passant par les positions s et s' qu'occupe successivement le contour, et que celui-ci ne fait que glisser sur la surface.

La variation $d\varphi$ est l'excès du flux de force qui traverse la surface limitée au contour s' sur celui qui traverse la surface limitée au contour s. Le flux de force relatif à la portion commune aux deux feuillets disparaît par différence; il ne

reste donc que l'excès du flux relatif au fuseau AMB sur celui qui correspond au fuseau AM'B.

Pour fixer les idées, on imaginera que chacun des con-

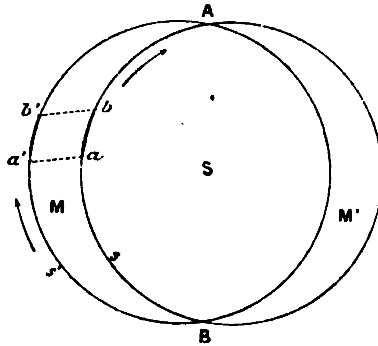


Fig. 53.

tours s et s' est suivi par un mobile tel qu'un observateur marchant dans le même sens et regardant le feuillet aurait à sa *gauche* la face positive. Soit ab (fig. 54) un élément ds du premier contour, $a'b'$ sa nouvelle position et F l'intensité du champ en ce point. La partie de la variation du flux relative au déplacement de cet élément, est le produit du champ F par

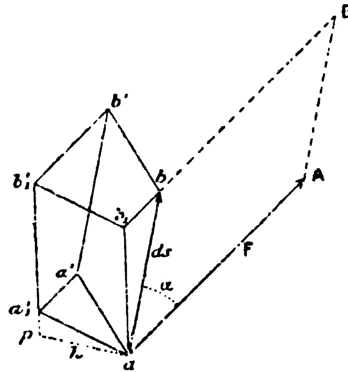


Fig. 54.

la projection $ab_1b'_1a'_1$, normale à sa direction, du parallélogramme $abb'a'$ décrit par l'élément ds.

La perpendiculaire $ap = h$ abaissée du point a sur la pro-

jection $a'_1 b'_1$ de l'élément $a'b'$ est la distance des plans projetants abb_1 et $a'b'b'_1$ des deux éléments ; c'est aussi la projection du déplacement aa'.

Désignant par α l'angle que font les directions du champ F et de l'élément ds, l'aire du parallélogramme $ab_1 b'_1 a'_1$ est égale à $ds \sin\alpha.h$; le flux de force correspondant est $\mathrm{F}ds \sin\alpha.h$ et le travail du champ $\mathrm{UF}ds\sin\alpha.h$.

Ce travail est le même que si l'élément ds était soumis à l'action d'une force

$$f = \mathrm{UF}\,ds \sin\alpha,$$

normale au plan $\mathrm{F}ds$ du champ F et de l'élément ds et dirigée vers la gauche d'un observateur qui, placé dans l'élément, regarderait dans la direction du champ.

On voit aisément que la même règle, appliquée au fuseau AM'B de la fig. 53, donnerait un accroissement négatif du flux de force et un travail négatif pour la valeur correspondante F' du champ.

Le plan $\mathrm{F}ds$ est le *plan directeur* de la force f, et le produit $\mathrm{F}ds \sin\alpha$ représente l'aire du parallélogramme $a\mathrm{AB}b$ ayant pour côtés la force F et l'élément ds. Il en résulte ce théorème important :

L'action d'un champ sur un feuillet équivaut à celle d'une série de forces appliquées aux différents éléments du contour, chacune d'elles étant normale à son plan directeur, dirigée vers la gauche de ce plan, et proportionnelle à l'aire du parallélogramme construit sur le champ et l'élément.

Remarquons encore que l'expression $\mathrm{F}ds\sin\alpha.h$ représente le flux de force *coupé* par l'élément ds pendant son déplacement aa', ce flux de force étant considéré comme positif ou négatif, suivant que le déplacement s'effectue à gauche ou à droite de l'observateur situé sur l'élément dans la position définie plus haut. On peut donc énoncer le même théorème de la manière suivante :

Le travail d'un champ sur un feuillet mobile est le produit de la puissance magnétique du feuillet par la somme des flux de force que coupe chacun des éléments du contour.

256. Champ d'un feuillet. — Si le système extérieur est formé d'une masse unique m (fig. 55) située à l'origine O des

coordonnées, le champ de cette masse au point P, à la distance r, est égal à $\frac{m}{r^2}$ et l'action f que subit l'élément $ab = ds$ du feuillet est

$$f = \mathrm{U}\frac{m}{r^2}ds\sin\alpha = \mathrm{U}\frac{m}{r^3}r\,ds\sin\alpha.$$

Le produit $r\,ds\sin\alpha$ représente le double de l'aire du triangle $\mathrm{O}ab$. Afin de préciser les conditions du problème, on

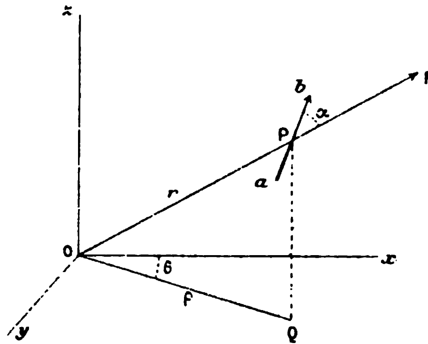


Fig. 55.

remarquera que, pour un observateur placé au point O suivant une direction parallèle à la force f, l'aire $\mathrm{O}ab$ paraîtra décrite de gauche à droite.

La force f étant perpendiculaire au plan de ce triangle et proportionnelle à sa surface, chacune de ses composantes parallèles aux axes de coordonnées est aussi proportionnelle à l'aire de la projection du triangle sur le plan perpendiculaire correspondant.

Si ρ et θ sont les coordonnées polaires de la projection Q du point P sur le plan des xy, on a la relation $y = x\,\mathrm{tang}\,\theta$ et le double de l'aire de la projection du triangle, décrite de l'axe des x vers l'axe des y, est

$$\rho^2 d\theta = \rho^2\cos^2\theta\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = x\,dy - y\,dx.$$

Une permutation des lettres donnera, de même, l'aire des

deux autres projections du triangle. Les composantes f_x, f_y et f_z de la force f sont donc

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} f_x &= \mathrm{U}\frac{m}{r^3}(y\,dz - z\,dy),\\ f_y &= \mathrm{U}\frac{m}{r^3}(z\,dx - x\,dz),\\ f_z &= \mathrm{U}\frac{m}{r^3}(x\,dy - y\,dx). \end{aligned}\right.$$

Les composantes de l'action totale de la masse m sur le feuillet S dont fait partie l'élément ab sont les intégrales de ces expressions étendues au contour s. Les composantes mX, mY et mZ de l'action du feuillet sur la masse m ont respectivement les mêmes valeurs prises en sens contraires, de sorte qu'il suffira de changer le signe des parenthèses.

Le champ du feuillet au point O a donc pour composantes

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X} &= \mathrm{U}\int_s \frac{z\,dy - y\,dz}{r^3},\\ \mathrm{Y} &= \mathrm{U}\int_s \frac{x\,dz - z\,dx}{r^3},\\ \mathrm{Z} &= \mathrm{U}\int_s \frac{y\,dx - x\,dy}{r^3}. \end{aligned}\right.$$

Pour obtenir les composantes X′, Y′, Z′ du champ F′ en un point P′ dont les coordonnées sont x', y', z', il suffira de remplacer x par $x - x'$, y par $y - y'$...., ce qui donne

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X}' &= \mathrm{U}\int_s \frac{(z-z')\,dy - (y-y')\,dz}{r^3},\\ \mathrm{Y}' &= \mathrm{U}\int_s \frac{(x-x')\,dz - (z-z')\,dx}{r^3},\\ \mathrm{Z}' &= \mathrm{U}\int_s \frac{(y-y')\,dx - (x-x')\,dy}{r^3}, \end{aligned}\right.$$

la distance r des points P et P′ étant cette fois

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

On en déduit

$$\frac{\partial r}{\partial x'} = -\frac{x-x'}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x'} = \frac{x-x'}{r^3}.$$

Comme cette dérivation partielle est indépendante des intégrations relatives au contour s, on a

$$\int_s \frac{(x-x')\,dz}{r^3} = \int_s \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right) dz = \frac{\partial}{\partial x'}\int \frac{dz}{r}.$$

Après avoir répété la même opération sur les autres termes, on obtient ainsi, en posant

$$F' = \int_s \frac{dx}{r}, \quad G' = \int_s \frac{dy}{r}, \quad H' = \int_s \frac{dz}{r}.$$

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} X' &= U\left(\frac{\partial G'}{\partial z'} - \frac{\partial H'}{\partial y'}\right),\\ Y' &= U\left(\frac{\partial H'}{\partial x'} - \frac{\partial F'}{\partial z'}\right),\\ Z' &= U\left(\frac{\partial F'}{\partial y'} - \frac{\partial G'}{\partial x'}\right).\end{aligned}\right.$$

Le vecteur J′, dont les composantes sont F', G' et H', satisfait à la condition de continuité, car on a

$$(29)\qquad \frac{\partial F'}{\partial x'} + \frac{\partial G'}{\partial y'} + \frac{\partial H'}{\partial z'} = \int \frac{(x-x')\,dx + (y-y')\,dy + (z-z')\,dz}{r^3}.$$

Or, le dernier membre de cette équation est nul, car le numérateur de la fraction est la différentielle $r\,dr$ relative au déplacement du point P sur la courbe s quand le point P′ est invariable. Cette intégrale se réduit donc à $\int \frac{dr}{r^2}$; elle est nulle pour un circuit fermé.

257. Énergie relative de deux feuillets. — Si l'on se reporte au théorème de Stokes (29), on voit que le flux de force φ'

émis par le champ F′ dans un feuillet S′, dont le contour s' passe par le point P′, peut s'écrire

$$\varphi' = \mathrm{U}\int_{s'} (F'dx' + G'dy' + H'dz') = \mathrm{U}\int_{s'}\int_{s} \frac{dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz'}{r}.$$

Or, en désignant par ε l'angle des deux éléments ds et ds', on a la relation

$$dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz' = ds\,ds' \cos\varepsilon.$$

Le flux de force émis par le feuillet S, pour l'unité de puissance, dans le feuillet S′, est donc

$$(30) \qquad M = \iint \frac{ds\,ds' \cos\varepsilon}{r}.$$

Cette expresssion remarquable, due à M. Neumann, représente aussi le flux M' émis dans le feuillet S par le feuillet S′, pour l'unité de puissance magnétique, puisqu'elle est symétrique par rapport aux éléments ds et ds'; ce résultat a déjà été établi directement (254). La quantité M est évidemment une longueur, indépendante de tout choix d'unités.

258. Action élémentaire des contours. — L'énergie potentielle relative de deux feuillets

$$\mathrm{W} = -\mathrm{U}\mathrm{U}'M$$

permettra de calculer, par les dérivées partielles du coefficient M (69), les composantes rectangulaires de la force et du couple que produit l'action d'un des feuillets sur l'autre. Il est encore utile de considérer ce problème sous un autre point de vue.

L'action du feuillet S sur le feuillet S′ se déterminera aussi par l'ensemble des forces f' exercées sur les éléments ds' du contour. Enfin l'action du feuillet S sur l'élément ds' peut être remplacée par l'ensemble des actions de chacun des éléments ds sur ds', les composantes de cette force élémentaire étant soumises à la seule condition que leurs intégrales étendues au contour s reproduisent les composantes de f'.

Pour simplifier le calcul, nous supposerons que l'élément ds' est situé à l'origine O des coordonnées (fig. 55) et dirigé suivant l'axe des x. Le champ F produit en ce point par le feuillet S est déterminé par les équations (26).

Il est clair que les composantes f'_x, f'_y, et f'_z, parallèles aux axes, de l'action f' éprouvée par l'élément ds' sont

$$(31)\quad \begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = \mathrm{ZU}'\,ds' = \mathrm{UU}'\,ds' \displaystyle\int_s \frac{y\,dx - x\,dy}{r^3}, \\ f'_z = -\mathrm{YU}'\,ds' = \mathrm{UU}'\,ds' \displaystyle\int_s \frac{z\,dx - x\,dz}{r^3}. \end{cases}$$

Rien ne sera changé au résultat final si l'on suppose maintenant que l'élément ds agit sur ds' et que les composantes ψ'_x, ψ'_y, et ψ'_z de cette action ψ' sont représentées par les différentielles des expressions précédentes ; on peut donc écrire, en représentant la composante nulle parallèle à l'axe des x par la somme de deux termes égaux et de signes contraires,

$$(32)\quad \begin{cases} \psi'_x = \mathrm{UU}'\,ds'\,\dfrac{x\,dx - x\,dx}{r^3}, \\ \psi'_y = \mathrm{UU}'\,ds'\,\dfrac{y\,dx - x\,dy}{r^3}, \\ \psi'_z = \mathrm{UU}'\,ds'\,\dfrac{z\,dx - x\,dz}{r^3}. \end{cases}$$

Avant d'aller plus loin, on peut remarquer que, si ε désigne l'angle des deux éléments considérés, on a $dx = ds \cos\varepsilon$. Les premiers termes des seconds membres de ces équations sont donc les projections de la force $\dfrac{\mathrm{UU}'\,ds'\,dx}{r^2}$ ou $\dfrac{\mathrm{UU}'\,ds\,ds'}{r^2}\cos\varepsilon$, dirigée suivant la droite OP, c'est-à-dire d'une *attraction* de l'élément ds sur ds'.

Désignant par θ' l'angle de la droite OP avec l'élément ds', on a aussi $x = r\cos\theta'$. Si l'on remplace, dans les deuxièmes termes des mêmes équations, les projections dx, dy, dz de l'élément ds par $\dfrac{dx}{ds}ds$, $\dfrac{dy}{ds}ds$, $\dfrac{dz}{ds}ds$, on voit encore que ces

termes représentent les projections d'une force $-\frac{UU'ds\,ds'}{r^3}x$, ou $-\frac{UU'ds\,ds'}{r^2}\cos\theta'$, parallèle à cet élément.

De même, si θ est l'angle de la droite r avec l'élément ds, l'action de ds' sur ds se compose également d'une attraction $\frac{UU'ds\,ds'}{r^2}\cos\varepsilon$ et d'une force $\frac{UU'ds\,ds'}{r^2}\cos\theta$ parallèle à ds'.

Dans cet ordre d'idées, l'action ne serait pas égale à la réaction.

On peut d'ailleurs ajouter à chacun des seconds membres des équations (32) une différentielle exacte d'une fonction des coordonnés x, y et z, puisque l'intégrale de ces nouveaux termes étendue au contour s sera nulle. Il y a donc une infinité de manières équivalentes de représenter l'action élémentaire de deux feuillets.

Si X_1, Y_1 et Z_1 sont des fonctions quelconques des coordonnées, et qu'on représente par p le facteur constant $UU'ds'$, on peut donc remplacer les équations (32) par

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} \psi'_x &= p\,dX_1,\\ \psi'_y &= p\left(dY_1 - \frac{x^2}{r^3}\,d.\frac{y}{x}\right),\\ \psi'_z &= p\left(dZ_1 - \frac{x^2}{r^3}\,d.\frac{z}{x}\right). \end{aligned}\right.$$

Pour que l'action soit égale à la réaction, il faut que la force ψ' soit dirigée suivant la droite OP qui joint les deux éléments, ce qui donne les conditions

$$\frac{dX_1}{x} = \frac{1}{y}\left[dY_1 - \frac{x^2}{r^3}\,d.\frac{y}{x}\right] = \frac{1}{z}\left(dZ_1 - \frac{x^2}{r^3}\,d.\frac{z}{x}\right);$$

il en résulte

$$dY_1 = \frac{y}{x}\,dX_1 + \frac{x^2}{r^3}\,d.\frac{y}{x},$$

$$dZ_1 = \frac{z}{x}\,dX_1 + \frac{x^2}{r^3}\,d.\frac{z}{x}.$$

Pour que ces expressions soient des différentielles exactes, il faut évidemment que l'on ait

$$dX_1 = d.\frac{x^2}{r^3}.$$

L'action ψ des deux éléments, considérée comme positive dans le cas d'une attraction, devient donc

$$\psi = p\frac{r}{x}dX_1 = p\frac{r}{x}d.\frac{x^2}{r^3} = \frac{2p}{r^2}\left(dx - \frac{3}{2}\frac{x}{r}dr\right),$$

ou, en tenant compte des relations

$$dx = ds\cos\varepsilon, \qquad x = r\cos\theta', \qquad dr = ds\cos\theta,$$

$$(34) \qquad \psi = 2\frac{UU'ds\,ds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right).$$

L'action réciproque de deux feuillets magnétiques peut donc être considérée comme provenant d'attractions qui s'exercent suivant cette loi entre les éléments des contours.

Il est à remarquer que, les angles θ et θ' n'intervenant que par le produit de leurs cosinus, on peut, sans modifier le résultat, compter la direction r des deux éléments dans un sens ou dans l'autre.

La formule (34) a été établie par Ampère, comme on le verra plus loin, pour représenter l'action élémentaire des courants électriques.

CHAPITRE TROISIÈME

CAS PARTICULIERS

259. Aimants uniformes. — Il n'est possible de réaliser pratiquement qu'une catégorie très restreinte d'aimants uniformes, au moins avec les corps fortement magnétiques, à cause des réactions qui s'exercent entre les différents éléments des corps, mais on peut obtenir des effets équivalents avec les courants électriques et il importe de connaître leurs principales propriétés.

L'action magnétique d'un aimant uniforme étant équivalente à celle de deux couches de glissement (126), comme celle d'un diélectrique uniformément polarisé, on pourra la déterminer par le potentiel P d'une masse homogène de même volume dont la densité est égale à l'unité.

Dans tous les cas, le moment magnétique du corps est

$$m = v\mathrm{I}, \tag{1}$$

c'est-à-dire le produit du volume v par l'aimantation.

Le magnétisme est entièrement superficiel et la densité σ est en chaque point de la surface égale à la projection normale de l'aimantation

$$\sigma = \mathrm{I}\cos\theta. \tag{2}$$

Le champ produit par ces couches superficielles dépend de la forme du corps.

A l'intérieur le champ a toujours une composante parallèle à

l'aimantation et dirigée en sens contraire, puisque les lignes de force vont de la couche positive à la couche négative.

Pour que ce champ intérieur F_i soit uniforme, il faut que le corps soit terminé par une surface du second degré ; il est alors proportionnel à l'aimantation et peut se représenter par

$$F_i = -CI. \tag{3}$$

260. Sphère. — Ellipsoïdes. — Cylindres. — Pour la *sphère*, la valeur de la constante C est égale à $\frac{4\pi}{3}$ (127); si le rayon est a, on a donc

$$F_i = -\frac{4\pi I}{3}, \quad m = \frac{4\pi}{3} a^3 I = -F_i a^3,$$

et la distance des pôles est les deux tiers du diamètre.

L'induction magnétique est alors

$$F_1 = -\frac{4\pi I}{3} + 4\pi I = \frac{2}{3} 4\pi I = -2F_i.$$

Le flux d'induction qui traverse le grand cercle perpendiculaire à l'aimantation est

$$\varphi = \pi a^2 . \frac{2}{3} 4\pi I = \frac{2}{3}(2\pi a)^2 I.$$

En prenant l'axe des x parallèle à l'aimantation, le potentiel intérieur est

$$V_i = \frac{4\pi I}{3} x = -F_i x, \tag{4}$$

et le potentiel extérieur

$$V_e = I v \frac{x}{r^3} = \frac{4\pi I}{3} \frac{a^3}{r^3} x = -F_i \frac{a^3}{r^3} x. \tag{5}$$

Les composantes du champ extérieur parallèles aux axes,

à la distance r et dans une direction qui fait l'angle α avec l'axe des x, sont

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} X_e &= \frac{4\pi I}{3}\frac{a^3}{r^3}(3\cos^2\alpha - 1) = -F_i\frac{a^3}{r^3}(3\cos^2\alpha - 1), \\ Y_e &= 2\pi I\frac{a^3}{r^3}\sin 2\alpha = -\frac{3}{2}F_i\frac{a^3}{r^3}\sin 2\alpha. \end{aligned} \right.$$

Enfin les composantes normale et tangentielle à la surface de cette sphère de rayon r ont pour expressions

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} F_n &= 2\frac{4\pi I}{3}\frac{a^3}{r^3}\cos\alpha = -2F_i\frac{a^3}{r^3}\cos\alpha, \\ F_t &= \frac{4\pi I}{3}\cdot\frac{a^3}{r^3}\sin\alpha = -F_i\frac{a^3}{r^3}\sin\alpha. \end{aligned} \right.$$

Sur la sphère elle-même, le champ extérieur au pôle est égal à l'induction magnétique; à l'équateur, il est moitié moindre et égal au champ intérieur.

Pour un *ellipsoïde* dont les demi-axes sont a, b et c, parallèles aux axes de coordonnées, la valeur de P en un point de l'intérieur est (**132**)

$$P = P_0 - \frac{1}{2}(Lx^2 + My^2 + Nz^2).$$

Si les cosinus directeurs de l'aimantation sont α', β' et γ', les composantes principales A, B et C de l'aimantation donnent les relations

$$\frac{A}{\alpha'} = \frac{B}{\beta'} = \frac{C}{\gamma'} = I.$$

L'état de l'ellipsoïde peut être considéré comme produit par la superposition de ces trois aimantations A, B, et C, respectivement parallèles aux axes, et les composantes du champ intérieur parallèlement aux axes ont pour valeurs

$$X = -AL, \quad Y = -BM, \quad Z = -CN.$$

Le champ intérieur produit par ces trois aimantations est encore uniforme, puisqu'il est uniforme séparément pour chacune d'elles; comme ses cosinus directeurs α, β, γ, satisfont aux équations

$$\frac{X}{\alpha}=\frac{Y}{\beta}=\frac{Z}{\gamma}=F_i,$$

il en résulte

$$\frac{\alpha' L}{\alpha}=\frac{\beta' M}{\beta}=\frac{\gamma' N}{\gamma}=\sqrt{L^2\alpha'^2+M^2\beta'^2+N^2\gamma'^2}.$$

Les composantes de l'induction parallèles aux axes sont

$$(8)\qquad \begin{cases} X_1=(4\pi-L)A=(4\pi-L)\alpha' I,\\ Y_1=(4\pi-M)B=(4\pi-M)\beta' I,\\ Z_1=(4\pi-N)C=(4\pi-N)\gamma' I.\end{cases}$$

L'induction est aussi uniforme; ses cosinus directeurs α_1, β_1 et γ_1 sont proportionnels respectivement à $(4\pi-L)\alpha'$, $(4\pi-M)\beta'$ et $(4\pi-N)\gamma'$.

Enfin, les flux d'induction qui traversent les trois sections principales ont respectivement pour valeurs $\pi bc(4\pi-L)A$, $\pi ca(4\pi-M)B$ et $\pi ab(4\pi-N)C$.

Si l'aimantation est parallèle à l'un des axes, la distance des pôles est les deux tiers de la longueur de l'axe, comme pour la sphère.

Pour un *cylindre circulaire* de rayon a, aimanté transversalement, le champ intérieur (137) est égal à $-2\pi I$ et l'induction

$$(9)\qquad F_1=4\pi I-2\pi I=2\pi I.$$

Si la section est une ellipse de demi-axes a et b, on a

$$L=4\pi\frac{b}{a+b},\qquad M=4\pi\frac{a}{a+b}.$$

Le champ intérieur est encore uniforme dans le cas d'une aimantation transversale, pour laquelle $\gamma'=0$; les expressions

relatives à l'ellipsoïde donneront de même les valeurs des composantes du champ et de l'induction magnétique.

261. Feuillets magnétiques. — On a vu (246) que le potentiel d'un feuillet uniforme est égal au produit de sa puissance magnétique U par sa surface apparente ω au point considéré. Si le feuillet n'est pas uniforme, le potentiel a pour expression

$$V = \int U d\omega.$$

Le calcul du potentiel peut être ramené, par une méthode analogue à la précédente, au potentiel d'une couche magnétique homogène, sans avoir recours directement à l'évaluation des angles solides.

Le potentiel en un point M d'un élément de feuillet dS est égal à celui de deux couches magnétiques $\pm\sigma dS$, égales et de signes contraires, dont la distance normale dn satisfait à la condition $\sigma dn = U$.

En appelant p l'inverse de la distance de l'élément dS de surface au point M, le potentiel de l'élément de feuillet correspondant est

$$\sigma dS\left(-p+p+\frac{\partial p}{\partial n}dn\right) = \sigma dn\frac{\partial p}{\partial n}dS = U\frac{\partial p}{\partial n}dS.$$

Le potentiel du feuillet est donc

$$V = \int U\frac{\partial p}{\partial n}dS. \tag{10}$$

Le facteur p représente aussi le potentiel sur l'élément dS d'une masse égale à l'unité située au point M.

Le potentiel P au point M d'une couche uniforme, de densité égale à l'unité, répandue à la surface du feuillet est

$$P = \int p\, dS.$$

Si le feuillet est uniforme, on a donc

$$V = U\int\frac{\partial p}{\partial n}dS = U\frac{\partial P}{\partial n}. \tag{11}$$

Considérons, par exemple, un feuillet uniforme limité par un contour plan ; on ne change rien aux actions extérieures en le remplaçant par un feuillet plan de même puissance limité au même contour. Plaçons ce feuillet dans le plan des yz, la face positive du côté de l'axe des x. L'abscisse du point M étant x, on a évidemment

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad V = -\int U \frac{\partial p}{\partial x} dS;$$

il en résulte

$$V = -U \int \frac{\partial p}{\partial x} dS = -U \frac{\partial P}{\partial x}, \tag{12}$$

expression que l'on aurait pu obtenir par la considération des couches de glissement.

Pour un feuillet situé sur une sphère, on remplacera la normale n par le rayon a de la sphère. Le potentiel extérieur a pour expression

$$V = \pm \int U \frac{\partial p}{\partial a} dS, \tag{13}$$

les signes + ou — correspondant au cas où l'aimantation est dirigée vers l'extérieur ou l'intérieur de la surface.

Dans le cas de la sphère, le potentiel p est une fonction homogène du degré -1 du rayon a et de la distance r du point M au centre, ce qui donne la condition

$$a \frac{\partial p}{\partial a} + r \frac{\partial p}{\partial r} = -p,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial p}{\partial a} = -\frac{1}{a}\left(p + r \frac{\partial p}{\partial r}\right) = -\frac{1}{a} \frac{\partial (pr)}{\partial r}.$$

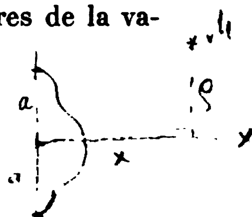
Le potentiel extérieur devient alors

$$V = -\int \frac{U}{a} \frac{\partial (pr)}{\partial r} dS = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial r} \int pr U \, dS. \tag{14}$$

262. Potentiel d'une couche circulaire. — Le potentiel d'un feuillet uniforme, limité par un contour circulaire, peut être calculé par le potentiel d'une couche circulaire plane ou d'une couche de forme quelconque, sphérique par exemple, limitée au même contour.

Considérons d'abord, d'une manière plus générale, une couche de révolution autour de l'axe des x. Pour un point M dont l'abscisse est x et qui est situé à une distance ρ de l'axe, le potentiel P est une fonction de x et de ρ. Si on développe ce potentiel suivant les puissances croissantes de la distance ρ^2 ou de son inverse, la série obtenue ne renfermera, par raison de symétrie, que des puissances paires de la variable. On peut donc écrire

$$(15)\qquad \left\{ \begin{aligned} P &= A_0 + A_2\rho^2 + A_4\rho^4 + \dots\dots, \\ P &= B_0 + \frac{B_2}{\rho^2} + \frac{B_4}{\rho^4} + \dots\dots, \end{aligned} \right.$$



les coefficients $A_0, A_2.., B_0, B_2..$ étant des fonctions de x.

Lorsqu'on prend x et ρ comme variables indépendantes, l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ devient

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} = 0.$$

Cette équation donne, pour la première série, une nouvelle série développée suivant les puissances croissantes de ρ, dans laquelle les coefficients de tous les termes de même ordre doivent être nuls séparément, d'où résulte la condition

$$\frac{\partial^2 A_{2n}}{\partial x^2} + (2n+2)^2 A_{2n+2} = 0.$$

On a ainsi successivement :

$$A_2 = -\frac{1}{2^2}\cdot\frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2},$$

$$A_4 = -\frac{1}{4^2}\cdot\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} = +\frac{1}{(2.4)^2}\cdot\frac{\partial^4 A_0}{\partial x^4},$$

$$A_6 = -\frac{1}{6^2}\cdot\frac{\partial^2 A_4}{\partial x^2} = -\frac{1}{(2.4.6)^2}\cdot\frac{\partial^6 A_0}{\partial x^6}, \text{ etc.....}$$

Il suffit donc de connaître la valeur du premier coefficient A_0, en fonction de x, pour en déduire tous les autres. Ce coefficient A_0 est donné par l'expression du potentiel sur l'axe, laquelle dépend de la forme de la couche et de la loi de distribution.

Le potentiel en dehors de l'axe est alors

$$P = A_0 - \frac{\rho^2}{2^2}\frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2} + \frac{\rho^4}{(2.4)^2}\cdot\frac{\partial^4 A_0}{\partial x^4} - \frac{\rho^6}{(2.4.6)^2}\cdot\frac{\partial^6 A_0}{\partial x^6} + \ldots\ldots$$

Pour la seconde série, l'équation de Laplace aurait donné la condition générale

$$\frac{\partial^2 B_{2n+2}}{\partial x^2} + (2n)^2 B_{2n} = 0,$$

mais cette fois un terme quelconque s'exprime en fonction de la dérivée seconde du terme suivant et la même méthode ne permettrait pas de déterminer les coefficients successifs.

Dans le cas d'une couche circulaire homogène, de densité égale à l'unité et de rayon a, le potentiel sur l'axe, à la distance x, de la couronne $2\pi r\,dr$ est

$$\frac{2\pi r\,dr}{\sqrt{r^2+x^2}} = 2\pi\, d.\sqrt{r^2+x^2}$$

Le potentiel A_0 de la couche entière est donc

$$A_0 = 2\pi\left(\sqrt{a^2+x^2} - x\right) = 2\pi(u - x),$$

en posant

$$u^2 = a^2 + x^2.$$

Le potentiel P en dehors de l'axe peut alors s'écrire

$$(16)\quad P = 2\pi\left[u - x - \frac{\rho^2}{2^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\rho^4}{(2.4)^2}\cdot\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\rho^6}{(2.4.6)^2}\cdot\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \cdots\right].$$

Les dérivées successives se calculeraient aisément par la valeur de u en fonction de x.

Lorsque la couche est circulaire, il est souvent plus avantageux de donner une autre forme au développement.

Désignons par r la distance du point M au centre du cercle, et par θ l'angle que fait la direction de cette droite avec l'axe. On peut encore exprimer le potentiel par l'une ou l'autre des deux séries

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{P} = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1\left(\frac{r}{a}\right) + \mathrm{A}_2\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \ldots\ldots,\\ &\mathrm{P} = \mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_1\left(\frac{a}{r}\right) + \mathrm{B}_2\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \ldots\ldots,\end{aligned}\right.$$

suivant que la distance r est plus petite ou plus grande que a, c'est-à-dire que le point M est placé à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère de rayon a.

Les coefficients sont des fonctions de l'angle θ et, comme les deux expressions doivent avoir la même valeur sur la sphère, ils satisfont à la condition

$$\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 + \ldots\ldots = \mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_1 + \ldots\ldots$$

Le potentiel P étant considéré comme une fonction des variables r et θ, l'équation de Laplace devient

$$r^2\frac{\partial^2\mathrm{P}}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial r} + \cot\!g\,\theta\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial\theta} + \frac{\partial^2\mathrm{P}}{\partial\theta^2} = 0.$$

On trouve ainsi que les coefficients A et B satisfont aux conditions générales

$$n(n+1)\mathrm{A}_n + \cot\!g\,\theta\frac{\partial\mathrm{A}_n}{\partial\theta} + \frac{\partial^2\mathrm{A}_n}{\partial\theta^2} = 0,$$

$$n(n-1)\mathrm{B}_n + \cot\!g\,\theta\frac{\partial\mathrm{B}_n}{\partial\theta} + \frac{\partial^2\mathrm{B}_n}{\partial\theta^2} = 0.$$

Le potentiel sur l'axe

$$\mathrm{P}_0 = 2\pi\left[\sqrt{a^2+x^2} - x\right],$$

développé en fonction des puissances croissantes de l'un ou l'autre des rapports $\frac{x}{a}$ ou $\frac{a}{x}$, donne les deux séries

$$P_0 = 2\pi a\left[1 - \frac{x}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{1.1}{2.4}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6}\left(\frac{x}{a}\right)^6 - \ldots\ldots\right],$$

$$P_0 = 2\pi a\left[\frac{1}{2}\frac{a}{x} - \frac{1.1}{2.4}\left(\frac{a}{x}\right)^3 + \frac{1.1.3}{2.4.6}\left(\frac{a}{x}\right)^5 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\left(\frac{a}{x}\right)^7 + \ldots\ldots\right].$$

Pour obtenir l'expression du potentiel en dehors de l'axe, en fonction de l'un des rapports $\frac{r}{a}$ ou $\frac{a}{r}$, il nous suffira de faire remarquer que, si la densité d'une couche sphérique est symétrique par rapport à un diamètre pris pour axe des x, le potentiel de cette couche en un point M ne dépend que de la distance r de ce point au centre O de la sphère et de l'angle θ que fait la droite OM avec l'axe.

D'après un théorème connu de Legendre, ce potentiel peut être exprimé par les formules générales

$$P = A_0 + A_1X_1\frac{r}{a} + A_2X_2\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \ldots\ldots,$$

$$P = B_0\frac{a}{r} + B_1X_1\left(\frac{a}{r}\right)^2 + B_2X_2\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \ldots\ldots,$$

dans lesquelles A_0, A_1..... B_0, B_1..... sont des coefficients constants, déterminés par la loi de distribution des densités sur la couche considérée, et X_1, X_2..... des fonctions de l'angle θ, désignées sous le nom de *polynômes de Legendre*, qui sont définies par le développement

$$[1 - 2x\cos\theta + x^2]^{-\frac{1}{2}} = 1 + X_1x + X_2x^2 + X_3x^3 + \ldots\ldots$$

Toutes ces fonctions se réduisent évidemment à l'unité lorsque l'angle θ est égal à zéro.

Comme nous connaissons le développement du potentiel d'une couche circulaire homogène pour un point de l'axe, c'est-à-dire lorsque l'angle θ est nul et r égal à x, les coefficients sont connus.

Il en résulte que, pour un point situé en dehors de l'axe,

le potentiel P peut être représenté par l'une des expressions

$$P = 2\pi a\left[1 - X_1\frac{r}{a} + \frac{1}{2}X_2\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1.1}{2.4}X_4\left(\frac{r}{a}\right)^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6}X_6\left(\frac{r}{a}\right)^6 - ..\right],$$

$$P = 2\pi a\left[\frac{1}{2}\frac{a}{r} - \frac{1.1}{2.4}X_2\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{1.1.3}{2.4.6}X_4\left(\frac{a}{r}\right)^5 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}X_6\left(\frac{a}{r}\right)^7 + ..\right].$$

263. Feuillet circulaire uniforme. — Le potentiel d'un feuillet circulaire uniforme s'obtiendra maintenant par l'expression

$$V = -U\frac{\partial P}{\partial x}.$$

On trouve ainsi, avec la première forme (16),

$$V = 2\pi U\left[1 - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\rho^2}{2^2}\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\rho^4}{(2.4)^2}\cdot\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \ldots\ldots\right];$$

les premiers termes du développement sont

$$V = 2\pi U\left\{1 - \frac{x}{u}\left[1 + \frac{3}{2^2}\frac{a^2}{u^2}\cdot\left(\frac{\rho}{u}\right)^2 - \frac{3.5}{(2.4)^2}\cdot\frac{4x^2 - 3a^2}{u^2}\cdot\left(\frac{\rho}{u}\right)^4 + ..\right]\right\},$$

et la série est convergente toutes les fois que $\rho < u$.

La seconde forme de développement (17) donnerait, en prenant l'expression

$$V = U\frac{\partial P}{\partial a},$$

$$V = 2\pi U\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 X_2 + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{r}{a}\right)^4 X_4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{r}{a}\right)^6 X_6 + \ldots\ldots\right],$$

$$V = 2\pi U\frac{a}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 X_2 + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{a}{r}\right)^4 X_4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{a}{r}\right)^6 X_6 + \ldots\ldots\right].$$

264. Potentiel d'une couche sphérique. — Considérons enfin une couche sphérique quelconque de rayon a. Le potentiel en un point extérieur M à la distance r du centre peut encore être exprimé par la série

$$(18)\qquad V = a\left[A_0\left(\frac{a}{r}\right) + A_1\left(\frac{a}{r}\right)^2 + A_2\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \ldots\ldots\right],$$

dans laquelle les coefficients dépendent de la loi de distribution et de la direction de la droite r.

Soit u l'angle de la droite r avec l'axe des z, ou le complément de la latitude du point M, l l'angle du plan rz avec le plan des yz, c'est-à-dire la longitude ; les coordonnées de ce point M sont alors

$$(19)\qquad \begin{cases} z = r\cos u, \\ y = r\sin u\cos l, \\ x = r\sin u \sin l. \end{cases}$$

Quand on prend pour variables indépendantes les quantités r, u et l, l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ se traduit par

$$r\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \operatorname{cotg} u \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{1}{\sin^2 u}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial l^2} = 0;$$

il en résulte, pour les coefficients, la condition

$$n(n+1)A_n + \frac{\partial^2 A_n}{\partial u^2} + \operatorname{cotg} u\frac{\partial A_n}{\partial u} + \frac{1}{\sin^2 u}\cdot\frac{\partial^2 A_n}{\partial l^2} = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation a été aussi donnée par Laplace. Si l'on pose

$$A_{nm} = \Big[\cos^{n-m} u - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-m-2} u$$
$$+ \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2.4.(2n-1)(2n-2)}\cos^{n-m-4} u - \ldots\Big]\sin^m u,$$

le coefficient A_n, exprimé au moyen des nouveaux symboles, se compose de $2n+1$ termes développés suivant les sinus et les cosinus des multiples de l'angle l et a pour valeur

$$A_n = g_{n.0}A_{n.0} + (g_{n.1}\cos l + h_{n.1}\sin l)A_{n.1}$$
$$+ (g_{n.2}\cos 2l + h_{n.2}\sin 2l)A_{n.2} + \cdots + (g_{n.n}\cos nl + h_{n.n}\sin nl)A_{n.n}.$$

Les facteurs désignés par les lettres g et h, avec différents indices, sont des coefficients numériques à déterminer dans chaque cas particulier.

265. Sphère aimantée. — L'action extérieure d'une sphère aimantée d'une manière quelconque est équivalente à celle de deux couches de masses égales et de signes contraires distribuées à la surface suivant une certaine loi.

Le coefficient A_0 est nul. En effet, à une grande distance, le potentiel devient simplement égal au quotient de la masse totale par la distance. Le produit $A_0 a^2$, qui forme le numérateur du premier terme dans l'expression (18) du potentiel, représente dans ce cas la masse totale, et on sait que dans tout aimant la masse totale est nulle.

Le coefficient du terme suivant a pour valeur, d'après l'expression générale de A_n,

$$A_1 = g_{1.0} \cos u + (g_{1.1} \cos l + h_{1.1} \sin l) \sin u,$$

ou, en tenant compte des équations (19),

$$A_1 = g_{1.0} \frac{z}{r} + g_{1.1} \frac{y}{r} + h_{1.1} \frac{x}{r}.$$

Ce terme devient prédominant à une grande distance, et le potentiel se réduit alors à

$$V = A_1 \frac{a^3}{r^2} = \frac{a^3 g_{1.0}}{r^2} \frac{z}{r} + \frac{a^3 g_{1.1}}{r^2} \frac{y}{r} + \frac{a^3 h_{1.1}}{r^2} \frac{x}{r}.$$

Il en résulte que les trois produits $a^3 g_{0.1}, a^3 g_{1.1}, a^3 h_{1.1}$ représentent respectivement les moments magnétiques de la sphère par rapport aux axes des z, des y et des x. En désignant par $a^3 K$ le moment magnétique résultant et par α, β, γ ses cosinus directeurs, on a

$$K = \frac{h_{1.1}}{\alpha} = \frac{g_{1.1}}{\beta} = \frac{g_{1.0}}{\gamma} = \sqrt{h_{1.1}^2 + g_{1.1}^2 + g_{1.0}^2}.$$

266. Aimants solénoïdaux. — Le potentiel d'un aimant solénoïdal (245) ne dépend que des couches magnétiques formées à la surface par les extrémités des solénoïdes élémentaires qui le constituent.

Si tous ces solénoïdes sont fermés, le potentiel de l'aimant est nul partout, et la force magnétique nulle. Dans ce cas,

l'induction se réduit en chaque point à $4\pi I$ et elle est parallèle à l'aimantation.

Supposons qu'un aimant solénoïdal soit limité par une surface *canal*, l'aimantation étant en chaque point normale à la section droite du canal. Le flux d'induction qui traverse un élément dS de la section droite est égal à $4\pi I dS$ et le flux total d'induction a pour valeur

$$\varphi = 4\pi \int I\, dS.$$

Chacun des filets solénoïdaux forme une courbe fermée, de longueur l, normale en chaque point à la section droite du canal. Si la structure de l'aimant est telle, comme nous en verrons plus loin des exemples, que le produit Il de l'aimantation d'un filet par sa longueur soit une quantité constante A, le flux d'induction pourra s'écrire

$$\varphi = 4\pi \int I\, dS = 4\pi A \int \frac{dS}{l}. \tag{20}$$

Considérons un *anneau* de révolution de rayon moyen R; en appelant y la corde de la section située à une distance $R + x$ de l'axe, on a

$$\varphi = 4\pi A \int \frac{dS}{2\pi(R+x)} = 2A \int \frac{y\, dx}{R+x}.$$

Pour un *tore*, dont la section est de rayon a, on obtient, en posant $x = a\cos\theta$,

$$\int \frac{y\,dx}{R+x} = 2 \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{R+x}\, dx = 2 \int_0^\pi \frac{a^2 \sin^2\theta}{R + a\cos\theta}\, d\theta$$
$$= 2 \int_0^\pi \left(R - a\cos\theta - \frac{R^2 - a^2}{R + a\cos\theta}\right) d\theta.$$

L'intégrale générale du dernier terme est

$$4\sqrt{R^2 - a^2} \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{R-a}{R+a}} \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\right),$$

ce qui donne finalement

$$\varphi = 2\pi A\left(R - \sqrt{R^2 - a^2}\right). \tag{21}$$

Pour un anneau à *section rectangulaire*, dont l'un des côtés parallèle à l'axe est $2b$ et le côté perpendiculaire $2a$,

$$\int \frac{y}{R+x}\,dx = 2b \int \frac{dx}{R+x} = 2b\,\mathcal{L}.\frac{R+a}{R-a},$$

$$\varphi = 4Ab\,\mathcal{L}.\frac{R+a}{R-a}. \tag{22}$$

267. Cylindre. — Un cylindre aimanté uniformément dans le sens de l'axe et terminé par des sections droites équivaut à deux couches magnétiques de densités $\pm I$, égales et de signes contraires, qui recouvriraient les deux bases A et B. Le potentiel d'un pareil aimant en un point quelconque est donc égal à la somme des potentiels V_a et V_b des deux couches terminales.

Si la section droite du cylindre est circulaire, les potentiels V_a et V_b peuvent être exprimés par les formules trouvées précédemment (262).

Sur un point M situé sur l'axe à l'extérieur et du côté de la face positive A, le champ magnétique (88) est, en désignant par α et β les angles sous lesquels on voit de ce point M les rayons des deux bases,

$$F = 2\pi I(1 - \cos\alpha) - 2\pi I(1 - \cos\beta) = 2\pi I)\cos\beta - \cos\alpha);$$

il est dirigé dans le sens de l'aimantation.

Pour un point intérieur, les actions des deux bases sont de même signe et dirigées en sens contraire de l'aimantation, ce qui donne

$$F_i = -4\pi I + 2\pi I(\cos\alpha + \cos\beta).$$

Enfin, l'induction sur l'axe à l'intérieur est

$$F_1 = 4\pi I + F_i = 2\pi I(\cos\alpha + \cos\beta);$$

elle est parallèle à l'aimantation et varie d'une manière très

lente tant que le point considéré est situé à une distance notable des bases.

Si l'on désigne par $2l$ la longueur du cylindre et par a son rayon, l'induction F_0 au centre du cylindre a pour valeur

$$F_0 = 4\pi I \cos\alpha_0 = 4\pi I \frac{l}{\sqrt{a^2+l^2}}.$$

Lorsque la longueur du cylindre est très grande par rapport à son diamètre, on peut prendre l'expression approchée

$$F_0 = 4\pi I \left(1 - \frac{a^2}{2l^2}\right).$$

L'induction est alors sensiblement la même dans toute l'étendue de la section médiane, et le flux total d'induction φ_0 qui le traverse a pour expression

$$\varphi_0 = \pi a^2 F_0 = (2\pi a)^2 I \left(1 - \frac{a^2}{2l^2}\right).$$

Si le cylindre est assez long pour que le dernier facteur ne diffère pas sensiblement de l'unité, le flux d'induction dans la section médiane est égal à $(2\pi a)^2 I$. Ce flux est donc proportionnel au carré du contour ; il a encore sensiblement la même valeur dans une section quelconque suffisamment éloignée des extrémités.

CHAPITRE QUATRIÈME

AIMANTATION INDUITE

268. Caractères généraux. — Il n'existe probablement aucun corps qui placé dans un champ magnétique n'éprouve l'effet de l'induction, c'est-à-dire ne devienne lui-même un aimant, au moins d'une manière temporaire.

Dans les milieux isotropes l'axe d'aimantation induite coïncide en chaque point avec la direction du champ magnétique. Pour certains corps, l'aimantation induite est de même sens que le champ; ce sont les corps que nous avons appelés *paramagnétiques* ou simplement *magnétiques*. Pour les autres, le sens de l'aimantation est opposé à celui du champ; ce sont les corps *diamagnétiques*. En présence d'un pôle magnétique les corps de la première classe prennent dans la partie la plus voisine un pôle de signe contraire, ceux de la seconde un pôle de même signe.

Nous admettrons qu'en chaque point d'un milieu isotrope, l'aimantation est proportionnelle au champ résultant de toutes les forces magnétiques qui s'exercent en ce point. Ces forces dépendent, non seulement du champ primitif, mais aussi du magnétisme développé par induction sur le corps lui-même. En désignant par F le champ résultant, auquel on donne quelquefois le nom de *force magnétisante*, et par I l'intensité d'aimantation, on peut écrire

$$\text{(1)} \qquad I = kF.$$

Le facteur k, qui exprime le rapport de l'aimantation à la force magnétisante, est le *coefficient d'aimantation induite*;

ce coefficient est positif ou négatif suivant que le corps est magnétique ou diamagnétique.

L'hypothèse de la proportionnalité de l'aimantation à la force magnétisante est justifiée par l'expérience toutes les fois que le coefficient k a une valeur très faible. Cette condition est réalisée pour la plupart des corps magnétiques, sauf le fer, le nikel et le cobalt. Quand il s'agit du fer ou du nikel, pour lesquels le coefficient k peut atteindre des valeurs très grandes, telles que 30 ou 40, la proportionnalité existe encore tant que la force magnétisante F reste assez faible, quand on fait usage, par exemple, du champ terrestre. Il en est de même avec le fer impur, le fer écroui, la fonte et l'acier plus ou moins trempé, dont le coefficient d'aimantation est notablement moindre.

Le coefficient k est toujours très petit pour les corps diamagnétiques; il atteint à peine $\frac{1}{70\,000}$ pour le bismuth, qui est le corps le plus actif de cette seconde classe.

Si la proportionnalité de l'aimantation à la force magnétisante n'existe pas, on doit considérer le coefficient k comme étant lui-même une fonction de l'aimantation. Le phénomène est même plus complexe en ce sens que l'aimantation ne dépend pas uniquement de la valeur actuelle des forces magnétisantes mais aussi de leur état antérieur.

Nous examinerons d'abord le cas où ce coefficient k est constant, avec la même valeur dans toutes les directions, c'est-à-dire celui des milieux isotropes dont l'aimantation induite est assez faible.

269. Aimantation proportionnelle au champ. — Si l'aimantation est en chaque point proportionnelle au champ résultant, le problème est le même que celui qui a été traité précédemment (90) pour la polarisation des diélectriques.

Considérons un corps magnétique placé dans l'air, ou mieux dans le vide, et soumis à l'action d'un champ extérieur. Soit V le potentiel du champ extérieur et Ω celui qui est produit par les masses induites; le potentiel résultant U aura pour valeur

$$U = V + \Omega. \tag{2}$$

Les composantes A, B et C de l'aimantation sont respectivement proportionnelles aux composantes X, Y et Z du champ résultant et l'on a

$$(3) \qquad \begin{cases} A = kX = -k\dfrac{\partial U}{\partial x}, \\ B = kY = -k\dfrac{\partial U}{\partial y}, \\ C = kZ = -k\dfrac{\partial U}{\partial z}. \end{cases}$$

Ajoutant ces équations membre à membre, après les avoir multipliées respectivement par dx, dy et dz, il vient

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = -k\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = -k\,dU.$$

La valeur de k étant supposée constante dans toute l'étendue du milieu, le premier membre de l'équation est la différentielle exacte d'une fonction $-kU$ des coordonnées; l'aimantation est donc *lamellaire* (247).

On a aussi

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = -k\Delta U,$$

d'où résulte

$$\rho(1 + 4\pi k) = 0, \quad \text{ou} \quad \rho = 0$$

Le magnétisme induit est entièrement *superficiel* et l'aimantation est aussi *solénoïdale* (245). Cette dernière conclusion suppose que le facteur $1 + 4\pi k$ diffère de zéro, mais ce facteur ne peut jamais s'annuler, même lorsque $k < 0$, à cause de la faible valeur du coefficient d'aimantation pour les corps diamagnétiques.

La densité superficielle σ de la couche induite est la projection normale de l'aimantation. Si F_n est la composante normale de la force magnétisante comptée vers l'extérieur de la surface, on a donc

$$\sigma = kF_n.$$

Enfin, si l'on pose $\mu = 1 + 4\pi k$, on peut considérer l'énergie du système comme localisée dans les milieux magnétiques (95) et l'énergie par unité de volume est

$$w = \frac{1}{8\pi}\mu F^2.$$

270. Condition de continuité. — Le potentiel Ω dû aux masses induites, c'est-à-dire à la couche superficielle, est une fonction finie et continue, qui satisfait à l'équation de Laplace aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de la surface; elle a des expressions différentes dans les deux cas, mais les valeurs sont les mêmes pour deux points infiniment voisins situés de part et d'autre de la surface.

L'aimantation étant parallèle à la force magnétisante, l'induction magnétique devient, dans le cas actuel,

$$F_1 = F + 4\pi I = F + 4\pi k F = F(1 + 4\pi k) = \mu F,$$

Si l'on désigne par F_n et F'_n les composantes du champ normales à la surface du corps, pour deux points infiniment voisins situés de part et d'autre de cette surface, l'un intérieur et l'autre extérieur, le principe de la conservation du flux d'induction donne la relation

$$(4) \qquad \mu F_n = F'_n.$$

Le rapport des composantes normales du champ est constant, comme pour les diélectriques.

Le coefficient μ est l'analogue du pouvoir inducteur spécifique du diélectrique; on pourrait l'appeler *coefficient d'induction magnétique*.

En désignant par n et n' les normales à la surface comptées à partir de la surface vers l'intérieur ou l'extérieur, par Ω et Ω' les potentiels des couches induites de part et d'autre de la surface, l'équation (4) peut s'écrire

$$(5) \qquad \mu\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial \Omega}{\partial n}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial n'} + \frac{\partial \Omega'}{\partial n'}\right) = 0.$$

Si l'on se propose de déterminer l'aimantation d'un corps placé dans un champ magnétique et limité par une surface S,

le problème revient donc à trouver deux fonctions Ω et Ω' qui satisfassent aux conditions suivantes :

1° La fonction Ω est finie et continue dans l'intérieur de la surface et satisfait à l'équation de Laplace $\Delta\Omega = 0$.

2° La fonction Ω' est finie et continue à l'extérieur, nulle à l'infini et satisfait également à l'équation de Laplace.

3° Les fonctions Ω et Ω' sont égales entre elles sur la surface et leurs dérivées par rapport à la normale satisfont alors à l'équation de continuité (5).

271. Cas de deux milieux différents. — Supposons que le corps limité par la surface S, au lieu d'être placé dans le vide, soit entouré d'un milieu magnétique dont le coefficient d'induction est μ'; le théorème de la conservation du flux d'induction donne encore $\mu F_n = \mu' F'_n$, c'est-à-dire

$$(6) \qquad \mu\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial \Omega}{\partial n}\right) + \mu'\left(\frac{\partial V}{\partial n'} + \frac{\partial \Omega'}{\partial n'}\right) = 0.$$

Les fonctions Ω et Ω', qui déterminent la couche superficielle, sont définies par les mêmes conditions que précédemment, avec cette seule différence que le coefficient d'induction μ du corps est remplacé par le rapport de ce coefficient à celui du milieu magnétique extérieur.

La densité superficielle du magnétisme est la somme algébrique des composantes normales de l'aimantation dans les deux milieux, ce qui donne

$$\sigma = kF_n - k'F'_n = \left(k - k'\frac{\mu}{\mu'}\right)F_n = \frac{k - k'}{\mu'}F_n.$$

En posant

$$k_1 = \frac{k - k'}{\mu'}, \quad \mu_1 = 1 + 4\pi k_1 = \frac{\mu}{\mu'},$$

on peut écrire

$$\sigma = k_1 F_n, \qquad 4\pi\sigma = (\mu_1 - 1)F_n.$$

Cette couche superficielle est celle qui détermine le mouvement du corps dans le milieu. Elle est la même que si le

milieu extérieur était supprimé, ou plus exactement remplacé par le vide, et le coefficient d'induction du corps remplacé par une autre valeur μ_1, ou le coefficient d'aimantation k par une valeur différente k_1. La densité σ est la composante normale de l'aimantation *apparente* du corps.

La discussion de ce problème donne lieu à quelques conséquences analogues à celles du principe d'Archimède appliqué aux corps plongés dans les fluides.

On peut, en effet, considérer k_1 comme le coefficient relatif d'aimantation du corps par rapport au milieu qui l'entoure, k et k' étant les coefficients des deux milieux par rapport au vide. Si k est plus grand que k', la valeur de k_1 est positive et l'aimantation apparente du corps est positive. Si l'on a, au contraire, $k < k'$, la valeur de k_1 est négative et le corps paraîtra diamagnétique. Dans le cas où les coefficients k et k' sont égaux, l'aimantation du corps paraît nulle, ce qui doit avoir lieu, puisqu'il est situé dans un milieu identique à lui-même et que le magnétisme induit est superficiel.

Il en résulterait cette conséquence qu'il n'existe pas une opposition réelle de propriétés entre les corps magnétiques et les corps diamagnétiques, et que la différence des effets est due à la nature plus ou moins magnétique du milieu extérieur. Les corps diamagnétiques conservant leurs propriétés caractéristiques dans le vide le plus parfait qu'on puisse produire, il est nécessaire, dans cette manière de voir, que le vide soit un milieu magnétique et que son coefficient d'aimantation soit plus grand en valeur absolue que celui de tous les corps diamagnétiques connus.

Si, au contraire, on veut admettre la valeur zéro pour le coefficient d'aimantation du vide, il faut donner une valeur négative à ceux de tous les corps diamagnétiques. Dans ce cas, le coefficient d'induction μ est plus grand que l'unité pour les corps magnétiques et plus petit que l'unité pour les corps diamagnétiques.

Remarquons cependant que l'influence d'un milieu magnétique ne pourrait en toute rigueur être comparée à celle d'un fluide, et permettre d'appliquer le principe d'Archimède, que si l'on avait $k_1 = k - k'$. Il est vrai que cette relation est sensiblement vérifiée pour tous les corps diamagnétiques

et les corps très peu magnétiques, puisque la valeur de μ' est alors voisine de l'unité; mais la relation serait fort éloignée de la vérité si le milieu ambiant avait un coefficient d'aimantation notable et surtout si ses propriétés magnétiques étaient comparables à celles du fer doux.

272. Susceptibilité et perméabilité magnétiques. — Les phénomènes d'aimantation induite peuvent ainsi s'exprimer à l'aide de deux coefficients.

Le *coefficient d'aimantation k* exprime le rapport de l'intensité de l'aimantation à la force magnétique, ou, en d'autres termes, l'intensité d'aimantation dans un champ égal à l'unité. Ce coefficient porte quelquefois le nom de Neumann, qui l'a employé le premier; Lord Kelvin l'appelle *coefficient de susceptibilité magnétique*.

Le *coefficient d'induction magnétique* μ est égal au rapport des composantes normales du champ à l'extérieur et à l'intérieur du milieu considéré; Lord Kelvin l'appelle *coefficient de perméabilité magnétique*. Voici en quels termes il justifie le choix de cette expression :

« Le pouvoir conducteur d'un corps solide pour la chaleur, ou, plus brièvement, sa conductibilité calorifique a son analogue : en électricité statique, dans le pouvoir inducteur spécifique d'un diélectrique; en magnétisme, dans ce que Faraday appelait le pouvoir conducteur du milieu pour les lignes de force, et qu'on désigne souvent par le nom de coefficient d'induction magnétique; en hydrodynamique, dans la propriété spéciale que présentent les corps poreux et qu'on appelle *perméabilité*, laquelle est mesurée, toutes choses égales d'ailleurs, par le flux de liquide au travers de l'unité de surface. Le mot de *perméabilité* semble s'adapter également à la qualité qu'on envisage dans les différents cas : ainsi, on peut employer l'expression de perméabilité calorifique comme synonyme de conductibilité; de perméabilité pour les lignes de force électriques, comme synonyme de pouvoir inducteur spécifique; de perméabilité magnétique, comme synonyme de pouvoir conducteur pour les lignes de force magnétiques. » (Sir W. Thomson, *Reprint of papers*, § 628.)

273. Aimantation uniforme. — Si la surface d'un corps est telle qu'une aimantation uniforme dans une certaine direction

produise un champ intérieur également uniforme, et qu'on le place dans un champ uniforme F parallèle à cette direction, il prendra une aimantation uniforme, puisque la force magnétisante aura la même valeur en tous les points, et cela sans qu'il soit nécessaire de faire aucune restriction sur la grandeur du coefficient k. L'action intérieure F_i des couches induites étant alors représentée par $-CI$ (259), le champ intérieur résultant est $F+F_i$ et l'on aura

$$I = k(F+F_i) = k(F-CI),$$

$$I = \frac{k}{1+kC}F = \frac{\mu-1}{4\pi+(\mu-1)C}F,$$

$$F+F_i = \frac{I}{k} = \frac{1}{1+kC}F.$$

Lorsque le coefficient k est très petit, c'est-à-dire pour tous les corps diamagnétiques et les corps peu magnétiques, il reste sensiblement

$$I = kF.$$

L'aimantation induite dans un champ uniforme est alors uniforme et indépendante de la surface du corps.

L'aimantation induite est d'ailleurs soumise aux mêmes lois que la polarisation des diélectriques et tous les résultats obtenus au Ch. VII sont immédiatement applicables.

274. Sphère. — Le champ intérieur produit par une aimantation uniforme ne peut être lui-même uniforme que si le corps est terminé par une surface du second degré.

Pour une sphère (260), on a $C = \frac{4\pi}{3}$. L'aimantation est

$$I = \frac{\mu-1}{4\pi+(\mu-1)\frac{4\pi}{3}}F = \frac{3}{4\pi}\cdot\frac{\mu-1}{\mu+2}F,$$

le champ intérieur

$$F+F_i = \frac{1}{1+\frac{4\pi}{3}k}F = \frac{3}{\mu+2}F,$$

et l'induction

$$F_1 = \frac{3\mu}{\mu + 2} F.$$

La valeur de $F + F_i$ représente aussi le champ extérieur X_2 résultant au voisinage de l'équateur; celle de F_1 est le champ X_1 au voisinage du pôle; le rapport de la seconde à la première est égal à μ.

Si le rayon est a, le moment magnétique de la sphère est

$$M = \frac{4}{3}\pi a^3 I = a^3 \frac{\mu - 1}{\mu + 2} F.$$

Dans le cas où la perméabilité μ est très grande, il reste sensiblement

$$X_2 = \frac{3}{\mu} F, \quad X_1 = 3F, \quad M = a^3 F.$$

Le champ résultant est très faible au voisinage de l'équateur et triple du champ extérieur au voisinage du pôle.

Si la valeur de μ est voisine de l'unité et qu'on pose $\mu = 1 + \varepsilon$, on obtient de même

$$X_1 = \frac{3(1 + \varepsilon)}{3 + \varepsilon} F = \left(1 + \frac{2\varepsilon}{3}\right) F,$$

$$X_2 = \frac{3}{3 + \varepsilon} F = \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) F.$$

275. Hypothèse de Poisson. — Si l'on imagine, avec Poisson, qu'un corps magnétique soit constitué par un ensemble de petites sphères d'une perméabilité magnétique très grande ($\mu = \infty$), disséminées dans un milieu non magnétique, le rapport du volume occupé par toutes les sphères au volume total a pour expression (**128**)

$$h = \frac{\mu - 1}{\mu + 2}.$$

En adoptant la valeur $\mu = 500$ pour le fer, il vient

$$h = 1 - \frac{3}{500} = 1 - \frac{1}{167}.$$

Or, la valeur maximum que puisse atteindre le rapport h avec des sphères égales en contact est environ $\frac{3}{4}$ ou $1-\frac{1}{4}$. Il faudrait donc supposer, dans le cas actuel, que les sphères ont des volumes inégaux et que les intervalles des plus grosses sont remplis par des sphères d'un diamètre moindre. Seulement il paraît alors bien difficile que les sphères voisines ne réagissent pas les unes sur les autres et que l'aimantation de chacune d'elles, comme le suppose Poisson, puisse être déterminée uniquement par le champ extérieur.

276. Ellipsoïde. — Pour un ellipsoïde aimanté uniformément suivant une direction quelconque, les composantes du champ intérieur parallèles aux axes sont égales respectivement à $-AL$, $-BM$ et $-CN$.

Dans un champ uniforme, dont les cosinus directeurs par rapport aux axes de l'ellipsoïde sont α, β et γ, les composantes de l'aimantation seront

$$A = \frac{k}{1+kL} F\alpha,$$

$$B = \frac{k}{1+kM} F\beta,$$

$$C = \frac{k}{1+kN} F\gamma.$$

Ces équations supposent que l'aimantation est assez faible pour qu'il soit permis de superposer les effets produits dans des directions différentes.

Si l'un des axes de l'ellipsoïde est parallèle à la direction du champ, l'axe des x par exemple, on a

$$I = \frac{k}{1+kL} F.$$

Quelque grande que soit alors la valeur du coefficient k, l'aimantation reste uniforme.

Les valeurs données précédemment (**53**) pour les coefficients L, M et N permettront de résoudre complètement le problème dans le cas des ellipsoïdes de révolution.

Pour un cylindre circulaire indéfini perpendiculaire à la direction du champ, on a $C = 2\pi$ et l'aimantation est

$$I = \frac{k}{1 + 2\pi k} F.$$

277. Problème de Barlow. — Le cas considéré précédemment (**135**) d'un milieu diélectrique compris entre les surfaces de deux sphères concentriques, et situé dans un champ uniforme, correspond à celui d'un milieu magnétique de forme analógue placé dans les mêmes conditions. Cette question est connue sous le nom de *problème de Barlow* (¹).

Il se produit alors deux couches magnétiques, distribuées l'une M' sur la surface interne et l'autre M'' sur la surface externe du volume considéré.

Les actions intérieures F' et F'' de ces deux couches sont déterminées par les équations

$$\frac{F'}{3} = \frac{-F''}{3 + 2(1-\beta)(\mu - 1)} = \frac{(\mu - 1)F}{9\mu + 2(1-\beta)(\mu - 1)^2},$$

dans lesquelles β désigne le rapport des cubes des rayons a' et a'' des surfaces intérieure et extérieure de la couche.

Le champ résultant est uniforme dans l'intérieur de la cavité où il a pour valeur

$$F + F' + F'' = \frac{F}{1 + \frac{2(\mu - 1)^2}{9\mu}(1 - \beta)}.$$

mais il n'est pas uniforme dans l'épaisseur de la substance magnétique ni à l'extérieur.

Sur une sphère extérieure de rayon r, dans la direction qui fait l'angle α avec le champ, les composantes tangentielle et normale de l'action des couches induites sont (**116**)

$$F_n = -\frac{2}{r^3}(a'^3 F' + a''^3 F'')\cos\alpha = -2\left(\frac{a''}{r}\right)^3 (\beta F' + F'')\cos\alpha,$$

$$F_t = -\frac{1}{r^3}(a'^3 F' + a''^3 F'')\sin\alpha = -\left(\frac{a''}{3}\right)^3 (\beta F' + F'')\sin\alpha.$$

(¹) Barlow, *Edinb. Ph. Journ.* T. I, p. 344; 1819.

Les valeurs précédentes de F′ et F″ donnent

$$\beta F' + F'' = -\frac{(\mu - 1)(2\mu + 1)(1 - \beta)}{9\mu + 2(1 - \beta)(\mu - 1)^2} F = -KF.$$

Dans les directions des pôles et de l'équateur, ces actions sont parallèles au champ et ont pour valeur

$$F_p = 2\left(\frac{a''}{r}\right)^2 KF, \quad F_e = -\left(\frac{a''}{r}\right)^3 KF.$$

La valeur du coefficient K peut s'écrire

$$K = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \cdot \frac{1 - \beta}{1 - 2\beta \dfrac{(\mu - 1)^2}{(\mu + 2)(2\mu + 1)}}.$$

Pour une sphère pleine, $\beta = 0$, le facteur K se réduit à

$$K_0 = \frac{\mu - 1}{\mu + 2}.$$

Le rapport des actions exercées au même point par une sphère pleine et par une sphère creuse de même diamètre extérieur est donc

$$\frac{K_0}{K} = \frac{1}{1 - \beta}\left[1 - 2\beta \frac{(\mu - 1)^2}{(\mu + 2)(2\mu + 1)}\right] = 1 + \frac{\beta}{1 - \beta} \frac{9\mu}{(\mu + 2)(2\mu + 1)}.$$

Si l'on applique ces formules au fer, en prenant $\mu = 500$, le champ intérieur se trouve réduit à la fraction $\frac{1}{1 + 111(1 - \beta)}$. En faisant $\beta = 0,5$ ou $a' = 0,794\, a''$, auquel cas l'épaisseur de la couche est le cinquième du rayon, le champ intérieur n'est plus que $\frac{1}{57}$ du champ extérieur. Une enveloppe de fer d'épaisseur notable constitue donc une protection presque complète contre l'action des masses magnétiques extérieures.

Pour cette valeur de la perméabilité, le rapport des actions des sphères pleine et creuse est

$$\frac{K_0}{K} = 1 + \frac{1}{112} \cdot \frac{\beta}{1-\beta}.$$

Tant que l'épaisseur de la couche sphérique est plus grande que le cinquième du rayon, l'action magnétique à l'extérieur ne diffère pas de 0,01 de celle que donnerait une sphère pleine de même diamètre.

Les expériences anciennes de Barlow sont conformes aux résultats de ce calcul. Avec des sphères de 10 pouces de diamètre extérieur, il n'a pas trouvé de différence appréciable entre les actions exercées par deux sphères différentes, l'une pleine et l'autre creuse, cette dernière ayant une épaisseur égale au dixième du rayon.

Au contraire, l'action de la sphère creuse n'était que les deux tiers de celle de la sphère pleine lorsque l'épaisseur était réduite au cent cinquantième du rayon. Le calcul donnerait alors, pour $\mu = 500$,

$$\beta = \left(1 - \frac{1}{150}\right)^3 = 1 - \frac{1}{50},$$

$$\frac{K_0}{K} = 1 + \frac{49}{112} = 1,44.$$

Une petite aiguille aimantée introduite dans la cavité d'une sphère creuse y détermine une nouvelle couche induite qui se superpose à la première et dont il serait facile de calculer la distribution, puisque l'action extérieure d'une pareille aiguille équivaut à celle d'une sphère aimantée uniformément; mais l'action considérée est toujours parallèle à l'axe magnétique de l'aiguille, si l'on néglige les phénomènes de retard d'aimantation, et n'influera pas sur sa direction.

Il semble donc que les oscillations de l'aiguille ne devraient dépendre que de l'action résultante du champ extérieur et des couches induites par le champ lui-même; toutefois l'expérience est plus complexe, parce que le retard d'aimantation produit un effet appréciable et qu'en outre le mouvement de l'aiguille produit des courants électriques induits.

278. Déterminations expérimentales. — Lorsqu'un cylindre est aimanté d'une manière uniforme parallèlement à l'axe, l'action qu'il exerce sur un point intérieur ne dépend que des deux couches terminales. Si le cylindre est très allongé, cette action est négligeable pour tous les points dont la distance à l'une des extrémités reste grande par rapport au diamètre : l'action résultante sera donc produite uniquement par le champ extérieur. Si ce champ F est uniforme et parallèle à l'axe, l'aimantation dans la plus grande partie du cylindre sera uniforme et sensiblement égale à kF. Au voisinage des extrémités seulement, l'aimantation induite sera un peu modifiée : la couche superficielle, au lieu d'être uniforme et limitée à la surface terminale, se répandra en partie sur les surfaces latérales.

En désignant par v le volume du cylindre, son moment magnétique est $M = vI = vkF$. On connaîtra donc la valeur de k si l'on détermine par expérience le rapport des grandeurs M et F.

On peut remarquer, par exemple, qu'en appelant $2l$ la longueur du cylindre, les champs F_1 et F_2 qu'il produit à une même distance d du centre, sur le prolongement de son axe ou dans le plan équatorial ont pour expressions (**106**)

$$F_1 = 2M\frac{d}{(d^2 - l^2)^2}, \qquad F_2 = \frac{M}{(d^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}},$$

le premier étant de même sens que le champ primitif et le second de sens contraire.

Si l'on fait osciller une aiguille aimantée en l'un de ces points, avant et après l'introduction du cylindre, les nombres d'oscillations correspondants N, N_1 et N_2 donnent

$$\frac{N^2}{F} = \frac{N_1^2}{F + F_1} = \frac{N_2^2}{F - F_2}, \quad \text{ou} \quad \frac{N^2}{F} = \frac{N_1^2 - N^2}{F_1} = \frac{N^2 - N_2^2}{F_2}.$$

Le rapport des champs F_1 ou F_2 au champ primitif F détermine le rapport des grandeurs M et F.

On voit aussi que, pour déterminer le coefficient d'aimantation de corps très magnétiques, comme le fer, on ne peut

se servir de l'action extérieure produite par des sphères ou des corps allongés dans une direction perpendiculaire au champ. En effet, le rapport de l'aimantation au champ qui la produit est respectivement égal à

$$\frac{3}{4\pi}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{3}{4\pi k}},\qquad \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{4\pi k}},\qquad \frac{2}{4\pi}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2}{4\pi k}},$$

suivant que le corps est une sphère, un disque ou un ellipsoïde de révolution très allongé. Ces rapports diffèrent trop peu des valeurs approchées qu'on obtient en y faisant k infini, pour qu'il soit possible d'en déduire la valeur de ce coefficient avec quelque précision.

Au contraire, avec les corps allongés parallèlement aux lignes de force, l'aimantation tend à devenir sensiblement proportionnelle à k et indépendante de la forme du corps.

279. Déplacement des corps dans un champ magnétique. — Attractions et répulsions. — De même que pour les diélectriques (129), l'énergie potentielle d'une sphère magnétique dans un champ uniforme est la moitié du produit, pris en signe contraire, de son moment magnétique par le champ, ce qui donne

$$W = -\frac{a^3}{2}\frac{\mu-1}{\mu+2}F^2 = -\frac{\wp}{2}\frac{3}{4\pi}\frac{\mu-1}{\mu+2}F^2,$$

$$W = -\frac{\wp}{2}\frac{3k}{3+4\pi k}F.$$

Cette expression représente également l'énergie d'une sphère magnétique infiniment petite dans un champ non uniforme.

Lorsque le coefficient d'aimantation, positif ou négatif, est très faible, cette expression se réduit à

$$W = -\frac{\wp}{2}kF^2;$$

dans ce cas, le corps peut être de forme quelconque.

Pour un déplacement très petit, la variation d'énergie est

$$dW = -\frac{\wp}{2}\frac{3k}{3+4\pi k}d(F^2).$$

S'il s'agit d'un corps magnétique, le coefficient k est positif; l'énergie diminue quand le corps se rapproche des points où la valeur absolue de la force est maximum. Un corps magnétique très petit dans un champ non uniforme tend donc à marcher vers les points où l'intensité est maximum. Comme il n'y a pas de maximum absolu du champ en dehors des masses agissantes (**129**), il en résulte que, si ce corps est abandonné à lui-même, il finira par aboutir à la surface des aimants, il est donc *attiré* par les aimants.

Pour les substances diamagnétiques, le coefficient k est négatif, mais toujours très petit. Un corps diamagnétique se rapproche des points où la force est minimum; il tend à s'éloigner de plus en plus des centres de force, il est donc *repoussé* par les aimants.

Comme le champ peut être nul en certains points, qui sont alors des minima absolus pour la valeur du carré F^2, on voit qu'un corps diamagnétique peut être en équilibre stable dans un champ non uniforme, en dehors des masses agissantes.

Faraday avait déjà énoncé cette loi expérimentale *que les corps magnétiques marchent vers les points où l'intensité du champ est maximum et les corps diamagnétiques vers les points où elle est minimum*. La véritable interprétation du phénomène est due à Lord Kelvin.

Dans un champ uniforme, l'énergie d'un petit corps isotrope, magnétique ou diamagnétique, reste constante et par conséquent l'action du champ est nulle.

280. Équilibre des aiguilles dans un champ uniforme. — Nous avons vu (**130**) qu'un cylindre allongé conducteur placé dans un champ électrique uniforme est en équilibre lorsque l'axe du cylindre est perpendiculaire ou parallèle à la direction du champ, l'équilibre étant instable dans le premier cas et stable dans le second.

Il doit en être de même pour une masse allongée de fer doux placée dans un champ magnétique uniforme, puisque l'aimantation d'une sphère de fer doux est une fraction $\frac{\mu - 1}{\mu + 2}$, très voisine de l'unité, de l'électrisation que prendrait cette sphère dans un champ électrique où les forces auraient les mêmes valeurs absolues.

On sait en effet, depuis Gilbert, qu'une aiguille de fer doux mobile autour d'un axe vertical se met en équilibre dans le méridien magnétique, et que, si elle était mobile autour de son centre de gravité, elle prendrait la direction de l'aiguille d'inclinaison.

Toutefois il ne suffit pas, pour expliquer cette expérience, de dire que le fer s'aimante en chaque point suivant une direction parallèle au champ, car alors l'aiguille devrait être en équilibre dans toutes les positions; il faut donc que l'aimantation de la masse ne soit pas uniforme.

Le couple qui agit sur l'aiguille, quand elle est oblique à la direction du champ, tient à ce que les réactions des différentes particules modifient l'aimantation de chacune d'elles; la direction parallèle au champ est celle qui, par suite de ces réactions, correspond au maximum d'aimantation.

Considérons, en effet, une série de balles de fer doux B, B′, B″,... réunies suivant une ligne droite et placées dans un champ uniforme; soit α l'angle que fait la droite avec la direction du champ.

Lorsque ces balles sont assez éloignées pour ne pas réagir les unes sur les autres, l'aimantation de chacune d'elles est parallèle au champ et l'action résultante est nulle. Mais, si la distance des balles n'est pas très grande par rapport à leurs dimensions, il est clair que le champ produit par l'une des balles sur les voisines tend à provoquer une aimantation nouvelle, oblique au champ extérieur et de direction opposée; l'aimantation résultante des différentes balles fait avec la droite commune des angles ω, ω',..., variables de l'une à l'autre, mais tous plus petits que l'angle α. Chaque sphère n'est plus en équilibre; elle est soumise à l'action d'un couple, et l'ensemble de ces couples, qui sont tous de même sens, tend à ramener la droite dans la direction du champ. Dans cette position d'équilibre, l'aimantation du système est maximum.

Si la ligne des balles est perpendiculaire à la direction du champ, les actions réciproques tendent à diminuer l'aimantation de chacune des balles isolées ; il y a équilibre instable et l'aimantation du système est minimum.

Ainsi, l'existence d'une position d'équilibre stable pour une aiguille magnétique dans un champ uniforme implique

l'existence de réactions entre les différents éléments magnétiques qui la composent ; elle est donc en contradiction avec l'hypothèse de Poisson sur la constitution des corps magnétiques, laquelle admet que ces réactions n'existent pas.

Les conséquences seraient à peu près les mêmes pour l'équilibre d'un corps diamagnétique, quoique les réactions agissent dans un sens opposé.

En effet, l'aimantation induite est alors de sens contraire à la force magnétisante. Une série des balles B, B′, B″,... disposées sur une droite perpendiculaire au champ, s'aimantent dans une direction opposée à celle du champ : les réactions augmentent donc la force magnétisante sur chacune des balles. Cette direction correspond dès lors à un maximum d'aimantation et à un état d'équilibre.

Supposons maintenant que la ligne des balles fasse un angle α avec la direction du champ ; comme chaque pôle tend à développer un pôle de même nom dans la partie la plus voisine d'une autre balle, les réactions modifient encore la force magnétisante et l'effet est d'autant plus marqué que l'angle α est plus petit. Il est facile de voir que l'aimantation résultante de chaque balle est oblique au champ et que tous les couples tendent encore à faire prendre à l'axe une direction parallèle au champ ; pour cette direction d'équilibre l'aimantation du système est minimum.

Ainsi une aiguille diamagnétique doit aussi, dans un champ uniforme, prendre une direction parallèle à celle du champ pour être en équilibre stable.

Toutefois, le coefficient d'aimantation pour les corps diamagnétiques est tellement faible, que les réactions des particules sont négligeables et que leur effet doit échapper à tout moyen d'observation.

En fait, une aiguille diamagnétique, pourvu qu'elle ne soit pas cristallisée, est en équilibre indifférent dans un champ magnétique uniforme ; dans toutes les expériences où l'on constate des phénomènes de direction, l'effet est dû aux propriétés magnéto-cristallines du corps en observation.

281. Équilibre dans un champ non uniforme. — La nature des phénomènes ne se voit plus d'une manière aussi simple lorsque le champ n'est pas uniforme.

Les corps diamagnétiques obéissent simplement à la loi de Faraday, c'est-à-dire que chacun des éléments de volume tend à se déplacer vers les points où le champ est minimum, et le mouvement du système est déterminé par l'ensemble des actions qui s'exercent sur chaque élément.

Considérons, par exemple, le champ qui serait produit par les pôles opposés A et A′ de deux aimants identiques placés en regard, ou par les deux pôles d'un aimant en fer à cheval, ou, plus simplement, le champ de deux masses égales et de signes contraires (**106**, fig. 24).

Au centre de figure O, l'intensité du champ a une valeur minimum par rapport à la ligne diamétrale AA′ et une valeur maximum par rapport à une direction Oy normale à la première. Une petite sphère magnétique isotrope, mobile seulement le long de la droite Oy, marche vers le point O où elle est en équilibre stable ; une sphère diamagnétique dans les mêmes conditions serait en équilibre instable au point O, et tendrait à s'en écarter indéfiniment. Si même cette sphère était absolument libre et située sur la droite Oy à une petite distance du point O, elle s'éloignerait de ce point en suivant la ligne Oy, c'est-à-dire *normalement aux lignes de force*, parce que c'est la direction suivant laquelle l'intensité du champ varie le plus rapidement.

Une aiguille allongée magnétique, mobile autour du point O, se dispose parallèlement à la ligne des pôles AA′, en équilibre stable, chacun des éléments de volume se portant vers les points où le champ est maximum.

Pour une aiguille diamagnétique, au contraire, la position d'équilibre stable correspond à la direction perpendiculaire à la ligne des pôles.

Les aiguilles se mettent donc *parallèlement* ou *transversalement* à la ligne de deux pôles de noms contraires, suivant que le coefficient d'aimantation est positif ou négatif. De là les noms de *paramagnétiques* ou de *diamagnétiques* donnés par Faraday aux corps qui appartiennent à la première ou à la seconde classe.

On a vu précédemment que, même dans un champ uniforme, une aiguille magnétique se place parallèlement à la direction des lignes de force, tandis que, d'autre part, les

différents éléments tendent à marcher vers les points où le champ est maximum.

Lorsque ces deux espèces d'actions sont concordantes, comme dans le cas qui précède, la position d'équilibre est facile à déterminer; mais il peut arriver que la tendance de chacun des éléments à marcher vers les maxima du champ ait pour résultat d'amener le système dans une direction qui ne soit pas parallèle aux lignes de force. Alors la position d'équilibre dépend des conditions de l'expérience.

Imaginons, par exemple, une série d'aiguilles de fer doux identiques disposées normalement et à égales distances les unes des autres sur une tige non magnétique, et plaçons ce système entre les pôles opposés des deux aimants. Si les aiguilles sont très écartées, chacune d'elles tend à se mettre parallèlement aux lignes de force et le système entier sera en équilibre dans une direction perpendiculaire à la ligne des pôles. Si, au contraire, on raccourcit les aiguilles de plus en plus, ou si on les multiplie de manière à les rapprocher presque au contact, il arrivera un moment où la tendance de chacune d'elles à se porter vers les points de maximum deviendra prédominante et le système entier se placera cette fois parallèlement aux lignes de force, c'est-à-dire suivant la ligne des pôles.

On conçoit que tous les cas intermédiaires puissent se présenter et même que, pour un système magnétique donné, la direction d'équilibre parallèle ou transverse dépende de la loi de variation du champ dans lequel il est placé.

282. Oscillations d'une aiguille magnétique. — Le problème est identique à celui qui a été traité précédemment (**130**) pour les diélectriques.

En particulier, lorsque le champ est symétrique par rapport au centre de l'aiguille, la durée des oscillations simples est donnée, en fonction de la densité D de la matière et de deux constantes A et B qui définissent la loi de variation du champ, par une expression de la forme

$$t^2 = \pi^2 \frac{D}{H(A+B)}.$$

Il est à remarquer que la période des oscillations est alors

indépendante de la longueur de l'aiguille. Ce résultat imprévu avait été trouvé expérimentalement par Matteucci pour des aiguilles de bismuth non cristallisées.

Dans le cas actuel, la valeur du facteur H est

$$H = \frac{h}{1 + kC} = \frac{k}{1 + \frac{4}{3}\pi k}.$$

Ce facteur se réduit sensiblemement à une constante $\frac{3}{4\pi}$ pour les grandes valeurs de k et devient égal à k pour les petites. La méthode des oscillations dans un champ symétrique ne peut donc pas être employée pour déterminer le coefficient d'aimantation de corps très magnétiques comme le fer; au contraire, elle conviendra très bien au cas de corps faiblement magnétiques ou de corps diamagnétiques.

Si le champ varie d'une manière quelconque, la méthode des oscillations, même pour les corps à coefficient très faible,

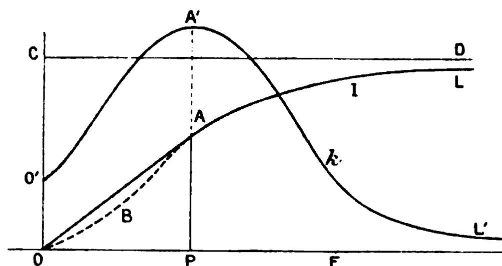


Fig. 56.

fournirait difficilement de bonnes déterminations de la valeur de k. La position d'équilibre de l'aiguille dépend alors, comme nous l'avons vu, de la loi de variation du champ et de la longueur de l'aiguille; il en est de même pour la durée des oscillations.

283. Corps très magnétiques. — Si le coefficient k était une constante, l'aimantation du fer doux et des corps analogues pourrait croître presque sans limites avec le champ. En fait, l'aimantation est sensiblement proportionnelle à la force magnétisante, tant que celle-ci est assez faible, mais elle tend ensuite vers une limite maximum. Si l'on porte la valeur de la

force magnétisante F en abscisses, l'aimantation sera ainsi représentée d'abord par une droite OA (fig. 56), puis par une courbe AL asymptote à la droite CD, dont l'ordonnée correspond au maximum d'aimantation.

La continuité du phénomène semble exiger que la droite OA soit remplacée par une courbe OBA, ce que l'expérience confirme en effet. Le coefficient k, qui est le rapport de l'ordonnée de la courbe précédente à son abscisse, est d abord croissant, à partir d'une valeur finie $k_0 = OO'$ correspondant à des forces magnétisantes extrêmement faibles, jusqu'à une valeur maximum A'P et tend ensuite vers zéro; la valeur de ce coefficient serait représentée par une courbe telle que O'A'L'. La perméabilité $\mu = 1 + 4\pi k$ passe également d'une valeur initiale μ_0 à un maximum et tend ensuite vers l'unité.

Si la forme du corps est telle, comme un cylindre très long, que l'action intérieure des couches induites soit négligeable, et que ce corps soit placé dans un champ uniforme F, de direction parallèle à sa longueur, l'aimantation est $I = kF$ et l'induction $F_1 = F + 4\pi I = \mu F$. En fonction de la force magnétisante F, l'induction sera représentée par une courbe d'abord rapidement croissante et qui devient ensuite asymptote à une droite inclinée à 45° sur les axes.

284. Aimantation résiduelle. — Les considérations précédentes supposent que l'aimantation est *temporaire* et définie à chaque instant par la force magnétisante actuelle, quel que soit le sens de ses variations, mais cette condition est rarement réalisée. Pour l'acier et la plupart des variétés de fer, qui sont presque toujours douées à un certain degré de force coercitive, l'aimantation ne disparaît pas avec les causes qui l'ont produite; le corps reste un aimant.

Cette aimantation *résiduelle* est le plus souvent dans une sorte d'équilibre instable et peut disparaître en grande partie par des actions mécaniques, telles que des chocs ou des vibrations; dans d'autres cas, comme pour l'acier trempé, une portion notable de cette aimantation est *permanente* et ne peut être détruite que par une température élevée ou par des actions magnétiques en sens contraire.

Dans un aimant ainsi produit et soustrait à toute action étrangère, on doit encore considérer le magnétisme apparent

comme formé de deux parties, l'une due aux masses magnétiques maintenues fixes par ce qu'on appelle la force coercitive et qui constitue le *magnétisme rigide*, l'autre résultant de l'action intérieure du magnétisme rigide et qui constitue le *magnétisme induit*.

Le champ intérieur est évidemment de sens contraire à l'aimantation rigide, sinon directement opposé, et agit ainsi comme une *force démagnétisante*. L'aimantation *apparente*, celle dont on observe les effets extérieurs, est en chaque point la résultante de l'aimantation rigide et de l'aimantation induite qui s'y est développée.

Le problème paraît inabordable dans le cas général, mais il devient très simple lorsque l'aimantation rigide est uniforme et que le corps est terminé par une surface du second degré, auquel cas le champ intérieur est uniforme et l'aimantation induite elle-même uniforme.

Pour une sphère, un ellipsoïde aimanté parallèlement à l'un des axes, un cylindre indéfini à section circulaire aimanté dans le sens de sa longueur ou dans une direction normale, l'aimantation induite I' est parallèle à l'aimantation rigide I, l'aimantation résultante est $I + I'$ et le champ intérieur de la forme $-C(I+I')$. On a alors

$$I' = -kC(I+I'), \qquad I' = -\frac{kC}{1+kC}I;$$

par suite

$$I + I' = \frac{1}{1+kC}I, \qquad C(I+I') = \frac{C}{1+kC}I.$$

On doit prendre naturellement pour le coefficient k la valeur qui convient à la force magnétisante totale $C(I+I')$.

Le magnétisme apparent est d'autant moins affaibli par l'induction que le facteur C est plus petit.

La forme de lames minces ou de cylindres très allongés est donc celle qui convient le mieux pour obtenir des aimants permanents, puisque la force démagnétisante est alors très faible ; ce sont, en effet, les formes qui ont été consacrées par la pratique.

L'expérience montre, en outre, que l'influence de la trempe est alors beaucoup moindre que dans le cas des aimants gros

et courts. Coulomb avait déjà constaté que les divers modes de trempe ne modifient pas d'une manière appréciable la rigidité magnétique d'un fil d'acier.

285. Cycles d'aimantation. — Hystérésis. — Lorsqu'un corps très magnétique, comme le fer, dont tous les éléments sont d'abord à l'état neutre, est soumis à un champ magnétique dont l'intensité croît de F_1 à F_2, l'aimantation croît elle-même; si le champ diminue ensuite de F_2 à F_1, les actions antérieures laissent des effets résiduels et l'aimantation est à chaque instant plus grande que celle qui correspondrait à la valeur actuelle du champ.

L'aimantation d'un corps ne dépend donc pas seulement des conditions actuelles, mais des actions antérieures qu'il a subies et, pour ainsi dire, de son histoire magnétique.

Le phénomène présente le caractère d'un régime régulier lorsque les variations du champ sont continues de F_1 à F_2, puis de F_2 à F_1, et que la même opération a été répétée un grand nombre de fois.

Enfin, si les limites F_1 et F_2 ont des valeurs $\mp F$ égales et de signes contraires, et que les variations soient périodiques entre ces limites extrêmes, l'aimantation est elle-même périodique, mais elle correspond à chaque instant à l'une des valeurs antérieures de la force magnétisante. En d'autres termes, l'aimantation est *en retard* sur les causes qui la produisent; c'est une propriété à laquelle M. Ewing [1] a donné le nom d'*hystérésis* (ὑστέρησις, retard).

Il est commode, en effet, d'avoir une dénomination particulière pour désigner ce phénomène, dont les causes sont les mêmes que celles du magnétisme rémanent et des effets attribués à la force coercitive; il correspond à une sorte de frottement magnétique.

Les résultats paraîtront plus nets si on les traduit par une représentation graphique.

Supposons qu'un échantillon de fer *vierge*, c'est-à-dire qui n'a jamais été aimanté ou dont le magnétisme antérieur a été détruit par recuit au rouge vif, soit soumis à une force magnétisante de direction constante, qui varie à partir de zéro.

[1] EWING, *Phil. Trans. L. R. S.;* 1885, p. 569.

En fonction de la force magnétisante, l'aimantation continue serait représentée par une courbe OL (fig. 57).

Si l'on interrompt le phénomène à l'aimantation MP et que le champ diminue ensuite jusqu'à zéro, l'aimantation correspondante est représentée par une courbe différente MCB et

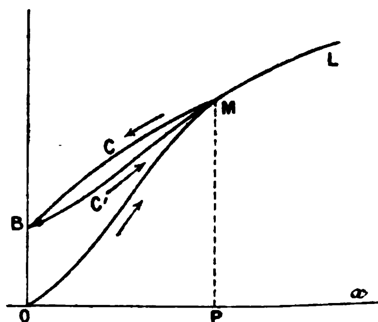


Fig. 57.

conserve une valeur finie OB. Faisant de nouveau croître le champ jusqu'au maximum primitif, l'aimantation reprend sensiblement la même valeur finale MP, mais par un chemin

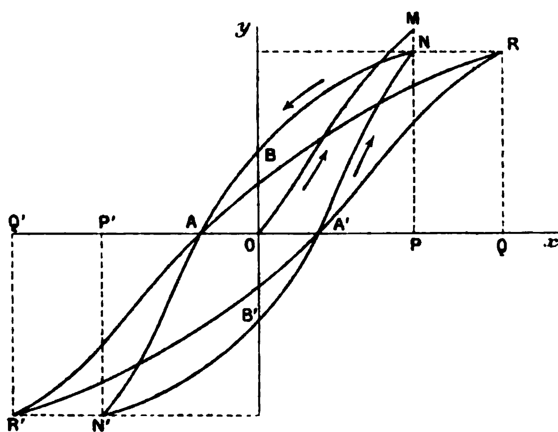


Fig 58.

inférieur BC'M, de sorte que, pour une même valeur intermédiaire du champ, l'aimantation est plus grande dans la phase décroissante que dans la phase croissante.

Supposons maintenant que la force magnétisante, après avoir varié de o à F, passe ensuite de $+F$ à $-F$, puis de $-F$ à $+F$, etc., et que les mêmes opérations soient répétées un certain nombre de fois. La première phase d'aimantation étant représentée par OM (fig. 58), les états suivants seront figurés par des courbes qui tendent à devenir symétriques par rapport à l'origine; elles prennent finalement la forme NBN′ dans la phase de décroissance et la forme symétrique N′B′N dans la phase de croissance. L'aimantation est nulle pour deux valeurs égales et de signes contraires OA′ et OA de la force magnétisante.

286. Travail d'aimantation. — L'énergie potentielle d'un aimant dans un champ magnétique varie avec la position qu'il occupe (**253**); nous avons déterminé également (**279**) le travail relatif au déplacement d'un corps magnétique à perméabilité constante. Le problème se présente sous une forme différente quand on doit tenir compte des variations de perméabilité et de l'hystérésis.

Considérons d'abord une particule aimantée, équivalant à deux masses $\pm m$ séparées par la distance l, c'est-à-dire de moment magnétique $M = ml$; soient V_1 et V_2 les potentiels du champ aux points où se trouvent respectivement les masses $-m$ et $+m$. Si la particule est déplacée d'une quantité très petite, de manière que ces masses, devenues $\pm(m+dm)$, occupent des points où les potentiels sont V_1' et V_2', le travail dT du champ est

$$dT = \left(m + \frac{dm}{2}\right)(V_2 - V_2') - \left(m + \frac{dm}{2}\right)(V_1 - V_1'),$$

$$dT = \left(m + \frac{dm}{2}\right) l \left(\frac{V_1' - V_2'}{l} - \frac{V_1 - V_2}{l}\right).$$

Le dernier terme de la seconde parenthèse de la dernière expression représente la composante H du champ parallèle à l'axe magnétique de la particule dans sa position primitive; le premier terme est la valeur $H' = H + dH$ de cette composante relative à la position finale; enfin le facteur de cette parenthèse est $M + \frac{dM}{2}$. A un infiniment petit près du second

ordre, le travail du champ sur cette particule, pour le déplacement considéré, est donc

$$dT = M\,dH$$

Si l'aimantation est rigide, le moment magnétique M est une constante ; dans ce cas, le travail relatif au déplacement de la particule entre deux points où les composantes du champ sont H_1 et H_2 a pour expression

$$T_{1.2} = M(H_2 - H_1),$$

et il en est de même pour tous les éléments de volume de l'aimant considéré. Ce travail est nul, pour un cycle fermé, où l'aimant revient à sa position primitive.

Dans les autres cas, le moment magnétique M est une quantité variable et l'on a, pour un déplacement fini,

$$T = \int M\,dH.$$

On doit faire ici une distinction importante. Si l'aimantation ne dépend que de la valeur *actuelle* de la force magnétisante, le moment magnétique M est une fonction uniforme du champ H et le travail T est encore nul pour un cycle fermé, auquel cas chaque particule reprend sa position primitive dans le champ supposé invariable.

Si l'on tient compte, au contraire, du magnétisme résiduel, ou de l'hystérésis, le moment M n'est plus une simple fonction de H ; le travail relatif à un cycle fermé n'est pas nul.

Quand on soumet un corps à un champ magnétique variable, le travail est évidemment le même que si le corps était déplacé dans un champ fixe non uniforme où il serait soumis aux mêmes variations. Si la direction du champ reste constante, l'aimantation est en chaque point parallèle à la force magnétisante totale F, y compris au besoin l'action des couches induites, et l'on peut remplacer H par F. Le moment magnétique M de la particule de volume v est Iv et l'on a, pour une variation finie du champ,

$$T = v\int I\,dF.$$

Si l'on a pris pour abscisse, dans la fig. 58, la force magnétisante F, l'intégrale $\int \mathrm{I}d\mathrm{F}$ relative au cycle NN′ est l'aire $\int y\,dx$ de la surface NAN′A′N. Cette aire représente donc le travail qui correspond, par unité de volume, à l'aimantation pendant chaque période.

L'induction F_1 dans le corps aimanté étant égale à $\mathrm{F}+4\pi\mathrm{I}$, on peut remplacer $d\mathrm{F}$ par $d\mathrm{F}_1-4\pi d\mathrm{I}$ et écrire

$$\int \mathrm{I}d\mathrm{F}=\int \mathrm{I}d\mathrm{F}_1-4\pi\int \mathrm{I}^2 d\mathrm{I}.$$

Pour un régime établi de cycles périodiques, la dernière intégrale est nulle à chaque cycle et il reste

$$\int \mathrm{I}d\mathrm{F}=\int \mathrm{I}d\mathrm{F}_1.$$

Si donc on exprime l'aimantation en fonction de l'induction F_1, la courbe figurative aura une forme différente RR′, de même allure, passant encore par les points A et A′, mais l'aire n'est pas modifiée.

On peut ainsi porter l'induction F_1 en ordonnées, en conservant pour abscisse la force magnétisante; on a alors

$$4\pi\int \mathrm{I}d\mathrm{F}=\int(\mathrm{F}_1-\mathrm{F})d\mathrm{F}=\int \mathrm{F}_1 d\mathrm{F}-\int \mathrm{F}d\mathrm{F}.$$

La dernière intégrale est encore nulle à chaque cycle et l'aire $\int \mathrm{F}_1 d\mathrm{F}$ de la nouvelle courbe est le produit de 4π par le travail d'aimantation relatif à chaque période.

Le travail du champ relatif à chaque cycle peut donc être représenté par l'une ou l'autre des expressions suivantes :

$$\mathrm{T}=v\int \mathrm{I}d\mathrm{F}=v\int \mathrm{I}d\mathrm{F}_1=\frac{v}{4\pi}\int \mathrm{F}_1 d\mathrm{F}.$$

Les valeurs OA′ et OA, égales et de signes contraires, de la force magnétisante ou de l'induction, pour lesquelles l'ai-

mantation est nulle, peuvent être considérées comme une mesure de la force coercitive du fer considéré ; elles varient d'ailleurs avec l'amplitude et la période des oscillations.

Lorsque l'aimantation paraît ainsi nulle, le métal n'est pas revenu à l'état neutre ; il garde encore la trace des modifications antérieures, car il ne reprendrait pas sous l'influence d'un nouveau champ F, l'aimantation primitive OM.

Nous examinerons plus tard les expériences qui ont été réalisées pour l'étude des propriétés que présentent à ce point de vue les différentes variétés de fer ou d'acier.

287. Circuits magnétiques. — Réluctance. — On peut maintenant généraliser la notion de *force magnétomotrice* signalée précédemment (252).

Supposons qu'au voisinage d'un aimant on distribue d'une manière quelconque un ensemble de corps magnétiques isotropes. Tous les tubes d'induction que l'on peut considérer dans le système sont fermés ; ils traversent l'aimant dans le sens de l'aimantation et rencontrent ensuite à l'extérieur une série de milieux différents.

Si l'aimantation des corps magnétiques est en chaque point parallèle à la force magnétisante F, l'induction F_1 peut être représentée par μF, la perméabilité μ dépendant de la nature du corps et de la valeur du champ.

Dans la partie extérieure d'un tube élémentaire de section S, le flux d'induction φ peut s'écrire

$$\varphi = F_1 S = \mu F S = \frac{F\,dl}{\frac{dl}{\mu S}}.$$

La quantité $\frac{dl}{\mu S}$ peut être considérée comme une résistance magnétique dr, que l'on appelle *réluctance*, de l'élément du tube d'induction qui a pour longueur dl. On obtiendra ainsi, pour les éléments successifs, une suite de fractions égales et, si r désigne la réluctance totale $\int dr$ du tube à l'extérieur de l'aimant, il en résulte

$$\varphi = \frac{1}{r}\int F\,dl.$$

Appelant, de même, r_1 la valeur de l'intégrale $\int \frac{dl_1}{S_1}$ relative à la portion du tube comprise dans l'intérieur de l'aimant, on a aussi

$$\varphi = \frac{\int F_1\, dl_1}{r_1} = \frac{\int F\, dl}{r} = \frac{\int F_1\, dl_1 + \int F\, dl}{r_1 + r}.$$

L'expression $\int F dl$ représente le travail du champ sur l'unité de magnétisme le long d'une ligne d'induction à l'extérieur de l'aimant. Comme l'induction F_1 dans l'aimant est la résultante du champ et de $4\pi I$, le numérateur de la dernière fraction comprend d'abord le travail du champ le long d'une ligne fermée, lequel est nul, puis le travail du vecteur $4\pi I$ sur le chemin compris dans l'intérieur de l'aimant.

Ce second travail est le produit de 4π par la somme U des puissances magnétiques de l'aimant lamellaire équivalent (**250**) que rencontre le tube considéré; il reste donc

$$\varphi = \frac{4\pi U}{r_1 + r}.$$

Le numérateur $4\pi U$ de cette expression représente la *force magnétomotrice* du tube d'induction et le dénominateur sa réluctance totale.

Le flux total d'induction qui sort de l'aimant est

$$\Phi = 4\pi \Sigma \frac{U}{r_1 + r}.$$

Si l'aimant est lamellaire et que sa surface latérale soit en chaque point perpendiculaire aux feuillets, la valeur de U est constante pour tous les tubes d'induction; en désignant par C la conductance magnétique totale de l'aimant et du milieu qui l'entoure, on a

$$\Phi = 4\pi U \Sigma \frac{1}{r_1 + r} = 4\pi U C.$$

Les tubes d'induction constituent, à proprement parler, des *circuits magnétiques fermés* lorsqu'ils ne comprennent que des corps de grande perméabilité magnétique, c'est-à-dire du fer plus ou moins doux.

Si tous les tubes d'induction émanés de l'aimant sont ainsi des circuits magnétiques fermés, la réluctance est alors très faible et l'aimantation induite est comparable à l'électrisation que prendrait un conducteur dans les mêmes circonstances; les surfaces en contact possèdent des quantités de magnétisme égales et de sens contraires. Dans ce cas, il n'y a plus de force démagnétisante et la valeur de U ne dépend que du magnétisme rigide. La densité du magnétisme à la surface de l'aimant est en chaque point la projection normale $I\cos\theta$ de l'aimantation rigide et le flux d'induction par unité de surface est $4\pi I\cos\theta$.

288. Aimants armés. — Méthode d'arrachement. — Si l'on applique ainsi une masse de fer à l'extrémité d'un cylindre aimanté uniformément, les densités magnétiques sur les surfaces S en regard sont sensiblement égales et de signe contraire, et égales à l'aimantation rigide I. Le champ de chacune d'elles dans l'intervalle qui les sépare est $2\pi I$; l'action exercée par l'une des couches sur l'unité de surface de l'autre est $2\pi I.I = 2\pi I^2$ et l'attraction totale $2\pi I^2 S$.

En désignant par P l'effort nécessaire pour *détacher* l'armature dans une direction normale, on a donc

$$2\pi I^2 S = P, \qquad I^2 = \frac{P}{2\pi S}.$$

La mesure de P permettra donc de déterminer, par une *méthode d'arrachement*, l'aimantation du cylindre.

On se rapproche beaucoup de ces conditions théoriques par l'emploi d'un *aimant en fer à cheval*, dont les pôles sont terminés par des surfaces planes, sur lesquelles on applique une large armature de fer.

Dans ce cas, si S désigne la surface totale de contact de l'armature sur les deux pôles, la valeur de I représentera l'aimantation *moyenne* de l'aimant.

289. Influence de la température. — Les propriétés magnétiques des corps varient avec la température, tant au point de vue de l'aimantation induite et de l'aimantation permanente que des effets temporaires.

La perméabilité magnétique du *fer*, pour de faibles valeurs de la force magnétisante, reste à peu près invariable, depuis

la température de — 20° jusqu'au-delà de 300°, et diminue ensuite rapidement, puisque le métal n'est presque plus magnétique à la température du rouge cerise; il semble que la perméabilité doit passer par un maximum à une température intermédiaire. Les phénomènes sont d'ailleurs très variables suivant les impuretés du métal, la trempe et la force magnétisante; il en est de même, à plus forte raison, pour l'acier.

Avec le *nickel*, l'aimantation temporaire est d'abord croissante, de 0° jusqu'à 250° ou 260°, diminue ensuite pour s'annuler vers 340°; l'aimantation résiduelle diminue, au contraire, d'une manière continue.

Pour le *cobalt*, les aimantations temporaire et résiduelle vont croissant jusque vers 325°, et c'est seulement à la température de fusion du cuivre que les propriétés magnétiques semblent disparaître.

290. Conséquence du principe de Carnot. — En dehors des phénomènes d'hystérésis et des autres causes sur lesquelles nous aurons à revenir, l'influence de la température sur les coefficients d'aimantation conduit à quelques résultats que le principe de Carnot (**73**) permet de prévoir.

1° Si l'on opère à une température inférieure au rouge, mais assez élevée pour que le coefficient d'aimantation du fer soit décroissant, ce métal doit s'échauffer quand on l'approche d'un aimant, c'est-à-dire quand on le soumet à l'action d'un champ magnétique d'intensité croissante, et se refroidit quand on l'éloigne. L'inverse aurait lieu aux températures ordinaires si le coefficient d'aimantation augmente d'abord avec la température, comme l'expérience semble l'indiquer.

2° Les mêmes phénomènes doivent être plus marqués pour le nickel et le cobalt, puisque le maximum d'aimantation est alors parfaitement déterminé.

CHAPITRE CINQUIÈME

DES AIMANTS

291. Procédés d'aimantation. — Pour aimanter un corps doué de force coercitive, un barreau d'acier par exemple, on peut le placer dans un champ magnétique constant ou soumettre successivement ses différents points à l'action d'un champ variable, comme celui qu'on obtient en frottant le barreau avec un aimant.

Ce dernier procédé est le plus ancien et le plus fréquemment employé. Chacun des points du barreau prend à chaque instant une aimantation qui dépend de l'aimantation déjà acquise, de la force magnétisante actuelle et, jusqu'à un certain point, du temps pendant lequel elle agit.

Quelle que soit la méthode employée, une partie du magnétisme développé est *temporaire* et disparaît avec les forces extérieures. Une autre partie est *permanente* ou *résiduelle*, et toutes les expériences montrent que ces deux espèces d'aimantation ont une limite maximum.

Avec le fer, l'aimantation temporaire est plus grande et l'aimantation résiduelle plus faible que pour l'acier ; mais l'une et l'autre ont un maximum qui dépend uniquement de la qualité de la matière. Dans le cas des forces magnétiques très faibles, l'aimantation paraît être purement temporaire aussi bien pour l'acier que pour le fer.

Le problème général de l'aimantation consisterait à déterminer, pour un corps de forme et de nature données, soumis à des forces magnétiques connues, quelle serait en chaque point l'aimantation temporaire et, ces forces extérieures une

fois supprimées, ce que deviendrait l'aimantation résiduelle. Ce problème n'a été résolu théoriquement que dans un très petit nombre de cas particuliers.

292. Induction d'un aimant sur lui-même. — Un aimant quelconque, soustrait à toute action étrangère, doit être considéré comme renfermant deux espèces de magnétisme : l'un *rigide*, correspondant aux masses magnétiques maintenues séparées par ce qu'on appelle la force coercitive ; l'autre *induit*, qui résulte de l'aimantation temporaire produite par le champ intérieur. Comme la direction de ce champ est évidemment de sens contraire à celle de l'aimantation rigide, il existe en chaque point d'un aimant une *force démagnétisante*, dont l'action continue tend à diminuer le magnétisme et ramènerait le système progressivement à l'état neutre, si elle n'était équilibrée par d'autres causes.

Le magnétisme *apparent*, c'est-à-dire celui dont on observe les effets extérieurs, résulte de la superposition de ces deux magnétismes, rigide et induit.

Si le coefficient d'aimantation k du milieu était une quantité constante et qu'en outre la force démagnétisante fût en chaque point parallèle et proportionnelle à l'aimantation rigide I, c'est-à-dire de la forme $-CI$, l'aimantation induite I' au même point serait $-kCI$, suivant une direction opposée, et l'aimantation apparente $I + I' = (1 - kC)I$. Dans ce cas, le mode de distribution du magnétisme résultant serait le même que celui du magnétisme rigide.

Cette condition se trouve réalisée, comme on l'a vu précédemment (**273**), pour un aimant uniforme, terminé par une surface du second degré et dont l'aimantation est parallèle à l'un des axes de la surface.

Lorsque l'aimant est placé dans un champ magnétique, il se produit encore une nouvelle aimantation induite, qu'on ne peut pas négliger en toute rigueur, si faible qu'elle soit, et qui trouble l'état primitif.

Le problème, qui consiste à déterminer la distribution du magnétisme apparent dans un aimant, ne peut être abordé que par l'étude des actions extérieures. Nous indiquerons les principales méthodes expérimentales, pour en préciser la signification théorique.

293. Moment magnétique. — Le couple $MF \sin\theta$ (**224**) produit par l'action d'un champ uniforme sur un aimant tend à ramener l'aimant dans la direction du champ. Si le champ F est assez faible pour que l'aimantation induite correspondante soit négligeable, le moment magnétique M est indépendant de l'angle θ; on donne alors le nom de *couple directeur* du champ sur l'aimant au produit constant MF. C'est avec cette restriction seulement que la méthode des oscillations peut être appliquée en toute rigueur.

L'aimant étant mobile autour d'un axe, si K désigne son moment d'inertie, M la composante du moment magnétique perpendiculaire à l'axe, H la composante du champ également perpendiculaire à l'axe et n le nombre des oscillations simples par seconde, on a

$$(1) \qquad MH = n^2\pi^2K.$$

Tel est le cas d'un aimant suspendu à un fil sans torsion appréciable et soumis à l'action du champ terrestre.

Le second membre de l'équation (1) étant déterminé par l'observation des oscillations et par les dimensions du barreau, on connaît le couple directeur MH. En répétant l'expérience sur un second aimant M' dans le même champ, on en déduit le rapport des moments magnétiques :

$$(2) \qquad \frac{M'}{M} = \frac{n'^2K'}{n^2K}.$$

Une autre méthode consiste à suspendre l'aimant à un fil métallique dont le couple de torsion pour l'unité d'angle est C. L'appareil étant réglé d'abord de manière que l'axe de l'aimant soit parallèle au méridien magnétique, auquel cas le fil est sans torsion, on tourne la partie supérieure du fil d'un angle α; l'équilibre a lieu quand l'aimant a été entraîné de l'angle θ dans le même sens et l'on a

$$(3) \qquad MH \sin\theta = C(\alpha - \theta).$$

La même expérience, répétée sur un autre aimant, donne encore, par comparaison,

$$(4) \qquad \frac{M'}{M} \cdot \frac{\sin\theta'}{\sin\theta} = \frac{\alpha' - \theta'}{\alpha - \theta}.$$

Le rapport des moments magnétiques s'obtient ainsi par des angles directement observés, sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir les moments d'inertie. La méthode est particulièrement avantageuse quand il s'agit de barreaux aimantés où la distribution du magnétisme est sensiblement symétrique par rapport à l'axe, parce qu'on peut éliminer l'aimantation induite par le champ. Si l'on choisit, en effet, les torsions α et α' de manière que les déviations θ et θ' soient voisines de 90°, l'aimantation induite est parallèle au champ, par raison de symétrie, et le couple correspondant est nul.

Dans la plupart des recherches, on se propose seulement d'évaluer les rapports des moments magnétiques. Si l'on veut déterminer ces moments eux-mêmes en valeurs absolues, il faut connaître, dans les équations (1) et (3), la valeur du champ efficace H. Nous reviendrons plus tard sur ce problème qui exige quelques développements.

294. Étude de la distribution. — Le champ extérieur d'un aimant ne peut définir que la couche *fictive* superficielle capable de produire le même champ (**238**) ou encore l'aimant lamellaire équivalent (**250**), sans rien apprendre sur la distribution réelle du magnétisme intérieur. Il convient donc seulement d'examiner à quel degré d'approximation les principales méthodes employées permettent de connaître la distribution de ces couches superficielles de masses égales et contraires.

Les expériences ont porté presque exclusivement sur les aimants en forme de barreaux cylindriques, aimantés aussi régulièrement que possible, et qui paraissent présenter le cas le plus simple.

I. *Expériences de Coulomb.* — La méthode de Coulomb consiste à déterminer le champ d'un barreau aux différents points d'une ligne parallèle située à une petite distance, ou plus exactement la composante du champ perpendiculaire à la direction du barreau. Coulomb admettait que cette composante normale est proportionnelle à la densité de la couche fictive superficielle au point du barreau situé en regard, sauf toutefois quand on opère au voisinage des extrémités ; dans ce cas, il déterminait la densité soit par un procédé graphique, en prolongeant suivant une certaine règle la courbe relative aux observations antérieures, soit en doublant la

valeur obtenue en face de l'extrémité, pour suppléer à l'interruption de l'aimant.

On ne peut méconnaître ce qu'il y a d'arbitraire dans ce mode de correction. Il est d'ailleurs tout à fait inexact que la composante normale du champ en un point, même au contact de la surface, soit proportionnelle à la densité de la couche fictive correspondante et qu'elle puisse donner directement la distribution du magnétisme.

Coulomb déterminait le champ dans les conditions indiquées par deux procédés différents.

Le barreau étant placé verticalement, on le fait glisser de manière que ses différents points se trouvent successivement, et à la même distance, en face d'une très petite aiguille aimantée oscillant autour d'une verticale située dans le méridien magnétique qui passe par l'axe du barreau. L'aimantation de l'aiguille étant supposée invariable, les nombres d'oscillation N et n qu'elle effectue pendant le même temps, dans le champ terrestre H seul et en face de l'aimant dont la composante horizontale est F_n, donnent

$$\frac{n^2}{N^2} = \frac{H + F_n}{H}, \quad \text{ou} \quad F_n = H\frac{n^2 - N^2}{N^2}.$$

La différence $n^2 - N^2$ est ainsi proportionnelle à la composante normale F_n du champ produit par le barreau.

Le second procédé consiste à mesurer la répulsion exercée par chaque région de l'aimant, à une distance constante, sur l'un des pôles d'une longue aiguille aimantée.

L'aiguille est suspendue par un fil métallique et réglée d'abord dans le méridien magnétique. On approche de l'un des pôles le barreau aimanté maintenu vertical et recouvert sur la face correspondante d'une languette de bois; on détermine alors la torsion du fil nécessaire pour ramener l'aiguille dans sa position primitive, en contact avec la languette. Ces torsions sont évidemment proportionnelles aux composantes normales du champ produit par le barreau, si le magnétisme du pôle de l'aiguille est supposé invariable.

II. *Emploi du fer doux.* — Au lieu d'admettre ainsi que l'aimantation du corps auxiliaire n'est pas modifiée par le

barreau, on peut employer du fer doux en supposant que l'aimantation est dans chaque expérience proportionnelle à l'intensité du champ.

Dans la méthode de torsion, le barreau exercerait cette fois sur l'aiguille une attraction, plus difficile à équilibrer, proportionnelle au carré de la composante normale. L'action exercée sur une petite aiguille oscillante serait aussi proportionnelle au carré du champ, mais la loi des oscillations est alors plus complexe (**282**).

Un autre procédé consiste à placer un morceau de fer doux (*clou d'épreuve* de Jamin) sur les différents points de l'aimant. Ce corps d'épreuve étant tiré par un ressort ou attaché à l'un des plateaux d'une balance équilibrée, l'allongement du ressort ou la charge de l'autre plateau nécessaire pour le détacher de l'aimant déterminent l'effort d'arrachement, lequel est encore, avec les mêmes restrictions, proportionnel au carré de la composante normale.

Toutefois, on ne tient compte ni de la variation du coefficient d'aimantation avec l'intensité de la force magnétisante, ni des modifications apportées par la présence du fer doux dans l'état magnétique du barreau précisément sur la région que l'on explore. Les résultats ne paraissent donc pas aussi bien définis que ceux qu'on obtient par les aimants.

La méthode d'arrachement, en particulier, ne peut conduire à des valeurs bien définies que dans des conditions toutes différentes (**288**).

III. *Mesure du flux d'induction.* — L'emploi des courants induits permet, comme on le verra plus loin, de déterminer le flux de force ou le flux d'induction magnétique qui traverse un circuit fermé; il suffira de signaler ici cette méthode importante qui donne lieu à beaucoup d'applications.

Si on entoure le barreau en un point par un anneau formé d'une ou plusieurs spires et relié à un galvanomètre, et que par un procédé quelconque on supprime brusquement l'aimantation, le galvanomètre indique un courant temporaire qui constitue une véritable décharge électrique. Cette décharge, définie par l'angle d'impulsion de l'aiguille, est proportionnelle au produit du nombre des spires par le flux total d'induction qui traversait le plan limité par l'anneau au

point considéré ; si l'anneau enserre étroitement le barreau, le flux d'induction qui traverse l'anneau est celui qui existe dans la section même du barreau.

L'anneau étant placé au même point, on le fait glisser suivant l'axe du barreau de manière à l'emporter à une distance qu'on puisse considérer comme infinie ; le courant mesure cette fois le flux total de force émané de l'aimant à partir du point de départ.

L'expérience montre, conformément au théorème de la conservation du flux d'induction, que le courant est le même que dans le cas précédent.

En mesurant de l'une ou de l'autre manière le flux correspondant aux différents points, on peut, par des ordonnées proportionnelles, construire une courbe qui figure l'état magnétique du barreau. La courbe a une ordonnée maximum qui correspond à la ligne neutre ; elle s'abaisse de part et d'autre et devient asymptote à l'axe du barreau supposé prolongé indéfiniment. C'est ce que Gaugain appelait *courbe de désaimantation*.

L'anneau étant placé au point dont la distance au centre du barreau est x, si on le fait glisser d'une quantité dx, le courant mesure le flux de force extérieure correspondant à cette longueur dx, ou, ce qui revient au même, la variation du flux intérieur d'induction. En déplaçant successivement l'anneau de quantités égales, on pourra construire une courbe dont les ordonnées représentent le flux de force extérieur relatif à chaque élément de longueur et, par suite, la composante normale aux différents points. Les ordonnées de cette courbe sont proportionnelles aux dérivées de la courbe de désaimantation.

La méthode d'induction fournit donc, comme les précédentes, mais cette fois d'une manière exacte, les valeurs de la composante normale en chaque point du barreau.

295. Propriétés de la couche superficielle. — La couche fictive superficielle, qui produit les mêmes actions extérieures que l'aimant, n'est pas en équilibre, mais on sait (250) que sa densité en chaque point satisfait à la relation

$$4\pi\sigma = F_n + F'_n, \tag{5}$$

dans laquelle F_n et F'_n désignent, pour deux points infiniment voisins pris de part et d'autre de la surface, les composantes normales du champ extérieur et du champ intérieur, comptées à partir de la surface. Les méthodes qui précèdent donnent la valeur de la composante F_n, mais la composante F'_n est en général inconnue; par suite, elles ne permettront de déterminer la densité de la couche fictive que dans certains cas particuliers.

Il peut arriver, en effet, que la couche fictive puisse remplacer les masses magnétiques qui existent réellement dans l'aimant, non seulement pour les points extérieurs, mais aussi pour les points intérieurs; c'est ce qui a lieu dans les phénomènes d'induction magnétique, lorsque le coefficient k d'aimantation est constant. Dans ce cas, il existe un rapport constant μ entre les composantes normales extérieure et intérieure, et l'on a $\mu F'_n + F_n = 0$, ce qui donne

$$(6) \qquad \sigma = \frac{\mu - 1}{4\pi\mu} F_n = \frac{k}{1 + 4\pi k} F_n.$$

La distribution peut alors se déduire directement de la composante normale extérieure en chaque point. Il n'en est plus de même si le coefficient k est variable et, à plus forte raison, s'il existe du magnétisme rigide.

Les méthodes ordinaires ne donnent donc pas directement la distribution de la couche fictive dans un barreau aimanté; on ne peut, en particulier, considérer l'abscisse du centre de gravité de la courbe des composantes normales comme déterminant la position du pôle. Il suffit, pour s'en convaincre, d'examiner le cas d'un cylindre aimanté uniformément suivant une direction parallèle à l'axe. Dans ce cas, le magnétisme est uniquement superficiel (267) et se réduit à deux couches, l'une positive, l'autre négative, distribuées d'une manière uniforme sur chacune des bases. Il est facile de voir que pour la surface latérale le flux de force n'est pas nul, bien que la densité soit nulle. Le centre de gravité de la courbe qui représente le flux de force par la surface latérale se trouve à l'intérieur de l'aimant, tandis que le pôle est rigoureusement situé sur la surface terminale.

Remarquons encore que, si les composantes normales extérieures ne déterminent pas la distribution, elles permettent une évaluation approchée de la masse magnétique de chacun des pôles. En effet, le flux total de force, considéré d'un côté ou de l'autre de la ligne neutre, est égal au produit de 4π par la masse de la couche fictive correspondant à ce côté, abstraction faite du flux de force intérieur qui va directement d'un pôle à l'autre; l'importance relative de cette dernière partie est évidemment d'autant moindre que la section de l'aimant est plus petite par rapport à sa longueur.

Pour un barreau, cette masse est représentée par l'aire de la courbe obtenue en prenant comme ordonnée en chaque point la valeur de la composante normale du champ ou, plus simplement, par l'ordonnée maximum de la courbe de désaimantation.

296. Aimants cylindriques. — Malgré les réserves signalées plus haut sur la valeur théorique de ses méthodes, les expériences de Coulomb paraissent donner une idée assez exacte de la distribution du magnétisme dans les aiguilles de forme cylindrique.

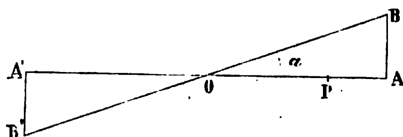


Fig. 59.

Il a constaté d'abord que, pour les aimants *courts*, c'est-à-dire pour ceux dont la longueur est plus petite que 50 fois le diamètre, la composante normale en chaque point (qu'il confondait avec la densité) est proportionnelle à la distance au milieu de l'aimant.

La densité linéaire serait donc comparable à celle que produit l'aimantation uniforme d'une sphère ou celle d'un ellipsoïde parallèlement à l'un des axes.

La courbe de distribution est alors figurée par une droite OB (fig. 59) faisant un certain angle α avec l'axe OA du barreau. Une droite OB', formant le prolongement de la première, figurerait le magnétisme négatif sur la seconde moitié du

barreau. La quantité de magnétisme de chaque pôle est proportionnelle à l'aire du triangle OAB et le centre de gravité de la surface se projette, comme pour une sphère, au tiers de la demi-longueur du barreau à partir des extrémités.

Si l'angle α est le même pour des barreaux de même section et de longueurs différentes, la quantité de magnétisme est proportionnelle au carré de la longueur et le moment magnétique au cube de la longueur. Coulomb a vérifié, en effet, que cette relation est sensiblement exacte pour des barreaux de même nature aimantés à saturation par les procédés dont il disposait.

Si le barreau est *long*, c'est-à-dire si la longueur L dépasse 50 fois le diamètre d, le magnétisme est insensible sur une certaine longueur de part et d'autre du centre et peut être encore représenté par un triangle CAA′ (fig. 60) dont la base occupe une longueur égale à 25 fois le diamètre. L'angle α de la droite figurative des densités est constant pour des bar-

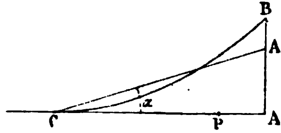


Fig. 60.

reaux qui ne diffèrent que par la longueur. La quantité de magnétisme est alors constante et la même que dans un aimant limite, pour lequel on aurait $L = 50d$; cette quantité est donc proportionnelle à $(50d)^2$ et le moment magnétique proportionnel à $\left(L - \frac{50}{3}d\right)(50d)^2$.

Coulomb ne considère toutefois ces résultats que comme une première approximation. Il a constaté que, si l'on prend, à partir de l'extrémité A d'un aimant, des points équidistants, les tangentes successives aux points correspondants de la courbe figurative font entre elles des angles égaux. En comptant les abscises à partir du point C, la courbe qui satisfait à cette condition est donnée par l'équation $e^{-y} = \cos\beta x$; pour les petites valeurs de x, cette courbe se confond sensible-

ment avec un arc de parabole CB tangente à l'axe des x. En appelant l la distance du point C à l'extrémité de l'aimant, la quantité de magnétisme est alors proportionnelle à l^3 et le pôle se trouve à une distance de l'extrémité égale au quart de l.

Le moment magnétique est proportionnel à $\left(L - \frac{l}{2}\right) l^3$.

Dans cette manière de concevoir la distribution, le moment magnétique d'un cylindre très long par rapport à son diamètre tend encore à devenir proportionnel à la longueur, comme dans le cas d'une aimantation uniforme.

297. Formules empiriques. — Ces deux fragments de parabole ne représentent pas la distribution du magnétisme par une fonction continue. Biot [1] a trouvé que l'on satisfait aux expériences de Coulomb d'une manière très exacte par la formule exponentielle

$$y = a(\mu^x - \mu^{2l-x}), \tag{7}$$

dans laquelle y est le magnétisme en un point situé à une distance x d'une des extrémités, a et μ des constantes.

Biot arrive à cette formule en assimilant l'aimant à une pile de Volta qu'il considère elle-même comme une série de plaques dans lesquelles les électricités des plaques extrêmes A et B *dissimulent* des quantités d'électricité de signes contraires variant en progression géométrique avec le nombre des plaques. Désignant par N le nombre total des plaques, l'électricité positive de A dissimule dans la $n^{ième}$ plaque une quantité d'électricité négative exprimée par $a\alpha^n$, et l'électricité négative de B dissimule dans ce même élément une quantité d'électricité positive exprimée par $a\alpha^{N-n}$, de sorte que la quantité d'électricité libre dans cet élément est, si on suppose les charges extrêmes égales entre elles,

$$y = a(\alpha^n - \alpha^{N-n}).$$

Pour passer de cette formule à la précédente, il suffit de poser $N = 2lp$ et, par suite, $n = xp$, en appelant p le nombre de couples par unité de longueur, et de prendre $\mu = \alpha^p$.

(1) J.-B. Biot, *Traité de Phys. exp. et Math.* t. III, p. 76; 1816.

Il paraît difficile de discuter un raisonnement n'ayant pour base que la notion vague de l'électricité dissimulée.

298. Formule de Green. — La formule donnée par Green [1] se rapporte au cas d'un cylindre placé dans un champ uniforme F parallèle à l'axe et pour lequel le coefficient d'aimantation est constant. En appelant $2l$ la longueur du cylindre et a le rayon de la section, supposée circulaire, la densité linéaire λ, à la distance x du milieu, serait

$$\lambda = kF\pi a^2 \beta \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}}, \tag{8}$$

le facteur β étant défini par l'équation

$$0{,}231863 - 2\,\mathcal{L}.\,a\beta + 2a\beta = \frac{1}{k\pi a^2 \beta^2}.$$

Maxwell en a déduit la table suivante des valeurs correspondantes de k et $a\beta$:

k	$a\beta$	k	$a\beta$
∞	0,00	11,80	0,07
336,4	0,01	9,13	0,08
62,2	0,02	7,52	0,09
48,41	0,03	6,32	0,10
29,47	0,04	0,143	1,00
20,18	0,05	0,0002	10,00
14,79	0,06	0,0000	∞

Pour des valeurs de k négatives, la quantité β deviendrait imaginaire; les mêmes considérations ne semblent donc pas pouvoir s'appliquer aux corps diamagnétiques.

La formule (8) paraît représenter aussi bien le magnétisme permanent dans les barreaux de forme cylindrique que le magnétisme temporaire produit par un champ uniforme.

Le moment magnétique du barreau est

$$M = 2\int_0^l \lambda x\,dx.$$

[1] G. Green, *Mathematical papers*, § 17.

Comme on a

$$\beta \int (e^{\beta x} - e^{-\beta x}) x\,dx = (e^{\beta x} + e^{-\beta x}) x - \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{\beta},$$

on obtient ainsi, en remplaçant le produit $kF\pi a^2$ par une constante A proportionnelle à la section πa^2 du cylindre,

$$(9) \quad M = A\left(2l - \frac{2}{\beta}\frac{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}}\right) = 2Al\left[1 - \frac{1}{\beta l}\frac{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}}\right].$$

Green a vérifié que cette valeur du moment magnétique, dans laquelle on considère comme une constante le coefficient β, qui est l'inverse d'une longueur, s'accorde d'une manière remarquable avec les déterminations faites par Coulomb sur des aiguilles qui ne différaient que par la longueur. L'accord cesse toutefois d'être satisfaisant lorsque la longueur de l'aiguille devient inférieure à 25 fois le diamètre.

L'aire $m = \int_0^l \lambda\,dx$ de la courbe des densités, c'est-à-dire la masse totale de l'un des pôles, a pour expression

$$(10) \quad m = \frac{A}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}}\left[e^{\beta x} + e^{-\beta x}\right]_0^l = A\left(1 - \frac{2}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}}\right).$$

La distance des centres de gravité de ces deux courbes, ou la distance des pôles de l'aimant, serait alors le quotient du moment magnétique M par la masse m de chaque pôle.

A mesure que la longueur du cylindre augmente, on voit, par les expressions (9) et (10), que le moment magnétique tend à devenir simplement proportionnel à la longueur et la masse de chaque pôle constante, ces deux quantités étant proportionnelles à la section, comme pour le cas d'un cylindre aimanté uniformément dans une direction parallèle à l'axe.

La formule de Green présente la plus grande analogie avec celle qui exprime le flux latéral d'électricité qui s'échappe d'une pile à colonne entourée d'un milieu conducteur (**195**).

Dans le cas de la pile, le courant total qui traverse la section dont l'abscisse est x a pour expression

$$I = \frac{1}{\rho}\left[\varepsilon - A\beta(e^{\beta x} + e^{-\beta x})\right],$$

et le courant latéral par unité de longueur

$$I = -\frac{dI}{dx} = \frac{A}{\rho'}(e^{\beta x} - e^{-\beta x}).$$

Les coefficients ρ et ρ', conservant une signification analogue, représentent ici, par unité de longueur, la résistance intérieure du cylindre au flux d'induction et la résistance extérieure au flux de force.

En exprimant la constante A en fonction de la résistance extérieure R_1, à partir des faces terminales, on a

$$(11) \qquad i = \frac{\varepsilon}{\rho'} \cdot \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{\left(\beta + \frac{\rho}{R_1}\right) e^{\beta l} + \left(\beta - \frac{\rho}{R_1}\right) e^{-\beta l}}.$$

Les expressions (8) et (11) deviennent identiques si l'on suppose R_1 très grand par rapport à ρ et que l'on pose

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = k F \pi a^2 \beta^2.$$

La distribution du flux de force magnétique est alors entièrement comparable à celle du flux latéral d'électricité pour une pile dont la force électromotrice par unité de longueur serait proportionnelle au champ magnétique.

299. Expériences de Jamin. — En employant la méthode du clou d'épreuve, Jamin [1] a étudié une série de lames d'acier de même nature aimantées à saturation, et déterminé ainsi ce qu'il appelle la *tension* magnétique en chaque point.

L'expression empirique de cette tension y à la distance x du milieu de la lame se ramène à la suivante, dans laquelle, p désignant le périmètre et s la section du barreau, on a posé $\beta = k\sqrt{\frac{p}{s}}$, les coefficients A et k étant des constantes :

$$(12) \qquad y = A\frac{s}{p}\beta e^{-\beta l}(1 - e^{-2\beta l})(e^{\beta x} - e^{-\beta x}).$$

Si l'on admet que la tension magnétique représente la den-

(1) JAMIN, *C. R. de l'Acad. des sciences*, passim; 1873 à 1876.

sité superficielle en chaque point, la quantité de magnétisme par unité de longueur, ou la densité linéaire, est $\lambda = py$ et le moment magnétique du barreau

$$M = 2\int_0^l \lambda x\,dx = 2p\int_0^l yx\,dx.$$

Comme on a

$$\beta\int_0^l (e^{\beta x} - e^{-\beta x})x\,dx = l\left(e^{\beta l} + e^{-\beta l} - \frac{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}{\beta l}\right),$$

l'expression du moment magnétique devient

$$M = 2Als(1 - e^{-2\beta l})\left(1 + e^{-2\beta l} - \frac{1 - e^{-2\beta l}}{\beta l}\right),$$

$$M = 2Als\left[1 - e^{-4\beta l} - \frac{(1 - e^{-2\beta l})^2}{\beta l}\right].$$

Avec la formule (12), le moment magnétique tend encore à devenir simplement proportionnel à la longueur et à la section du barreau lorsque l'aimant est très long par rapport à ses dimensions transversales.

La masse de chaque pôle est alors

$$m = p\int_0^l y\,dx = As(1 - e^{-2\beta l})(1 - e^{-\beta l})^2,$$

et l'on en déduirait la distance des pôles par le rapport des quantités M et m.

Cette masse tend aussi à être simplement proportionnelle à la section, de sorte que les résultats à la limite sont encore comparables à ceux que donnerait une aimantation uniforme parallèle à la longueur du barreau.

Si la tension de Jamin représente, au contraire, la quantité de magnétisme par unité de longueur, le moment magnétique et la masse de chaque pôle sont proportionnels au quotient de la section par le périmètre, c'est-à-dire simplement au périmètre pour des sections semblables. Dans ce cas, il semble que le flux d'induction dans la section moyenne d'un aimant permanent se limite à une couche superficielle dont l'épaisseur, d'ailleurs très petite, dépendrait de la nature du métal et des procédés employés pour l'aimantation.

Ces vues paraissent confirmées par l'observation, car il suffit d'enlever une couche très mince à la surface d'une lame aimantée, soit par des procédés mécaniques, en l'usant à la meule ou à la lime, soit par des moyens chimiques, tels que la corrosion par un acide, pour faire disparaître la presque totalité du magnétisme.

On peut même superposer plusieurs couches magnétiques différentes. Après avoir aimanté une lame d'acier dans un certain sens, on la soumet à l'action d'un champ magnétique inverse F, dont on modifie l'intensité jusqu'à ce que l'aimantation apparente ait disparu. Dans ce cas, la lame n'est pas revenue cependant à l'état naturel, car elle n'est pas modifiée par un champ inverse d'intensité inférieure à F, tandis qu'elle prendrait de nouveau, dans un champ direct plus faible, une aimantation de même sens que la première.

Lorsque le magnétisme semble avoir ainsi disparu par l'action successive de deux champs de directions contraires, on peut supprimer la seconde aimantation en enlevant une couche superficielle de faible épaisseur et l'on fait alors apparaître la première aimantation directe.

Cette prédominance des couches superficielles est sans doute un phénomène accidentel particulier à l'acier, et qui tient simplement à la structure mécanique du métal. En effet, quand il s'agit de barreaux fortement trempés, comme ceux que l'on recherche pour la fabrication des aimants, la trempe est nécessairement très inégale; elle se produit surtout au voisinage de la surface, où le refroidissement est très rapide, de sorte que la force coercitive est maximum dans les couches superficielles. L'action inductive et la force démagnétisante se manifestent alors dans des conditions très différentes de celles qui se présentent pour les corps homogènes.

300. Hypothèses sur la constitution des aimants. — D'après la théorie de Poisson, l'aimantation d'un milieu serait produite par la séparation des fluides magnétiques dans l'intérieur de chaque particule, et, comme aucune limite n'est assignée à la quantité de fluide neutre qui peut exister dans un volume déterminé, l'aimantation pourrait elle-même croître sans limites.

Nous verrons plus loin comment Ampère, partant des pro-

priétés magnétiques des courants électriques, a été conduit à admettre que chaque particule d'un corps magnétique est entourée à l'état naturel par un courant électrique infiniment petit et constitue un aimant élémentaire. Dans un corps magnétique soustrait à toute force extérieure, ces aimants élémentaires, n'étant soumis qu'à leurs actions réciproques, sont orientés indifféremment suivant toutes les directions.

Lorsque le corps considéré est soumis à l'action d'un champ magnétique, les axes des différentes particules aimantées tendent à prendre en chaque point la direction du champ, et l'aimantation qui en résulte pour le milieu est d'autant plus grande que ces particules ont été déviées davantage de leur direction primitive. S'il arrivait que les axes de toutes les particules devinssent parallèles entre eux, l'aimantation du milieu atteindrait une valeur maximum.

Telle est la conséquence que W. Weber a déduite des vues d'Ampère, et toutes les expériences semblent confirmer, en effet, qu'il existe une limite à l'aimantation.

301. Théorie de Weber. — Admettons, avec Weber, que chaque unité de volume renferme n molécules magnétiques et que le moment de chacune d'elles soit égal à m. Si les axes de toutes ces molécules étaient parallèles entre eux et de même sens, le moment magnétique de l'unité de volume serait $M = nm$, et l'aimantation du milieu un maximum.

Lorsque le milieu est à l'état neutre, les molécules sont orientées indifféremment dans toutes les directions. Pour exprimer cette propriété, menons par le centre d'une sphère un rayon parallèle à chacun des axes des n molécules ; les extrémités de ces rayons seront distribuées sur la sphère d'une manière uniforme.

Le nombre des molécules dont les axes font avec une direction déterminée, que nous prendrons pour axe des x, un angle inférieur à α est $\frac{n}{2}(1 - \cos\alpha)$; et le nombre des molécules dont les angles avec l'axe des x sont compris entre α et $\alpha + d\alpha$ est égal à $\frac{n}{2}\sin\alpha\, d\alpha$.

Supposons maintenant que ce milieu soit situé dans un champ uniforme dont l'intensité X est parallèle à l'axe des x,

et considérons l'action qui s'exerce sur une molécule dont l'axe magnétique fait l'angle α avec la direction du champ.

Si cette molécule était libre, son axe se placerait dans une direction parallèle au champ, de sorte que, toutes les autres molécules éprouvant une rotation analogue, le milieu atteindrait le maximum d'aimantation sous l'influence d'un champ quelconque, même infiniment faible.

Comme il n'en est pas ainsi, on doit admettre que chaque molécule est sollicitée à reprendre sa direction primitive par une action antagoniste qui provient, soit de la constitution même du milieu, soit des réactions que les molécules aimantées exercent les unes sur les autres.

L'hypothèse la plus simple est de supposer que cette action antagoniste D est constante et agit suivant la direction primi-

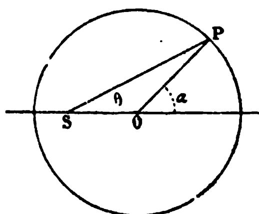


Fig. 61.

tive de chaque molécule. La direction nouvelle de l'axe d'une molécule dans sa position d'équilibre est donnée alors par celle de la résultante de D et X.

Traçons une sphère dont le rayon OP (fig. 61) soit égal à la réaction D du milieu, et prenons, à partir du centre, une longueur OS égale et opposée à l'intensité X du champ.

Une molécule dont l'axe était dirigé primitivement suivant OP est soumise aux deux forces SO et OP dont la résultante est SP. Si le point S est situé dans l'intérieur de la sphère, c'est-à-dire si la réaction du milieu est plus grande que l'intensité du champ, les axes des molécules déviées seront encore orientés dans toutes les directions, mais non plus d'une manière uniforme.

Si le champ est supérieur à la réaction du milieu, le point S se trouve en dehors de la sphère (fig. 62) et les axes des

molécules déviées sont tous compris dans l'intérieur du cône TST′ tangent à la sphère.

Soit θ l'inclinaison finale sur le champ X de l'axe d'une molécule dirigée d'abord suivant l'angle α, R la résultante de la force magnétisante X et de la réaction D du milieu. La molécule a tourné de l'angle $\beta = \alpha - \theta$ et la condition d'équilibre est

$$m\mathrm{X}\sin\theta = m\mathrm{D}\sin\beta = m\mathrm{D}\sin(\alpha-\theta),$$

$$\tag{13} \tang\theta = \frac{\mathrm{D}\sin\alpha}{\mathrm{X}+\mathrm{D}\cos\alpha}.$$

Le milieu étant supposé homogène et isotrope, l'aimantation résultante I est la somme des projections, sur la direc-

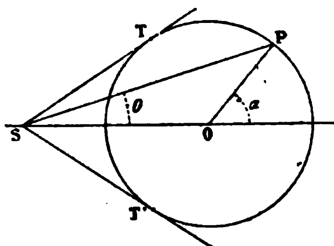


Fig. 62.

tion du champ, des moments magnétiques de toutes les molécules comprises dans l'unité du volume.

La projection du moment d'une molécule est $m\cos\theta$; le nombre de celles qui faisaient primitivement l'angle α avec l'axe des x étant $\frac{n}{2}\sin\alpha\,d\alpha$, la résultante a pour expression

$$\mathrm{I} = \int_0^\pi m\cos\theta\frac{n}{2}\sin\alpha\,d\alpha = -\frac{\mathrm{M}}{2}\int_\pi^0 \cos\theta\sin\alpha\,d\alpha.$$

Le triangle SOP donne

$$\mathrm{R}^2 = \mathrm{D}^2 + \mathrm{X}^2 + 2\mathrm{D}\mathrm{X}\cos\alpha,$$
$$\mathrm{R}\,d\mathrm{R} = -\mathrm{D}\mathrm{X}\sin\alpha\,d\alpha,$$
$$\mathrm{D}^2 = \mathrm{R}^2 + \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{R}\mathrm{X}\cos\theta.$$

En exprimant ainsi les angles α et θ par leurs valeurs en fonction de R, il vient

$$I = \frac{M}{4DX^2}\int (R^2 + X^2 - D^2)\,dR = \frac{M}{12DX^2}\Big[R^3 + 3(X^2 - D^2)R\Big]_{R_1}^{R_2}.$$

Dans le premier cas (fig. 61), où l'on a $X < D$, les limites de l'intégrale sont $R_2 = D + X$ et $R_1 = D - X$.

Dans le second cas, où $X > D$, les limites de l'intégration sont $R_2 = X + D$ et $R_1 = X - D$.

Toutes réductions faites, il vient alors :

Quand $X < D$, $\quad I = \frac{2}{3} M \frac{X}{D}$;

— $X = D$, $\quad I = \frac{2}{3} M$;

— $X > D$, $\quad I = M\left[1 - \frac{1}{3}\frac{D^2}{X^2}\right]$;

— $X = \infty$, $\quad I = M$.

D'après cette théorie, l'aimantation est d'abord proportionnelle au champ extérieur jusqu'à ce que celui-ci soit égal à la réaction du milieu, auquel cas l'aimantation atteint les deux tiers de sa valeur maximum. Puis, quand le champ continue d'augmenter, l'aimantation croît moins rapidement et tend vers une limite finie.

La courbe qui représente l'aimantation en fonction de la force magnétisante (**283**) devrait donc se composer d'abord d'une partie rectiligne OA (fig. 56) prolongée par une courbe AL asymptote à une droite horizontale CD correspondant à l'aimantation maximum. C'est le résultat auquel on arrive en admettant que le coefficient d'aimantation k est d'abord constant pour les faibles forces magnétisantes et diminue ensuite de plus en plus.

Les expériences de W. Weber lui-même s'accordent d'une manière satisfaisante avec cette loi, mais nous avons vu précédemment que le coefficient d'aimantation ne peut pas être considéré comme une constante, même pour les plus petites forces magnétisantes.

La théorie de Weber ne rend pas compte de ces premières variations du coefficient d'aimantation; d'autre part, elle ne fait rien prévoir au sujet du magnétisme résiduel.

302. Modification de Maxwell. — Pour combler cette dernière lacune, en restant dans le même ordre d'idées, Maxwell suppose dans le milieu une sorte d'élasticité imparfaite. Il admet que les axes des molécules magnétiques reviennent à leur position primitive, après la suppression de la force magnétisante, tant que la rotation qu'elles ont éprouvée reste inférieure à une certaine valeur β_0, mais que ces axes conservent une déviation permanente égale à $\beta - \beta_0$ lorsque la rotation β a été plus grande que la limite inférieure β_0. La déviation $\beta - \beta_0$ peut être considérée comme définissant l'état permanent de la molécule.

Cette hypothèse ne représente sans doute pas la réalité des phénomènes, mais elle peut en donner une idée approximative et permet de soumettre le problème au calcul.

D'après Maxwell on peut déduire de cette hypothèse, par un calcul analogue au précédent, l'aimantation temporaire I et l'aimantation permanente I'. En posant $L = D \sin\beta_0$, on obtient ainsi :

Quand $X < L$,

$$I = \frac{2}{3} M \frac{X}{D}, \quad I' = 0;$$

Quand $X = L$,

$$I = \frac{2}{3} M \frac{L}{D}, \quad I' = 0;$$

Pour $L < X < D$,

$$I = M \frac{2}{3} \frac{X}{D} + \left(1 - \frac{L^2}{X^2}\right) \left[\sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{X^2}{D^2} - \frac{L^2}{D^2}}\right],$$

$$I' = M \left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right) \left(1 - \frac{L^2}{X^2}\right);$$

Pour $X = D$,

$$I = M \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right], \quad I' = M \left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)^2;$$

Pour $X > D$,

$$I = M\left[\frac{1}{3}\frac{X}{D} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\frac{D}{X} + \frac{(D^2 - L^2)^{\frac{3}{2}}}{6X^2D} - \frac{\sqrt{X^2 - L^2}}{6X^2D}(2X^2 - 3XD + L^2)\right],$$

$$I' = \frac{M}{4}\left[1 - \frac{L^2}{XD} + \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}}\sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}}\right]^2;$$

Enfin pour $X = \infty$,

$$I = M, \quad I' = \frac{M}{4}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}}\right)^2.$$

La figure 63 représente la marche du phénomène pour les valeurs particulières : $M = 1000$, $L = 3$, $D = 5$. Les forces ma-

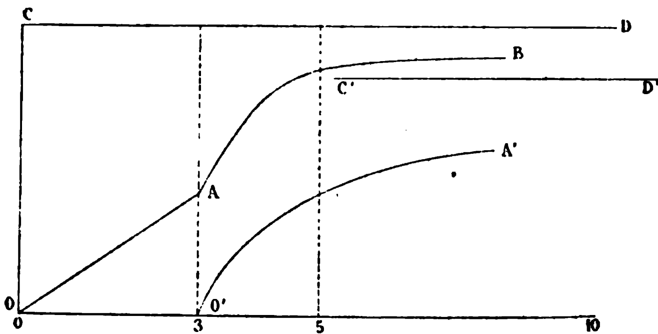


Fig. 63.

gnétisantes sont prises comme abscisses; les ordonnées de la courbe OAB représentent le magnétisme temporaire, celles de la courbe O'A' le magnétisme résiduel. La première se compose d'abord d'une portion rectiligne correspondant aux valeurs de X comprises entre o et L, puis elle se relève brusquement et s'approche rapidement de son asymptote. La courbe du magnétisme résiduel ne commence que lorsque X est égal à L, le maximum M' vers lequel elle tend, et qui est figuré par la droite C'D', est égal à 0,81 M.

On doit remarquer que le magnétisme résiduel ainsi calculé correspond au cas où l'aimantation du corps lui-même ne produit qu'une force démagnétisante insensible ; ces résultats

conviennent donc seulement à un corps très allongé aimanté dans le sens longitudinal.

Il est difficile d'admettre qu'une courbe discontinue comme celle qui figure le magnétisme temporaire puisse être l'expression exacte du phénomène. On déduit toutefois de cette théorie des conséquences curieuses relatives à l'action successive de forces magnétisantes de signes contraires et qui sont vérifiées par l'expérience.

Supposons qu'une pièce de fer, après avoir été soumise à l'action d'un champ X_0, ait acquis une aimantation permanente. Un autre champ X_1 de même sens est sans effet tant qu'il reste inférieur à X_0, et, pour une valeur plus grande que X_0, le magnétisme résiduel est le même que si le champ primitif X_0 n'avait pas agi.

Si le nouveau champ $-X_2$ est de sens contraire, il produit un effet permanent bien avant qu'il atteigne X_0; pour une certaine valeur, l'aimantation résiduelle du fer paraîtra annulée, mais le métal n'est pas à l'état neutre, car il est insensible à l'action d'un champ $-X$, tant que X est inférieur à X_2, tandis qu'un champ positif plus faible produit une aimantation permanente dans la direction primitive.

On aurait ainsi, même pour un corps homogène, des effets analogues à ceux que Jamin a observés (299) sur les lames d'acier trempé.

303. Variations avec la température. — Le magnétisme induit par un aimant sur lui-même offre peut-être le moyen le plus simple d'expliquer l'influence de la température.

Il est naturel d'admettre que le magnétisme rigide n'est pas altéré par de faibles variations de température, puisque l'aimantation reprend sa valeur primitive quand l'aimant revient lui-même à sa température initiale. D'autre part, on conçoit difficilement que le magnétisme rigide puisse réparer ses pertes, car toutes les actions intérieures tendent à le diminuer. Dans cet ordre d'idées, l'affaiblissement temporaire du magnétisme serait dû simplement à un accroissement du magnétisme induit et, par suite, le coefficient d'aimantation k devrait croître d'abord avec la température.

Pour des températures plus élevées, au-dessus de 100° par exemple, l'affaiblissement est définitif; le magnétisme rigide

a donc été lui-même altéré. On ne peut pas dire alors si le coefficient d'aimantation continue de croître avec la température, puisque deux causes agissent en même temps. Comme le fer et l'acier au rouge vif ne sont même plus attirables à l'aimant, il faut admettre que le coefficient d'aimantation devient alors nul ou du moins extrêmement faible.

Il semble donc que, pour l'acier et le fer, le coefficient d'aimantation doit croître d'abord avec la température pour diminuer ensuite jusqu'à zéro, de manière à passer par un maximum à une température déterminée.

S'il en est ainsi, un barreau aimanté à une température inférieure à celle du maximum doit perdre du magnétisme apparent quand on l'échauffe, et l'inverse doit se produire pour un barreau aimanté à une température supérieure à celle du maximum.

L'expérience montre que les choses se passent ainsi avec le cobalt. Pour le fer et l'acier, les faits connus jusqu'à présent s'accordent en partie avec cette manière de voir; mais il existe trop peu d'expériences bien définies pour qu'on puisse apprécier jusqu'à quel point elle se rapproche de la vérité, et les phénomènes réels paraissent plus complexes.

CHAPITRE SIXIEME

ÉTAT MAGNÉTIQUE DU GLOBE

304. Méthode de Gauss ([1]). — La représentation du magnétisme terrestre par l'hypothèse d'un aimant central ou par les hypothèses équivalentes ne constitue qu'une première approximation assez grossière des phénomènes. Le problème est en réalité beaucoup moins simple ; Gauss l'a traité d'une manière tout à fait générale en admettant que les effets observés à la surface terrestre sont dus *uniquement* à l'action de masses magnétiques.

Quelle que soit la distribution de ces masses, qu'elles soient à l'intérieur du globe ou à l'extérieur, les actions élémentaires étant fonction de la distance, le champ magnétique en chaque point est déterminé par un potentiel.

Les surfaces de niveau sont déterminées par des valeurs constantes du potentiel V pour chacune d'elles.

Le champ magnétique est normal en chaque point à la surface de niveau correspondante. Son intensité F est la dérivée, prise en signe contraire, du potentiel suivant la normale à la surface de niveau, et la composante du champ parallèle à une direction quelconque est, de même, égale et de signe contraire à la dérivée partielle du potentiel par rapport cette direction (**21**).

En général, les surfaces de niveau sont formées d'une nappe unique, mais il peut arriver, pour une distribution particulière des masses agissantes, que la surface correspon-

([1]) Gauss, *Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus.* — *Resultate aus den Beob. des magn. Vereins im Jahre* 1838 ; Leipzig, 1839.

dant à une valeur déterminée du potentiel, soit composée de plusieurs nappes distinctes; chacune de ces nappes est d'ailleurs fermée, puisque le potentiel devient nul, en tous cas, à une grande distance.

305. Parallèles et méridiennes magnétiques. — Si l'on trace les surfaces de niveau, un certain nombre d'entre elles rencontrent la surface de la Terre suivant des lignes de niveau, qu'on appelle *parallèles magnétiques*.

Comme ces parallèles appartiennent en même temps à la surface de la Terre et à la surface de niveau correspondante, ils sont perpendiculaires en chaque point à la verticale et à la direction du champ magnétique, c'est-à-dire au méridien

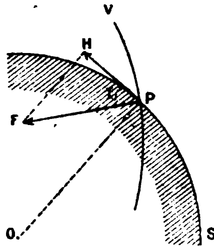


Fig. 64.

magnétique du lieu, et, par suite, à l'intersection de ce méridien avec la surface de la terre, c'est-à-dire à la *méridienne magnétique*. Les parallèles magnétiques forment ainsi à la surface de la sphère terrestre un système orthogonal aux méridiennes magnétiques, lesquelles ne sont plus des arcs de grands cercles.

Considérons les parallèles correspondant à des surfaces de niveau infiniment voisines.

Soit F le champ magnétique au point P (fig. 64), sur la surface de potentiel V, H la composante horizontale du champ, I l'inclinaison et ds un élément de la courbe méridienne magnétique correspondante. On a évidemment

$$(1) \qquad H = -\frac{\partial V}{\partial s} = F \cos I.$$

La composante horizontale, normale en chaque point au

parallèle magnétique, est donc en raison inverse de la distance de deux parallèles consécutifs; mais l'intensité totale et la composante horizontale ne sont plus nécessairement constantes le long d'un parallèle magnétique, comme cela avait lieu dans la théorie de Biot.

306. Équateur magnétique. — La somme des masses magnétiques étant nulle pour l'ensemble du système, et aussi séparément pour chacun des corps aimantés qui le constituent, il existe une surface de niveau sur laquelle $V = 0$; cette surface de potentiel nul coupe la surface du globe terrestre suivant sa ligne neutre, s'il est le seul corps magnétique, ou dans le voisinage de cette ligne si les autres corps magnétiques sont suffisamment éloignés.

Le parallèle de potentiel nul est l'*équateur magnétique*; le long de l'équateur, l'intensité du champ n'est pas constante et sa direction n'est pas non plus nécessairement horizontale, tandis que, dans la théorie de Biot, l'équateur était une ligne d'inclinaison nulle.

L'équateur magnétique sépare à la surface de la terre les points pour lesquels le potentiel est positif de ceux pour lesquels le potentiel est négatif. De part et d'autre de l'équateur, la valeur absolue du potentiel va en croissant d'une manière continue.

307. Pôles magnétiques terrestres. — On donne habituellement le nom de pôles magnétiques terrestres aux points de la surface où le potentiel est maximum ou minimum. Un pôle est un point où la surface de niveau devient tangente à la surface de la terre; le champ y est évidemment vertical.

Le nombre des pôles est de deux au minimum, car on trouve au moins deux points où cette dernière condition est réalisée, mais il peut en exister un plus grand nombre. Supposons, par exemple, qu'il y ait deux pôles P et P′ (fig. 65) situés dans la région positive, c'est-à-dire sur l'hémisphère sud. Ces pôles pourraient appartenir à une même surface de niveau qui aurait deux points de contact avec la surface de la sphère; mais on doit les considérer, d'une manière plus générale, comme appartenant à deux surfaces de niveau différentes, de potentiels V_m et V'_m, V_m étant plus grand que V'_m.

Puisque les points P et P′ correspondent à un maximum de

potentiel sur la surface S, le potentiel décroît dans tous les sens autour de chacun d'eux et on peut toujours choisir une valeur V_1, intermédiaire entre V_m et V'_m, telle que l'intersection de la surface de niveau correspondante avec la surface de la Terre donne deux courbes fermées S et S', isolées l'une de l'autre et dont chacune entoure l'un des pôles; on peut prendre aussi une valeur V_2 du potentiel assez petite pour que la courbe d'intersection S_1 correspondante comprenne les deux pôles.

En faisant varier le potentiel d'une manière continue, depuis V_1 jusqu'à V_2, on trouvera une valeur V_0 pour laquelle les

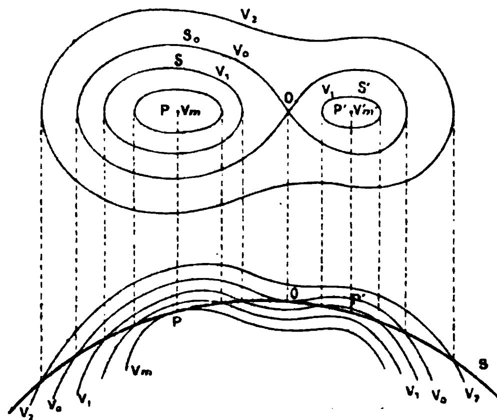


Fig. 65.

deux courbes, précédemment séparées, arriveront au contact, pour se confondre en une seule S_0; la réunion pourra se faire, soit par un simple point de croisement comme dans la figure 65, soit par un plus grand nombre de points d'intersection ou de contact.

Soit O l'un de ces points multiples d'une courbe de niveau. Il est évident d'abord que la composante horizontale y est nulle et que, par suite, le point répond à la définition ordinaire des pôles; seulement, dans la région qui l'entoure, on trouve suivant certaines directions des potentiels croissants et, suivant d'autres, des potentiels décroissants; pour les

premières directions, le point O se comportera comme un pôle sud et, pour les secondes, comme un pôle nord. C'est ce qu'on peut appeler un *faux pôle*.

Ainsi il ne peut y avoir deux pôles distincts dans une même hémisphère, sans qu'il y ait en même temps au moins un faux pôle. Or, les observations ne donnent rien de semblable, et c'est par une interprétation inexacte des phénomènes que l'on a cru quelquefois pouvoir déduire des observations l'existence de deux pôles dans l'hémisphère nord.

Dans le voisinage du pôle, en effet, les parallèles magnétiques ont une forme elliptique ; leurs normales, c'est-à-dire les méridiennes magnétiques, ne sont pas concourantes, mais les points de convergence qu'elles accusent plus ou moins nettement sont les centres de courbure du parallèle et n'ont évidemment aucune relation avec les pôles.

L'observation conduit donc à la même conséquence qu'il n'existe, en dehors de circonstances tout à fait accidentelles et locales, que deux pôles magnétiques à la surface de la Terre, un pôle négatif dans l'hémisphère nord et un pôle positif dans l'hémisphère sud.

Il est important d'ajouter aussi que les pôles magnétiques terrestres, tels que nous venons de les définir, n'ont rien de commun avec les pôles magnétiques proprement dits, considérés comme centre de gravité des masses magnétiques positives et négatives. Il est également évident que la corde qui joint les deux pôles magnétiques ne doit pas être prise pour l'axe magnétique terrestre. L'axe magnétique de la Terre est la droite qui joint les deux centres de gravité dont il vient d'être question ; c'est la droite suivant laquelle la somme des projections des moments magnétiques des divers éléments est un maximum (223).

308. Propriétés d'un polygone fermé. — Si l'on transporte l'unité de masse magnétique positive entre deux points P_1 et P_2, où les potentiels sont V_1 et V_2, le travail qu'elle subit est égal à $V_1 - V_2$.

Désignant par F le champ sur l'élément ds de la trajectoire et par ε l'angle de ces deux directions, on a

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 F\, ds \cos\varepsilon.$$

Ce travail est indépendant du chemin parcouru; il est nul toutes les fois que l'on suit une courbe fermée. Si la trajectoire est toute entière à la surface de la Terre, le travail de la composante verticale est nul à chaque instant; l'intégrale ne dépend que de la composante horizontale H et se réduit à

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 H\,ds \cos\varepsilon. \tag{2}$$

Le long d'un parallèle magnétique, cette intégrale est nulle, puisque le potentiel reste constant; dans ce cas, la composante horizontale est d'ailleurs normale à chacun des éléments de la trajectoire.

Sur une méridienne magnétique, on a toujours $\cos\varepsilon = \pm 1$. En considérant alors la composante H comme positive ou négative, suivant qu'elle est parallèle ou de sens contraire au déplacement de la masse, on aura donc

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 H\,ds.$$

Deux portions de méridiennes différentes, limitées par leurs intersections avec deux parallèles, aboutissent aux mêmes surfaces de niveau; pour chacune d'elles l'intégrale $\int H\,ds$ doit donc avoir la même valeur.

Ce genre de vérifications présenterait quelques difficultés parce qu'il serait nécessaire de tracer sur le globe les méridiennes magnétiques et de connaître la composante horizontale en tous leurs points.

On obtiendra des résultats très approchés en considérant à la surface de la Terre, supposée sphérique, un polygone formé par des arcs de grands cercles et les éléments magnétiques aux sommets du polygone.

Soient P_0, P_1, P_2... (fig. 66) les sommets de ce polygone; M_0, M_1, M_2,... les courbes qui représentent les méridiennes géographiques correspondantes; D_0, D_1, D_2,... les méridiennes magnétiques; δ_0, δ_1, δ_2,... les déclinaisons comptées positivement du nord vers l'ouest.

Désignons par 0.1 l'azimut géographique de l'arc $P_0 P_1$ au

point P_0, cet azimut étant compté positivement du nord vers l'est; par 1.0 l'azimut de l'arc P_0P_1 au point P_1, etc.

Pour le chemin $P_0P_1P_2\ldots$. les valeurs de l'angle ε aux différents sommets sont :

$$
\begin{array}{lll}
\text{Au point } P_0, & \varepsilon_{0.1} = \delta_0 + 0.1\,; \\
\quad\text{»} \quad P_1, & \varepsilon_{1.0} = \delta_1 + 1.0, \\
& \varepsilon_{1.2} = \delta_1 + 1.2\,; \\
\quad\text{»} \quad P_2, & \varepsilon_{2.1} = \delta_2 + 2.1, \\
& \varepsilon_{2.3} = \delta_2 + 2.3\,; \text{ etc.}
\end{array}
$$

Le long du côté P_0P_1 du polygone, la composante horizontale H n'est constante ni en grandeur ni en direction; cependant, si cet arc est très petit par rapport aux dimensions du globe terrestre, on peut considérer la projection $H\cos\varepsilon$ comme une constante, égale à la moyenne des valeurs relatives aux points P_0 et P_1, et poser

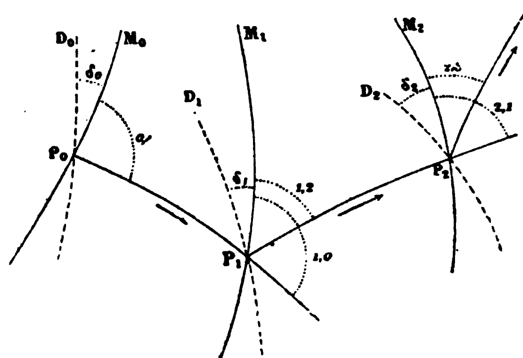


Fig. 66.

$$H\cos\varepsilon = \frac{1}{2}(H_0\cos\varepsilon_{0.1} + H_1\cos\varepsilon_{1.0});$$

la valeur correspondante de l'intégrale est alors

$$\int_0^1 H\,ds\cos\varepsilon = \frac{P_0P_1}{2}[H_0\cos(\delta_0 + 0.1) + H_1\cos(\delta_1 + 1.0)].$$

Dans ce cas, pour un polygone fermé de $n+1$ côtés, l'équation (2) devient

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} 0 = \dfrac{P_0P_1}{2}\left[H_0\cos(\delta_0 + 0.1) + H_1\cos(\delta_1 + 1.0)\right] \\ \quad + \dfrac{P_1P_2}{2}\left[H_1\cos(\delta_1 + 1.2) + H_2\cos(\delta_2 + 2.1)\right] \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + \dfrac{P_nP_0}{2}\left[H_n\cos(\delta_n + n.0) + H_0\cos(\delta_0 + 0.n)\right]. \end{array}\right.$$

Gauss a appliqué cette équation au triangle formé par les stations de Göttingue, Milan et Paris, où les observations

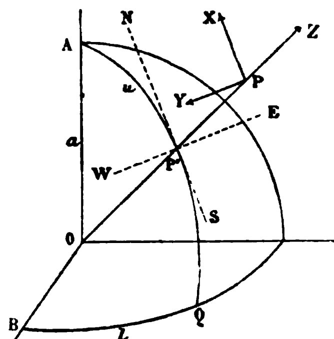


Fig. 67.

donnaient, le champ étant évalué en unités arbitraires,

	δ	I	H
Göttingue,	18°38′	67°56′	0,50980
Milan,	18°33′	63°49′	0,57094
Paris,	22°04′	67°24′	0,51804

En considérant comme inconnue la composante horizontale à Paris, on déduit du caleul la valeur 0,517. La vérification est suffisante, mais elle s'applique à une surface trop restreinte pour paraître entièrement démonstrative.

309. Théorèmes de Gauss. — Considérons un point quelconque P (fig. 67) à une distance r du centre de la Terre, sur le

rayon qui coupe la surface en P'; soit u le complément AP' de la latitude et l la longitude BQ comptée vers l'est. Nous remplacerons le champ magnétique F au point P par trois composantes rectangulaires, l'une Z suivant la verticale et comptée positivement vers le zénith, l'autre X située dans le méridien géographique et dirigée vers le nord, la troisième Y dirigée vers l'ouest.

On a alors, en tenant compte des relations

$$dx = -r\,du, \qquad dy = -r\sin u\,dl, \qquad dz = dr,$$

$$(4) \qquad \begin{cases} X = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial u}, \\ Y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{1}{r\sin u}\dfrac{\partial V}{\partial l}, \\ Z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} = -\dfrac{\partial V}{\partial r}. \end{cases}$$

Il en résulte aussi

$$F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \qquad H^2 = X^2 + Y^2,$$

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{Y}{X}, \qquad \operatorname{tang} I = -\frac{Z}{H}.$$

Lorsque le point considéré est à la surface du globe, en P', on remplacera dans les formules (4) la distance r par le rayon a de la Terre. Appelant V_0 le potentiel au pôle nord géographique A, V le potentiel à la latitude $90° - u$ sur un méridien déterminé, on a

$$(5) \qquad V - V_0 = a\int_0^u X\,du.$$

Si l'on connaît la composante horizontale X parallèle au méridien sur toute la surface, on pourra ainsi déterminer, à une constante près, la valeur du potentiel V en un point quelconque de la surface.

La relation

$$(6) \qquad Y = \frac{1}{a\sin u}\frac{\partial V}{\partial l}$$

donne alors, en tenant compte de (5),

$$(7) \qquad Y \sin u = \int_0^u \frac{\partial X}{\partial l} du,$$

équation qui détermine la valeur de Y. Ainsi :

Il suffit de connaître, sur toute la surface, la composante horizontale parallèle au méridien pour en déduire la composante perpendiculaire. Celle-ci permettrait ensuite de calculer la déclinaison et la valeur de H.

Si l'on connaît la valeur de X le long d'un méridien déterminé et celle de Y sur toute la surface, on peut encore intégrer l'équation (6) le long d'un parallèle.

Désignant par V′ le potentiel relatif à la longitude l, comptée à partir du méridien considéré, on a

$$(8) \quad V' = V + a\int_0^l Y \sin u \, dl = V_0 + a\left(\int_0^u X \, du + \int_0^l Y \sin u \, dl\right).$$

Cette expression donne également la valeur du potentiel sur toute la surface ; on en déduirait, pour chaque point, la direction et la grandeur de la composante horizontale.

Sous cette forme, la vérification des théorèmes exigerait la connaissance des éléments magnétiques au voisinage du pôle géographique, mais on peut remarquer que l'emploi des coordonnées géographiques est arbitraire ; rien n'empêche de choisir pour origine un point quelconque de la surface (¹), situé dans la région où les observations sont les plus exactes, et de rapporter les méridiens et les parallèles géométriques au nouvel axe ainsi défini.

310. Expression du potentiel. — Quelle que soit l'aimantation de la terre, son action extérieure équivaut à celle d'une couche superficielle, si l'on admet la loi du carré de la distance, et son potentiel peut être représenté, comme on l'a vu précédemment (**264**), par la série convergente

$$(9) \qquad V = a\left[A_1\left(\frac{a}{r}\right)^2 + A_2\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \cdots\cdots\right],$$

dans laquelle les différents facteurs A_1, A_2,..... sont des fonctions connues des angles u et l, renfermant un certain nom-

(¹) J. Bertrand, *Leçons sur la théorie math. de l'électricité*, p. 113 ; 1890.

bre de coefficients arbitraires dont la valeur dépend du mode de distribution des masses agissantes.

Sur la surface, on fera $r = a$ et les composantes du champ magnétique sont

$$(10) \quad \begin{cases} X = \frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial A_1}{\partial u} + \frac{\partial A_2}{\partial u} + \ldots\ldots, \\ Y = \frac{1}{a \sin u}\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{1}{\sin u}\left[\frac{\partial A_1}{\partial l} + \frac{\partial A_2}{\partial l} + \ldots\ldots\right], \\ Z = -\frac{\partial V}{\partial r} = 2A_1 + 3A_2 + 4A_3 + \ldots\ldots \end{cases}$$

L'expression générale de A_n comprend $2n+1$ termes en sinus et cosinus. Il y aura donc, si l'on veut représenter complètement l'état de la Terre par une série de cette forme, 3 coefficients numériques à déterminer pour A_1, 5 pour A_2, 7 pour A_3, etc.

Dans l'état des observations magnétiques connues, il était inutile de pousser le développement au delà du quatrième terme; il reste alors vingt-quatre coefficients numériques à déterminer.

Chaque point de la surface fournit trois équations par les valeurs des composantes X, Y, Z; il suffirait donc de connaître ces trois éléments en huit points quelconques du globe pour obtenir la solution complète du problème. Pour éviter les erreurs provenant des termes négligés et des observations inexactes, Gauss a appliqué la méthode des moindres carrés aux données relatives à quatre-vingt-quatre points pris, pour faciliter les calculs, sur douze méridiens équidistants et sept parallèles. Les résultats obtenus ont été ensuite appliqués à quatre-vingt-dix-neuf autres points.

Les formules calculées par Gauss assignent aux deux pôles les positions suivantes pour l'année 1838 :

Pôle Nord	latitude	73° 35′	longit.	262° 1′ E de Paris
Pôle Sud	»	72° 35′	»	150° 10′

Les pôles seraient ainsi très loin de correspondre aux extrémités d'un même diamètre.

L'axe magnétique, déterminé par la condition que la somme des projections des moments soit un maximum, est la direc-

tion pour laquelle A_1 est maximum (**265**). Cet axe est parallèle au diamètre qui correspond au point de l'hémisphère nord dont la latitude est de 77° 50′ et la longitude 294° 9′ E. Sa direction ne coïncide pas exactement avec la ligne des pôles.

Quant au moment magnétique de la terre, il peut être représenté par a^3K et la valeur de K, ramenée en unités C. G. S, est égale à 0,33092.

L'assimilation de la Terre à un aimant uniforme (**260**) conduirait à peu près au même résultat, puisque la valeur moyenne de la composante horizontale sur l'équateur magnétique est voisine de 0,33.

L'aimantation moyenne de la Terre serait alors $\frac{3K}{4\pi} = 0,079$. Pour un aimant d'une livre qui avait servi à Gauss dans ses expériences sur la détermination absolue du champ terrestre, l'aimantation moyenne était de 174, c'est-à-dire 2200 fois plus grande que celle de la Terre.

Les fils minces d'acier peuvent acquérir une aimantation de 780, ou presque 10000 fois l'aimantation terrestre.

311. Siège du magnétisme terrestre. — Il paraît démontré par ce qui précède, et il est du moins très probable, que les propriétés du champ magnétique terrestre peuvent être représentées par un potentiel, mais les théorèmes généraux ne permettent pas de déterminer si les masses agissantes sont entièrement localisées à l'intérieur du globe ou si une partie d'entre elles ne se trouve pas au dehors de la surface.

Quelle que soit la distribution des masses intérieures, on doit supposer encore que le magnétisme est moléculaire et que la somme algébrique de ces masses est nulle.

Cette conséquence comporte une vérification expérimentale. En effet, avec la loi du carré de la distance, qu'il n'y a pas lieu de mettre en doute, le flux total de force qui émane de la surface est égal au produit de 4π par la somme des masses intérieures, et ce flux doit être nul. Si donc dS est un élément de surface en un point et Z la composante verticale correspondante, comptée de bas en haut, on doit avoir, pour toute la surface,

$$\int Z\,dS = 0. \tag{11}$$

L'équation (9) suppose que le magnétisme est intérieur, de sorte qu'on a nécessairement

$$\int (2A_1 + 3A_2 + 4A_3 + \ldots\ldots) dS = 0,$$

mais la condition (11) est plus générale et conviendrait même au cas où il existerait des masses agissantes extérieures.

S'il existe en même temps des masses agissantes de part et d'autre de la surface, le potentiel, à une distance r, peut être exprimé par la somme de deux séries

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} V = {} & A_1 \left(\frac{a}{r}\right)^2 + A_2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 + \ldots\ldots + A_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \ldots\ldots \\ & + B_1 \left(\frac{r}{a}\right)^2 + B_2 \left(\frac{r}{a}\right)^3 + \ldots\ldots + B_n \left(\frac{r}{a}\right)^n \ldots\ldots, \end{aligned} \right.$$

la première relative aux masses intérieures, la seconde relative aux masses extérieures. En désignant par V_n le terme général du développement, on aurait donc

$$V_n = A_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} + B_n \left(\frac{r}{a}\right)^n,$$

$$\frac{\partial V_n}{\partial r} = -\frac{n+1}{r} A_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} + \frac{n}{a} B_n \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}.$$

Sur la surface, ces expressions deviennent

$$(13)\qquad V_n = A_n + B_n,$$

$$\frac{\partial V_n}{\partial r} = -\frac{n+1}{a} A_n + \frac{n}{a} B_n = -\frac{1}{a}\Big[(n+1) A_n - n B_n\Big],$$

Le terme général de la composante verticale est alors

$$(14)\qquad Z_n = \frac{1}{a}\Big[(n+1) A_n - n B_n\Big],$$

ce qui donne, en tenant compte de (13),

$$(2n+1) A_n = n V_n + a Z_n.$$
$$(2n+1) B_n = (n+1) V_n - a Z_n.$$

On peut ainsi séparer l'effet dû aux masses intérieures de celui que produisent les masses extérieures.

Les calculs de Gauss semblent montrer qu'on satisfait aux observations au moyen des seuls facteurs A; il en résulterait que les coefficients B sont sensiblement nuls et que, par suite, aucune part sensible de l'action terrestre ne doit être attribuée aux masses magnétiques extérieures.

Toutefois la question n'est pas encore résolue, même pour l'état moyen du champ terrestre. En outre, les variations périodiques des éléments du magnétisme terrestre paraissent liées aux mouvements apparents du Soleil et de la Lune, ou dépendre de certains phénomènes extérieurs tels que les taches solaires. Enfin les perturbations importantes, ou *orages magnétiques*, semblent se manifester en même temps et avec des effets de même ordre sur toute la surface du globe, circonstance qui est difficilement compatible avec des troubles localisés à l'intérieur du globe.

312. Influence du Soleil et de la Lune. — Si l'influence de ces astres ne paraît pas douteuse, tout porte à croire cependant qu'ils n'agissent pas directement, en tant que corps magnétiques, mais que leur action est indirecte, soit qu'elle modifie seulement l'état magnétique du globe, soit qu'elle donne lieu à des courants électriques dont la nature et la situation resteraient à définir.

Un astre, en effet, quelle que soit la distribution du magnétisme qu'il possède, équivaut, pour les points très éloignés, à un aimant infiniment petit ou à une sphère aimantée uniformément (**260**).

Soit A l'aimantation moyenne de la Terre, a son rayon, A′ et a' les mêmes éléments pour un astre situé à la distance D. Le champ terrestre T_e à l'équateur est égal à $\frac{4}{3}\pi A$.

Si l'on suppose que la ligne des pôles de l'astre soit dirigée vers la Terre, ce qui est le cas le plus favorable, son champ F'_p sur la Terre sera $2.\frac{4}{3}\pi A'\left(\frac{a'}{D}\right)^3$.

Le rapport de l'action polaire de l'astre considéré à l'action équatoriale de la Terre est

$$\frac{F'_p}{T_e} = 2\frac{A'}{A}\left(\frac{a'}{D}\right)^3 = \frac{A'}{4A}\left(\frac{2a'}{D}\right)^3.$$

Ce rapport est donc proportionnel à l'aimantation de l'astre et au cube de son diamètre apparent.

Le diamètre apparent du Soleil et celui de la Lune sont d'environ 30′, c'est-à-dire numériquement plus petits que 0,01; dans ce cas, on aurait donc

$$\frac{F'_p}{T_e} < \frac{A'}{4A} 10^{-6}.$$

Si ces astres ont une aimantation comparable à celle de la Terre, la variation maximum qu'ils peuvent produire à l'équateur sur la déclinaison est donc inférieure à $\frac{10^{-6}}{4}$ ou $\frac{1''}{20}$, c'est-à-dire absolument inappréciable. Pour arriver à des variations de 10′, comme celles qu'on observe fréquemment, il faudrait que l'intensité d'aimantation du Soleil et de la Lune fût 12000 fois plus grande que celle de la Terre, c'est-à-dire supérieure à celle des meilleurs barreaux d'acier (**310**).

Il en serait de même, à plus forte raison, si l'on suppose que l'un de ces astres, la Lune, par exemple, qui est plus rapprochée, soit aimanté par la Terre. Lorsque la Lune est à l'équateur, l'action qu'elle subit de la Terre est $\frac{4}{3}\pi A\left(\frac{a}{D}\right)^3$ et l'intensité d'aimantation a pour valeur

$$A' = k\frac{4}{3}\pi A\left(\frac{a}{D}\right)^3.$$

Comme la distance de la Lune à la Terre est d'environ 60 fois le rayon terrestre, on en déduit

$$\frac{A'}{A} = k\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{D}\right)^3 = k\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{60}\right)^3 = \frac{k}{54\,000}.$$

Quelque valeur que l'on admette pour le coefficient k, en supposant même qu'on assimile la Lune au fer le plus doux, le rapport des aimantations sera toujours très petit et la réaction de la Lune sur la Terre absolument négligeable.

CHAPITRE PREMIER

COURANTS ÉLECTRIQUES ET FEUILLETS MAGNÉTIQUES

313. Expérience d'Œrsted. — Des expériences anciennes sur les décharges électriques avaient montré déjà que le passage d'un courant dans un fil conducteur est capable de modifier le magnétisme d'une aiguille d'acier. Ces phénomènes, auxquels on n'accorda d'abord qu'une attention médiocre, étaient déjà une preuve manifeste des relations qui existent entre l'électricité et le magnétisme. C'est seulement en 1819, à la suite de l'expérience d'Œrsted [1], que l'existence et la nature de ces relations a été mise en pleine lumière par les immortels travaux d'Ampère.

Lorsqu'un conducteur rectiligne traversé par un courant est approché d'une aiguille aimantée, l'aiguille est, en général, déviée de sa position d'équilibre. Pour définir dans chaque cas les effets assez complexes qui se manifestent suivant les positions respectives de l'aimant et du courant, Ampère a donné une règle très simple : qu'on suppose un observateur couché dans le fil, de manière que le courant entre par les pieds et sorte par la tête; l'observateur, regardant l'aiguille, voit toujours le pôle Nord se porter à sa gauche, que nous

[1] Œrsted, *Experimenta circa effectum conflictus electrici in acum magneticam, Hafniæ*, 1820. — *Ann. de Ch. et de Phys.* [2], t. XIV, p, 417; 1820. — *Mém. de la Société de Physique*, t. II, p. 1.

appellerons désormais la *gauche du courant*. Si l'aiguille était soustraite à l'action de la Terre et à toute autre action que celle du courant, elle se mettrait en croix avec lui.

314. Champ magnétique d'un courant. — Le fait fondamental qui ressort de l'expérience d'Œrsted est qu'un courant électrique de forme quelconque crée autour de lui un véritable *champ magnétique*.

Ce champ jouit bien des propriétés reconnues d'un champ magnétique ordinaire, car les actions qu'il exerce en un point sur des masses magnétiques égales et de signes contraires sont égales et directement opposées. La force est d'ailleurs proportionnelle à la masse magnétique considérée, car, si l'on met dans le voisinage d'un courant une petite aiguille soumise en même temps à l'action de la Terre, la direction qu'elle prend est indépendante de son moment magnétique; la résultante des deux forces qui proviennent du champ terrestre et du champ créé par le courant a donc elle-même une direction fixe, et, par suite, ces deux forces restent dans un rapport constant.

L'action du courant change également de signe, sans changer de grandeur, quand on renverse simplement le sens du courant; ainsi, quand le fil conducteur est replié sur lui-même, les deux portions voisines, qui sont traversées par des courants égaux et de sens contraires, n'ont aucune action sur un pôle d'aimant situé à une distance notable par rapport à celle des deux courants.

L'existence du champ créé par le courant peut être mise en évidence par le procédé ordinaire des spectres magnétiques. Par exemple, si on répand de la limaille de fer sur une feuille de papier traversée normalement en son milieu par un courant rectiligne, on voit la limaille se distribuer en cercles concentriques à la trace du courant. On en conclut que les lignes de force sont des circonférences dont le centre est l'axe du courant. La force est donc normale en chaque point au plan qui passe par ce point et par le courant: elle est dirigée vers la gauche de l'observateur d'Ampère.

Les surfaces de niveau successives autour d'un courant rectiligne sont donc formées par une série de plans passant par l'axe du fil et faisant entre eux des angles égaux. Il en est

de même au voisinage d'un courant quelconque, de sorte que les surfaces de niveau successives naissent autour de chaque portion du fil, en faisant entre elles des angles égaux.

315. Courant rectiligne. — Lois de Biot et Savart. — La méthode employée par Biot et Savart [1] permet de comparer par expérience le champ produit par un courant avec le champ terrestre. Ils soumettaient à l'action d'un courant vertical de grande longueur une petite aiguille aimantée horizontale placée à diverses distances sur une droite passant par le courant et perpendiculaire au méridien magnétique. Dans ces conditions, les oscillations sont produites par la somme algébrique de la composante horizontale H du champ terrestre et du champ F produit par le courant.

On fait d'abord osciller l'aiguille sous la seule influence de la Terre, puis on en approche le courant à des distances successives r et r', de manière que son action s'ajoute à celle du champ terrestre. Si on appelle n, N et N′ les nombres d'oscillations qu'effectue l'aiguille pendant un même temps t dans ces trois expériences, on a, en désignant par K une constante qui dépend de la durée des observations de l'aimantation de l'aiguille et de son moment d'inertie,

$$n^2 = \mathrm{KH},$$
$$\mathrm{N}^2 = \mathrm{K}(\mathrm{H}+\mathrm{F}),$$
$$\mathrm{N}'^2 = \mathrm{K}(\mathrm{H}+\mathrm{F}').$$

On en déduit

$$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}'} = \frac{\mathrm{N}^2 - n^2}{\mathrm{N}'^2 - n^2}.$$

Or, l'expérience a montré qu'en employant la méthode des alternatives, pour éliminer l'influence des variations d'intensité du courant, on avait toujours

$$\frac{\mathrm{N}^2 - n^2}{\mathrm{N}'^2 - n^2} = \frac{r'}{r}.$$

Il en résulte $\mathrm{F}r = \mathrm{F}'r'$, c'est-à-dire que le champ magnétique du courant est en raison inverse de la distance.

(1) BIOT et SAVART, *Ann. de Chimie et de Physique* [2], t. XV, p. 222; 1820.

D'autre part, les expériences relatives à la décharge des batteries, celles de Colladon [1] et de Faraday, en particulier, et les mesures plus précises faites avec le voltamètre, ont montré que l'action magnétique d'un courant est proportionnelle à la quantité d'électricité qui s'écoule pendant l'unité de temps, c'est-à-dire à l'intensité i du courant, évaluée en unités électrostatiques.

Le champ magnétique d'un courant rectiligne à la distance r peut donc être représenté par l'expression

$$F = 2\frac{ki}{r}, \tag{1}$$

dans laquelle k est un coefficient qui dépend du choix des unités et dont la valeur reste à déterminer.

En réalité, l'action observée dans cette expérience, comme dans celle d'Œrsted, est toujours celle d'un courant fermé ; mais il est facile de reconnaître que, si la portion rectiligne considérée est suffisamment grande et le reste du courant suffisamment éloigné, cette dernière partie du circuit n'exerce qu'une action insensible et que l'effet observé dépend uniquement de la partie la plus voisine. L'action de la portion rectiligne peut alors être considérée comme égale à celle d'un courant rectiligne indéfini.

Une expérience plus simple, au moins en théorie, conduirait au même résultat. Qu'on suppose une portion du circuit verticale et un aimant placé d'une manière quelconque sur un appareil mobile autour d'un axe coïncidant avec celui du courant. Si l'aimant n'est soumis qu'à l'action du courant, le système mobile reste en repos pour toutes les positions de l'aimant, quels que soient le sens et l'intensité du courant ; si le champ terrestre intervient, la direction d'équilibre est indépendante du courant. Il résulte de là que les moments par rapport à l'axe des actions exercées sur les différentes masses de l'aimant ont une somme nulle.

En désignant par F le champ auquel est soumis une masse élémentaire m située à la distance r de l'axe, on aura donc

$$\Sigma m F r = 0.$$

(1) Colladon, *Ann. de Chimie et de Physique* [2], t. XXXIII, p. 62; 1820.

Si l'on suppose que l'aimant soit formé par deux masses égales et de signes contraires $\pm m$, situées aux distances r et r' du courant, l'équation se réduit à

$$m(\mathrm{F}r - \mathrm{F}'r') = 0, \quad \text{ou} \quad \mathrm{F}r = \text{const.}$$

L'expérience porte avec elle sa vérification, car si on cesse de faire coïncider l'axe de rotation avec l'axe du courant, le système se déplace et tend à tourner dans un sens ou dans l'autre pour atteindre une position d'équilibre.

Biot et Savart ont aussi constaté que, si le conducteur du courant est formé de deux parties rectilignes XO et OY (fig. 68)

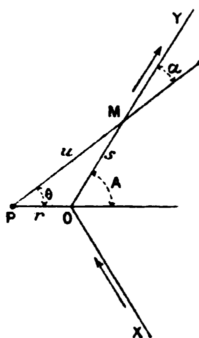


Fig. 68.

qui se coupent sous l'angle $2\mathrm{A}$, le champ produit en un point P de la bissectrice de cet angle est en raison inverse de la distance $\mathrm{PO} = r$ au sommet et proportionnel à $\operatorname{tang} \frac{\mathrm{A}}{2}$.

316. Loi de Laplace. — Dans la séance même où ces résultats étaient communiqués à l'Académie des sciences, Laplace fit observer qu'on les explique en admettant que le champ produit au point P par un élément ds de courant situé en M est en raison inverse du carré de la distance $\mathrm{PM} = u$ et proportionnel à la projection de l'élément sur un plan perpendiculaire au rayon vecteur u.

Pour le cas actuel, si le point P est sur la bissectrice de l'angle $2\mathrm{A}$, il se trouve dans le plan des deux branches du courant. Toutes les actions élémentaires sont parallèles et de

même sens; en outre, l'action de la branche inférieure XO du courant est égale, par raison de symétrie, à celle de la branche supérieure OY.

Appelant I une quantité proportionnelle à l'intensité du courant, α l'angle du rayon PM avec l'élément ds et θ l'angle MPO, l'action de cet élément au point P peut s'écrire

$$\frac{I}{u^2}\, ds \sin\alpha = \frac{I}{u^2}\, u\, d\theta = I\frac{d\theta}{u}.$$

Le triangle OPM donne

$$\frac{r}{u} = \frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin(A-\theta)}{\sin A}.$$

Remplaçant u par cette valeur en fonction de l'angle θ, on obtient ainsi, pour la somme des actions de l'élément ds et de l'élément symétrique,

$$\frac{2I}{r\sin A}\sin(A-\theta)\,d\theta = \frac{2I}{r\sin A}\, d.\cos(A-\theta).$$

Le champ magnétique F produit par le courant total au point P est l'intégrale de cette expression, prise entre les limites $\theta = 0$ et $\theta = A$ c'est-à-dire

$$F = \frac{2I}{r\sin A}(1-\cos A) = \frac{2I}{r}\operatorname{tang}\frac{A}{2};$$

on retrouve ainsi la seconde loi de Biot et Savart.

Quand il s'agit d'un courant rectiligne indéfini, l'angle A est droit et la formule se réduit à

$$(2) \qquad F = 2\frac{I}{r}.$$

Pour identifier cette expression avec la formule (1), il suffit donc de remplacer I par ki.

317. Intensité électromagnétique d'un courant. — Comparaison avec les systèmes électrostatiques. — La quantité I relative à un courant rectiligne peut être évaluée par le champ magnétique produit à une distance r. C'est une mesure du

courant empruntée uniquement aux considérations magnétiques; on l'appelle *intensité électromagnétique*. Le coefficient k est le rapport des valeurs d'un même courant dans les deux méthodes ou le rapport des unités d'électricité dans le système électrostatique et dans le système électromagnétique.

En comparant l'expression (2) avec la valeur $\frac{2\lambda}{r}$, qui représente (**119**) le champ électrostatique d'une ligne électrisée homogène de densité λ, on voit que, si les quantités I et λ ont la même valeur numérique, le champ magnétique du courant a aussi la même valeur que le champ électrostatique correspondant d'une ligne électrisée qui occuperait la même droite. Toutefois ces deux champs sont perpendiculaires l'un à l'autre; ce sont des *fonctions conjuguées* (**124**) dans le plan perpendiculaire à la droite considérée.

Si l'on convient de remplacer le courant dirigé de bas en haut par une ligne chargée d'électricité positive et le courant de haut en bas par une ligne négative, le champ magnétique en un point est dirigé vers la gauche d'un observateur situé en ce point, la tête en haut, qui regarderait la direction du champ électrostatique.

Cette règle se généralise. Pour obtenir le champ magnétique d'un système quelconque de courants parallèles, on remplacera chacun des courants par une ligne électrisée, positive ou négative, suivant sa direction, et l'on déterminera le champ électrostatique du nouveau système. Le champ magnétique des courants a la même valeur numérique, à angle droit avec le premier et dirigé vers la gauche.

Les problèmes résolus dans le premier cas ont ainsi leur solution dans le second. On sait, par exemple, que pour un système de conducteurs cylindriques en équilibre, l'électrisation est uniquement superficielle et le champ nul à l'intérieur de tous les conducteurs. Si l'on remplace le système par un ensemble de courants superficiels d'intensités proportionnelles, le champ magnétique est nul aux mêmes points.

Pour un cylindre unique, soustrait à l'action de toute autre partie du circuit, la distribution des courants superficiels capables de produire un champ nul à l'intérieur est la même que celle de l'électricité statique.

Lorsque le cylindre est à section circulaire, la distribution électrique est uniforme. Il en résulte, ce qu'il était facile de montrer directement, que l'action intérieure d'une couche circulaire homogène de courants parallèles est nulle.

Cette remarque permet d'interpréter l'équation (2) d'une manière plus complète. Si le courant était linéaire, le champ magnétique tendrait à devenir infini à une très petite distance, mais en réalité le conducteur a toujours une section finie. Lorsqu'elle est circulaire, le courant est distribué, par raison de symétrie, en couches concentriques homogènes; le champ intérieur à la distance r de l'axe ne dépend alors que du courant qui traverse le noyau central de rayon r.

Pour le régime permanent, la distribution est homogène. En désignant par ρ le rayon du conducteur, le courant σ par unité de section, ou sa densité, est défini par la condition $\pi\rho^2\sigma = I$.

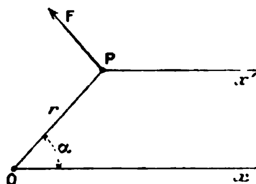


Fig. 69.

A la distance r le champ intérieur du système électrostatique serait $2\pi\sigma r$ (**137**); le champ magnétique est donc

$$2\pi\sigma r = 2\frac{I}{\rho^2}r.$$

Le champ est nul sur l'axe du cylindre, proportionnel au rayon jusqu'à la surface et devient ensuite en raison inverse de la distance à l'axe.

318. Potentiel d'un courant rectiligne. — Considérons un courant rectiligne O (fig. 69) perpendiculaire au plan de la figure, dirigé d'arrière en avant, et un point P situé à la distance r dans une direction qui fait l'angle α avec une droite fixe Ox passant par le courant.

Si l'unité de masse magnétique positive, placée d'abord au

point P, décrit un petit arc de circonférence $r d\alpha$ dans la direction du champ F, le travail du champ est $F r d\alpha = 2 I d\alpha$. Ce travail représente aussi la variation $-dV$ du potentiel magnétique du courant et l'on a

$$V = -2 I \alpha + \text{const.}$$

Remarquons encore que, si l'on mène la droite Px' parallèle à Ox, l'angle OPx' est égal à $\pi - \alpha$. L'angle apparent ω sous lequel on verrait du point P un plan Ox perpendiculaire au plan de la figure et indéfini vers la droite est $\omega = 2(\pi - \alpha)$. On peut donc écrire

$$V = I\omega + \text{const.} \tag{3}$$

Ainsi *le potentiel magnétique d'un courant rectiligne est, à une constante près, le produit de l'intensité électromagnétique par l'angle apparent d'un plan indéfini dans un sens et limité de l'autre au courant.*

Pour déterminer le signe de cet angle, nous rappellerons que, dans la pratique, le courant rectiligne indéfini fait nécessairement partie d'un circuit fermé et que, si la portion non rectiligne est très éloignée du point P, l'angle sous lequel on voit le circuit entier, que nous pouvons supposer plan, ne diffère que d'une quantité insensible du plan indéfini dont il fait partie. On imaginera qu'une surface continue est limitée au circuit et l'on appellera *face positive* du courant celle qui se trouve à la gauche de l'observateur couché dans le courant et qui regarde cette surface, *face négative* celle qui se trouve à sa droite; l'angle ω, ou la *surface apparente* du courant, est positif ou négatif suivant que du point P on verra la face positive ou la face négative.

A part une constante, on voit déjà que le potentiel d'un courant rectiligne est le même que celui d'un feuillet magnétique limité au courant et dont la puissance magnétique serait égale à I; cette analogie sera généralisée plus loin.

319. Le potentiel d'un courant n'est pas une simple fonction des coordonnées. — Supposons que l'unité de masse magnétique positive, située d'abord au point P, décrive une

circonférence entière autour du courant, de manière à revenir à sa position primitive ; le travail du champ est $2I.2\pi$ ou $4\pi I$, c'est-à-dire que l'angle ω a diminué de 4π dans l'expression du potentiel (3); cet angle diminuerait de $4\pi n$ pour n révolutions de la masse considérée dans le même sens.

Le produit $I\omega$ représente le travail qu'il faudrait dépenser pour amener l'unité de masse en P, à partir d'un point où l'angle ω est nul, *sans traverser la surface du courant.*

Si donc, par analogie avec les propriétés des feuillets, on appelle potentiel du courant en un point le travail nécessaire pour y amener l'unité de magnétisme positif, depuis une distance infinie, et que dans le chemin suivi cette masse ait traversé n fois la surface du courant en entrant par la face négative, ce potentiel V aura pour expression

$$(4) \qquad V = I\omega - 4\pi n I = I(\omega - 4\pi n).$$

Le potentiel magnétique du courant, évalué ainsi par le travail, n'est pas une simple fonction des coordonnées ; il a une infinité de valeurs qui diffèrent d'un multiple de $4\pi I$, c'est-à-dire du travail qui correspond à une rotation complète de l'unité de magnétisme autour du courant.

320. Solénoïdes électromagnétiques. — Ampère [1] donne ce nom à un ensemble de courants très petits, ou *courants élémentaires*, de même intensité et de même surface S, que nous supposerons circulaires, disposés perpendiculairement à une ligne *directrice* qui passe par tous leurs centres, et qui sont équidistants ; soit h leur distance commune.

On réalise ces appareils, au moins d'une manière approximative, par l'enroulement en hélice d'un fil conducteur sur un tube de section constante, le fil revenant ensuite à son point de départ le long d'une génératrice, afin que les deux extrémités se trouvent rapprochées ; quand on fait passer un courant dans le conducteur, chacune des spires de l'hélice représente un courant élémentaire.

L'équivalence de ce système à un solénoïde théorique est même beaucoup plus étroite. On doit admettre, en effet, que

[1] Les mémoires d'Ampère ont été réunis et publiés par M. Joubert. *Collection de Mémoires de la Société de Phys.*, t. II et t. III; 1885 et 1887.

l'action d'un élément de courant est équivalente à celle de ses projections sur des axes rectangulaires; c'est le principe des *courants sinueux* sur lesquels on reviendra plus loin.

Chacune des spires de l'hélice équivaut ainsi à un courant plan perpendiculaire au tube d'enroulement et à un petit courant rectiligne de longueur h. L'ensemble de ces composantes rectilignes relatives à toutes les spires constitue un courant linéaire, parallèle à la directrice, dont l'action est annulée par celle du courant de retour.

L'expérience capitale consiste à montrer que l'action extérieure d'un solénoïde équivaut à celle de deux masses magnétiques $\pm m$, situées sur les surfaces extrêmes, l'une positive à gauche des courants, l'autre négative à droite; ces masses m sont proportionnelles à l'intensité I du courant, à la surface S des courants élémentaires et en raison inverse de leur distance h, c'est-à-dire proportionnelles au nombre des courants par unité de longueur de la directrice.

Il est d'abord facile de vérifier que le solénoïde équivaut à deux pôles, car, s'il a une longueur notable par rapport à son diamètre et qu'on le fasse agir sur la limaille de fer, les houppes de limaille se disposent symétriquement par rapport au plan des faces terminales; on constatera, en outre, qu'à une distance de l'une des extrémités très petite par rapport à la longueur du solénoïde, le champ magnétique est en raison inverse du carré de la distance.

Ce premier point établi, les autres lois sont évidentes.

La masse m est, en effet, proportionnelle à l'intensité I; c'est le caractère général des actions électromagnétiques.

Elle est aussi proportionnelle au nombre des courants par unité de longueur, car si on double le nombre de ces courants, deux circuits voisins ont la même action qu'un circuit de courant double.

D'autre part, supposons que l'on divise la surface S en un nombre quelconque de parties S_1, S_2,... et que le contour de chacune d'elles soit suivi par le même courant I; toutes les lignes intermédiaires se trouvent ainsi parcourues par deux courants de même intensité et de signes contraires et leur action extérieure est nulle.

Un ensemble de solénoïdes juxtaposés, dont les surfaces

sont respectivement S_1, S_2,..., équivaut au solénoïde primitif; si chacune de ces surfaces est la n^e partie de la surface S, l'action du solénoïde correspondant sera n fois moindre, puisque l'ensemble doit donner le même résultat, c'est-à-dire que l'action d'un solénoïde est proportionnelle à la surface. On peut donc écrire, en désignant par p une constante,

$$m = p\frac{IS}{h}. \tag{5}$$

321. Équivalence d'un courant et d'un feuillet magnétique. — Considérons maintenant un solénoïde d'assez grande longueur pour qu'on n'ait pas à tenir compte de l'action du pôle négatif dans le champ des expériences.

Si l'on ajoute à l'extrémité positive un courant élémentaire S de même intensité I et à la distance h, le résultat est le même que si la masse m de ce pôle avait été déplacée de la quantité h parallèlement à la directrice; ce courant additionnel équivaut donc à deux masses $-m$ et $+m$ séparées par la distance h. Son moment magnétique est

$$mh = pIS,$$

c'est-à-dire que son action extérieure est la même que celle d'un feuillet de surface S, limité au même contour, dont la puissance magnétique serait pI.

La propriété étant démontrée pour un courant élémentaire se trouve établie pour un courant quelconque, puisqu'on peut diviser la surface du courant en une infinité de courants élémentaires dont toutes les lignes communes seront parcourues par des courants égaux et de sens contraires et n'auront aucune action extérieure.

D'autre part, le champ des courants rectilignes montre que le coefficient p est égal à l'unité. On est ainsi conduit à la traduction suivante du théorème célèbre d'Ampère :

Le champ magnétique d'un courant fermé est le même que celui d'un feuillet de même contour dont la puissance magnétique est égale à l'intensité du courant.

Il est important d'insister sur les conditions d'équivalence du courant et du feuillet. Nous avons vu qu'avec le feuillet, le

champ n'est pas une fonction continue des coordonnées ; il est constant dans l'intérieur du feuillet et change de signe au moment où l'on traverse l'une des surfaces ; les lignes de force émanent de part et d'autre de la face positive et sont absorbées par la face négative. Ces changements brusques n'existent pas dans le cas du courant fermé : le champ est une fonction continue des coordonnées ; les lignes de force sont des courbes fermées qui ne touchent pas le circuit et ne rencontrent aucune masse agissante. On conçoit qu'il puisse en être ainsi sans contradiction ; car le feuillet équivalent au courant est assujetti à la seule condition d'être limité au même contour, et on peut supposer, lorsqu'une masse magnétique se déplace dans le voisinage d'un courant, que le feuillet équivalent se déforme constamment et fuit devant elle sans être jamais rencontré.

L'analogie des deux systèmes devient plus étroite si, au lieu de considérer le champ magnétique d'un feuillet, on considère l'induction. On sait, en effet (**243**), que l'induction magnétique est une fonction continue des coordonnées, que le flux d'induction se conserve dans toute l'étendue d'un canal orthogonal, et que le champ et l'induction magnétiques ont la même valeur pour tout point situé en dehors des milieux aimantés. En particulier, l'induction magnétique dans l'épaisseur d'un feuillet est identique au champ qui s'y produirait si le feuillet, tout en conservant le même contour et la même puissance magnétique, était déformé de manière à ne plus comprendre le point considéré, et ce champ est égal à celui d'un courant équivalent qui suivrait le contour. Il en est évidemment de même pour un ensemble quelconque de courants ; d'où l'on déduit cette loi générale :

Un système quelconque de courants fermés équivaut à un système magnétique, et le champ des courants en un point est identique à l'induction au même point du système magnétique équivalent.

322. Énergie d'un système magnétique dans le champ d'un courant. — Appelant encore ω la surface apparente au point P de la face positive d'un courant I, dont l'intensité est supposée invariable, l'énergie potentielle d'une masse m située en P est, à une constante près, $m\mathrm{I}\omega$.

Si cette masse est parvenue au point P d'une distance très éloignée, après avoir traversé n fois la surface du courant par la face positive, elle a exigé la dépense d'un travail

$$W = mI(\omega + 4\pi n). \tag{6}$$

Inversement, si la masse est abandonnée à l'action du courant, elle tend à tourner indéfiniment dans le sens opposé et produit à chaque révolution le travail $m4\pi I$.

Supposons, par exemple, que l'on place un aimant uniforme long et flexible au voisinage d'un courant; le pôle positif tend à tourner indéfiniment dans un sens autour du courant, le pôle négatif en sens contraire, et l'aimant s'enroulerait en hélice sur le conducteur traversé par le courant.

Cette continuité de mouvement n'est pas possible avec deux systèmes magnétiques, parce que le potentiel est alors une simple fonction des coordonnées ; elle serait d'ailleurs incompatible avec le principe de la conservation de l'énergie. Dans le cas des courants, rien ne s'oppose à ce que le mouvement soit continu, parce que le phénomène est nécessairement entretenu par une énergie étrangère, telle que celle des actions chimiques qui s'effectuent dans les piles.

Toutefois, lorsque le système magnétique est rigide, ainsi que les conducteurs du courant, toutes les masses qui constituent l'aimant exécutent nécessairement le même nombre de révolutions dans le même sens et le travail correspondant à chaque tour est le produit de la somme des masses magnétiques par $4\pi I$. Comme cette somme est toujours nulle, le travail relatif à un déplacement quelconque ne dépend que des positions initiale et finale et non du chemin parcouru ; dans ce cas, le travail est nul lorsque l'aimant revient à sa position primitive.

Il est donc impossible d'obtenir le mouvement continu d'un aimant par le courant qui traverse un circuit rigide; l'action réciproque des deux systèmes est alors identique à celle de deux aimants. Le mouvement peut être continu, au contraire, si le circuit est déformable, s'il contient, par exemple, des parties liquides, des contacts glissants, ou s'il peut être brisé en certains points pendant que l'aimant se déplace.

Le produit $m\omega$ représente aussi le flux de force émis par la masse m dans la face positive du courant et $-m\omega$ le flux de force émis par cette masse dans la face négative. D'une manière générale, si un système magnétique émet le flux de force φ dans la face négative du courant, son énergie potentielle dans le champ est égale à $-I\varphi$ et le travail produit entre deux positions de l'aimant, désignées par les indices 1 et 2, est $I(\varphi_2 - \varphi_1)$, en supposant qu'il n'y ait aucune déformation du système ni du couraut.

323. Action des aimants sur les courants. — Dans l'expérience d'Œrsted, l'action doit être réciproque, de sorte que le courant, s'il était mobile, se déplacerait sous l'influence d'un aimant. On peut réaliser l'expérience d'une manière très simple en montant dans un liège deux lames de cuivre et de zinc réunies par un fil extérieur. L'appareil posé sur de l'eau acidulée constitue un courant à *circuit mobile*, qui obéit aux aimants et s'oriente sous l'action du champ terrestre. Si l'aimant est attaché au flotteur, le système reste en équilibre dans la position que lui a donnée le champ terrestre.

L'action f d'un pôle P de masse m sur un élément de courant, d'après la loi de Laplace, serait dirigée vers la droite de l'observateur d'Ampère qui regarde le pôle, ou encore vers la gauche de cet observateur qui regarderait dans la direction du champ F produit par le pôle.

En désignant par r la distance du pôle à l'élément ds du courant et par α l'angle de l'élément avec la droite r, on aurait

$$f = m\frac{I\,ds\sin\alpha}{r^2} = IF\,ds\sin\alpha.$$

C'est l'expression trouvée précédemment (**255**) pour l'action magnétique sur l'élément de contour d'un feuillet.

Il est à remarquer cependant, dans cette manière de voir, que, l'action de l'élément du courant sur le pôle étant appliquée au pôle, la réaction du pôle sur le courant serait appliquée au même point et non sur l'élément lui-même.

La contradiction disparaît quand on tient compte de cette circonstance que le courant est nécessairement fermé.

Considérons un axe quelconque PP′ (fig. 70) passant par le pôle P et remplaçons l'élément de courant au point M par ses

projections rectangulaires : l'une *ds* dans le plan méridien MPP′, l'autre perpendiculaire à ce plan. L'action du pôle sur cette dernière, étant située dans le méridien, n'a pas de couple par rapport à l'axe PP′. Pour la projection *ds*, on a

$$ds \sin\alpha = -r\,d\theta\,;$$

le couple produit par l'action du pôle sur l'élément de courant considéré, pour l'intensité I, est donc

$$\frac{m}{r^2}\,\mathrm{I}\,ds \sin\alpha \,.\, r\sin\theta = -m\sin\theta\,d\theta.$$

L'élément dont la projection *ds′*, qui correspond en M′ sur

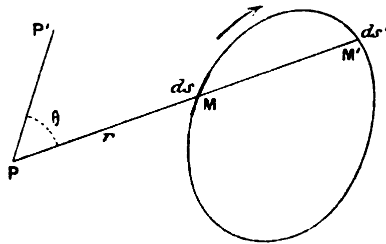


Fig. 70.

le circuit de retour aux mêmes valeurs de θ et $d\theta$, donne un couple $+m\sin\theta\,d\theta$ égal et de sens contraire au premier.

La résultante des actions du pôle sur ces deux éléments passe donc par l'axe PP′. Comme la direction de l'axe est arbitraire, on en conclut que la résultante de l'action du pôle sur le courant fermé passe par le pôle.

324. Déplacement ou déformation des courants. — L'énergie potentielle relative du courant I dans un champ magnétique est la même que celle du système magnétique par rapport au courant, c'est-à-dire $-\mathrm{I}\varphi$, φ désignant le flux de force émis par le champ dans la face négative du courant. Le travail qui correspond à un déplacement déterminé est $\mathrm{I}(\varphi_2-\varphi_1)$; c'est le produit de l'intensité du courant par la somme algébrique des flux de force *coupés* par les éléments.

Le circuit, mobile ou déformable, d'un courant d'intensité

constante, situé dans un champ magnétique, tend donc à se déplacer ou à se déformer de manière que le flux de force qui traverse la face négative soit maximum.

Soit S la surface d'un circuit plan, ou, d'une manière générale, la projection maximum d'un circuit quelconque sur un plan, qu'on appellera le *plan du courant*.

Si le circuit est mobile, sans se déformer, dans un champ uniforme F, la position d'équilibre stable correspond au cas où le flux de force qui entre par la face négative est maximum, c'est-à-dire quand le plan du courant est perpendiculaire au champ; l'énergie relative du courant par rapport au champ est alors $-IFS$. Si, à partir de cette première position, on

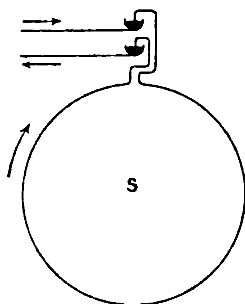


Fig. 71.

retourne le circuit face pour face, l'énergie devient $+IFS$ et l'on a dépensé le travail $2ISF$.

Si le circuit est mobile autour d'un axe incliné sur la direction du champ, on remplacera le champ par ses deux composantes, l'une parallèle et l'autre F' perpendiculaire à l'axe, et la surface du courant par ses deux projections, l'une perpendiculaire et l'autre S parallèle à l'axe. L'équilibre a lieu quand le champ F' est normal à la projection S et la traverse par sa face négative; l'énergie relative est alors $-IF'S$ et le travail nécessaire pour opérer une rotation de 180° est $2IF'S$. Ce travail est nul quand l'axe de rotation est parallèle au champ ou normal au plan du courant.

On obtient ces courants mobiles, soit avec des piles flottantes, soit en formant un cadre (fig. 71) de surface quelconque S dont les extrémités recourbées plongent, sur la même

verticale, dans des godets de mercure en relation avec les électrodes d'une pile.

Quand on soumet un tel circuit à l'action du champ terrestre, la composante horizontale H intervient seule. Le cadre tourne de façon que sa surface S soit perpendiculaire au méridien magnétique, la partie descendante du courant étant située à l'Est et la partie ascendante à l'Ouest, de sorte que le courant inférieur soit dirigé de l'Est à l'Ouest.

Si l'axe de rotation est horizontal et parallèle au méridien magnétique, la composante verticale Z est seule efficace; le cadre se met alors en équilibre dans un plan horizontal, le courant marchant de l'Est à l'Ouest par le Sud.

Une rotation de 180° à partir de la position d'équilibre exigerait le travail 2ISH, dans le premier cas, et le travail 2ISZ dans le second.

Le rapport des travaux correspondants est égal à celui des composantes H et Z, c'est-à-dire à la tangente de l'inclinaison magnétique. Si l'expérience permet, comme on le verra plus loin, de déterminer des quantités respectivement proportionnelles à ces travaux, on en déduira l'inclinaison sans avoir recours à l'emploi direct des aiguilles aimantées.

325. Circuits astatiques. — Le travail relatif à un déplacement quelconque est encore nul lorsque le circuit comprend

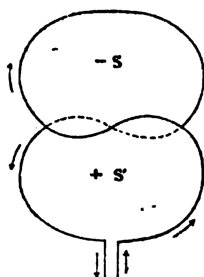


Fig. 72.

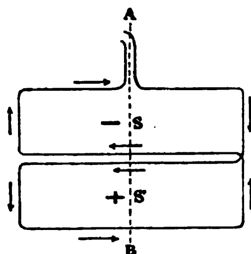


Fig. 73.

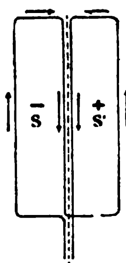


Fig. 74.

deux courbes fermées telles que leurs projections sur un plan quelconque donnent deux surfaces S et S′ entourées par des courants de sens contraires. C'est à cette condition que doivent satisfaire les courants mobiles, dits *astatiques*, dont les

circuits sont formés de manière que le courant ne soit pas soumis à l'action d'un champ uniforme comme celui de la terre. Les figures 72, 73, 74 fournissent des exemples de circuits conducteurs qui réalisent ces conditions.

Si les deux surfaces S et S′ n'étaient pas égales, l'action du champ serait proportionnelle à leur différence $S - S'$.

326. Actions électrodynamiques. — Un courant fermé et un feuillet magnétique, qui sont équivalents vis-à-vis d'un système magnétique quelconque, le sont-ils encore vis-à-vis d'un autre courant? Ainsi le courant C_1 et le feuillet équivalent S_1 de même contour peuvent être substitués l'un à l'autre en présence d'un système magnétique M_2.

Supposons que ce système soit un feuillet S_2; l'action réciproque des feuillets S_1 et S_2 est identique à celle qui s'exerce entre le feuillet S_1 et le courant C_2 équivalent au feuillet S_2; mais cette dernière action est-elle la même que celle qui aurait lieu entre les deux courants C_1 et C_2? L'affirmative paraît probable; mais ce n'est là qu'une induction et il serait facile de trouver des exemples pour lesquels le même mode de raisonnement conduirait à des conséquences manifestement erronées. Ainsi, dans des conditions choisies d'une manière convenable, il peut se faire que les actions exercées sur un aimant par un aimant ou par un morceau de fer doux soient les mêmes; on n'en saurait conclure que le fer doux et le dernier aimant, qui s'équivalent en présence du premier aimant, seraient encore équivalents vis-à-vis d'un autre morceau de fer doux.

L'action réciproque des courants serait démontrée si l'on était sûr que le champ terrestre fût produit par des courants, car l'action de ce champ est la même sur un aimant et sur le courant équivalent.

C'est donc comme un résultat expérimental, et non comme une déduction nécessaire de la théorie, que nous admettrons le théorème suivant d'Ampère :

L'action réciproque de deux courants fermés est identique à celle des deux feuillets magnétiques respectivement équivalents à chacun d'eux.

Les actions des courants sur les courants sont dites *électrodynamiques*. L'identité qui existe à ce point de vue entre

les courants et les feuillets magnétiques a d'ailleurs été confirmée sous toutes les formes, en tant du moins qu'un régime permanent est établi dans les circuits.

Nous citerons, en particulier, les nombreuses expériences exécutées par W. Weber [1] sur l'action réciproque de deux bobines cylindriques à bases circulaires. Cette action est proportionnelle au produit des intensités des deux courants; elle varie avec la distance et la direction relative des bobines suivant les mêmes lois que si l'on remplaçait les bobines par deux aimants uniformes dont les axes magnétiques seraient parallèles à ceux des bobines.

327. Énergie relative de deux courants. — Il résulte immédiatement de cette analogie (257) que l'énergie potentielle due à la position relative de deux courants fermés sera exprimée, à une constante près, par la formule

$$W = -II'M, \tag{7}$$

dans laquelle I et I' désignent les intensités des deux courants et M le flux de force qui, émanant de l'un des circuits, traverse l'autre par sa face négative, lorsque l'intensité dans chacun d'eux est égale à l'unité; c'est ce qu'on appellera plus loin le *coefficient d'induction mutuelle* des deux circuits.

Le travail dT des forces magnétiques correspondant à un déplacement infiniment petit sera donné par l'équation

$$dT = -dW = II'dM. \tag{8}$$

328. Formule de Neumann. — L'analogie des courants et des feuillets magnétiques donne immédiatement la valeur du coefficient d'induction mutuelle M de deux circuits en fonction des éléments du contour (257). Toutefois, il n'est pas nécessaire de recourir à cette méthode, car la loi de Laplace permet de trouver directement l'expression de Neumann.

Le flux de force émis dans une surface par un courant est la somme des flux relatifs à chacun des éléments.

Considérons un élément ds (fig. 75), que nous supposerons

[1] W. Weber, *Electrodynamische Maasbestimmungeu*, 1re partie; 1846.

parcouru par l'unité de courant; soit C′ le contour d'une surface S′, contour que l'on supposera parcouru dans le sens de la flèche afin que la face négative soit en avant.

En un point P situé à la distance $r = \mathrm{OP}$, le champ de l'élément ds est

$$f = \frac{ds \sin \alpha}{r^2};$$

la direction de ce champ est perpendiculaire au plan méridien $r\,ds$ et vers la gauche du courant, c'est-à-dire de l'avant à l'arrière de la figure.

Le flux de force qui traverse, dans le voisinage de P, un élément $d\mathrm{S}'$ de la surface est le produit du champ f par la

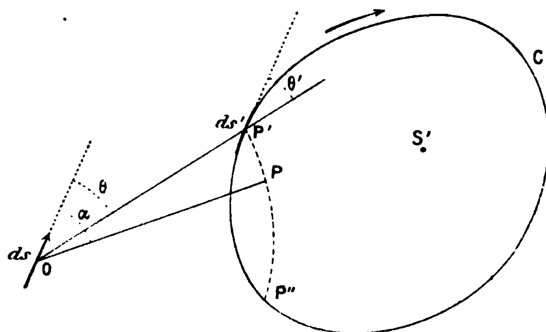


Fig. 75

projection de l'élément $d\mathrm{S}'$ sur le plan méridien; on peut prendre, pour cette projection, l'élément $r\,dr\,d\alpha$ limité par l'angle $d\alpha$ et les rayons vecteurs r et $r + dr$. Le flux de force élémentaire est donc

$$f r\,dr\,d\alpha = ds \frac{dr}{r} \sin \alpha\, d\alpha.$$

Le flux de force total φ dans la surface S′ est l'intégrale de cette expression étendue à toute la surface, c'est-à-dire

$$\varphi = ds \iint \frac{dr}{r} \sin \alpha\, d\alpha = ds \int \frac{dr}{r} \int \sin \alpha\, d\alpha.$$

Pour une valeur constante de la distance r, la dernière

intégrale est simplement $\cos\alpha' - \cos\alpha''$, en désignant par α' et α'' les valeurs de l'angle α relatives aux points P' et P'' où la sphère de rayon r rencontre le contour C'. Le second terme, ayant le signe $-$, correspond à une valeur négative de dr quand on suit le contour C' dans le sens indiqué.

On peut donc écrire, en désignant par θ la valeur de l'angle α' relative à un point quelconque du contour,

$$\varphi = ds \int_{C'} \frac{\cos\theta}{r}\, dr.$$

Appelant θ' l'angle que fait la tangente au point P' avec le rayon vecteur $r = OP'$, et ds' l'élément de contour compris entre les sphères de rayons r et $r + dr$, on a $dr = ds' \cos\theta'$; la valeur de φ peut donc s'écrire

$$\varphi = ds \int_{C'} \frac{\cos\theta \cos\theta'}{r}\, ds'.$$

Si l'on désigne par ε l'angle des éléments ds et ds', et par ω l'angle des plans $r\,ds$ et $r\,ds'$, on a

$$\cos\varepsilon = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos\omega.$$

En tenant compte de cette relation, l'expression du flux de force devient

$$\varphi = ds \int_{C'} \frac{ds' \cos\varepsilon}{r} - ds \int_{C'} \frac{ds' \sin\theta \sin\theta' \cos\omega}{r}.$$

Or, la dernière intégrale est nulle. Il suffit de remarquer, en effet, que le produit $ds' \sin\theta' \cos\omega$ représente la projection de l'élément ds' sur la normale au rayon vecteur r, dans le plan méridien $r\,ds$, c'est-à-dire $-r\,d\theta$, ce qui donne

$$\int_{C'} \frac{ds' \sin\theta \sin\theta' \cos\omega}{r} = -\int_{C'} \sin\theta\, d\theta.$$

Il est clair que cette expression est nulle quand on suit le contour dans un sens déterminé pour revenir au même

point, puisque l'angle θ reprend au retour la même valeur. Il reste finalement

$$\varphi = ds \int_{C'} \frac{ds' \cos \varepsilon}{r}.$$

Le flux de force émis par l'élément ds dans la surface S' est ainsi exprimé en fonction des éléments du contour C'.

La formule de Neumann s'en déduit immédiatement, car le flux émis dans la surface S' par le circuit C, dont l'élément ds fait partie, ou le coefficient d'induction mutuelle M des circuits C et C', est la somme des flux relatifs aux divers éléments, c'est-à-dire

$$(9) \qquad M = \int ds \int \frac{ds' \cos \varepsilon}{r} = \iint \frac{ds\, ds' \cos \varepsilon}{r},$$

expression que l'on peut écrire, en fonction des projections rectangulaires des éléments,

$$(10) \qquad M = \iint \frac{dx\, dx' + dy\, dy' + dz\, dz'}{r}.$$

329. Unités électromagnétiques. — On avait défini d'abord l'intensité d'un courant par la quantité d'électricité, déduite de la loi de Coulomb sur l'action réciproque des corps électrisés, qui traverse chacune des sections du conducteur pendant l'unité de temps ; le courant est alors mesuré en unités dites *électrostatiques*.

On a ensuite (317) défini l'intensité *électromagnétique* I d'un courant par la puissance magnétique U du feuillet équivalent, laquelle se déduit de la loi de Coulomb relative à l'action réciproque des aimants. Comme la fonction U représente un potentiel (246), ou le quotient d'une masse magnétique par une distance, le carré I^2, ou le produit de deux intensités de courant, est le quotient du produit de deux masses magnétiques par le carré d'une distance, c'est-à-dire une force mécanique.

Ce changement dans l'expression de l'intensité amène nécessairement des modifications correspondantes dans l'éva-

luation des autres grandeurs électriques. Si l'on veut que l'intensité représente toujours la quantité d'électricité que débite un courant uniforme pendant l'unité de temps, le produit It est la mesure de la quantité débitée pendant le temps t, et cette mesure détermine l'unité d'électricité.

Si le courant ne produit pas d'autre travail que l'échauffement des conducteurs, l'énergie calorifique dégagée pendant le temps t, d'après la loi de Joule, peut être encore représentée par I^2Rt; cette expression déterminera la résistance R du conducteur et, par suite, l'unité de résistance.

Enfin, la loi d'Ohm, mise sous la forme $E = IR$, déterminera l'unité de force électromotrice par les unités de courant et de résistance.

Il importe de remarquer ici que, si l'on continue d'employer les mêmes expressions pour désigner des grandeurs physiques analogues, telles qu'intensité de courant, forces électromotrices, résistances, etc., en représentant les lois par des formules dégagées de coefficients parasites, ces grandeurs correspondantes ne sont plus des quantités de même nature quand on passe d'un système à l'autre.

Ainsi, tandis que la résistance électrostatique r d'un conducteur est l'inverse d'une vitesse (**154**), la résistance électromagnétique R est au contraire une vitesse.

En effet, l'expression I^2Rt est un travail, c'est-à-dire le produit d'une force mécanique par une longueur. Comme le facteur I^2 est une force, il en résulte que le produit Rt est une longueur, c'est-à-dire que la résistance R est une vitesse.

Pour un même conducteur, le rapport des résistances R et r est ainsi le carré d'une vitesse, et ce rapport est une quantité constante, quelles que soient les dimensions du conducteur.

Nous établirons plus loin, d'une manière générale, les relations générales qui existent entre les unités *électrostatiques* et les unités *électromagnétiques*.

330. Application au champ terrestre. — Si le champ magnétique terrestre est produit par des courants électriques qui se propagent dans le sol et même en partie par des courants qui restent entièrement extérieurs, l'action magnétique au voisinage de la surface de la Terre est encore la même que celle des feuillets équivalents, c'est-à-dire d'un système de

masses magnétiques. Il existerait alors une fonction des forces, un véritable potentiel magnétique et rien ne serait à modifier dans la théorie de Gauss (ch. VI).

Mais il peut arriver que des courants électriques empruntent la Terre dans une portion seulement de leur trajet, qu'ils émanent d'une région pour aboutir à une autre, après s'être propagés dans les régions élevées de l'atmosphère. Dans ce cas, le potentiel peut être considéré comme formé de deux parties de caractères différents, l'une proprement magnétique et l'autre électromagnétique.

Le long d'un chemin fermé à la surface du sol, le travail du champ sur l'unité de magnétisme n'est plus nul (**308**), mais égal au produit de 4π par l'intensité totale I du courant qui traverse la surface enveloppée par le contour.

Supposons que l'on ait tracé sur la surface du globe l'ensemble des méridiennes magnétiques définies par la condition d'être tangentes en chaque point à la direction de la composante horizontale; les courbes orthogonales à ces méridiennes ne sont pas nécessairement fermées et il n'y a plus de parallèles magnétiques proprement dits.

Si, partant du point A situé sur un méridienne, on suit une orthogonale S, le premier retour de cette ligne à la méridienne primitive la coupera en un point B différent de l'origine. Sur le chemin fermé ASBA, le travail du champ est nul pour toute la portion orthogonale ASB; mais, en désignant par ds un élément de la méridienne et par H la valeur correspondante de la composante horizontale, il reste pour le chemin BA le travail

$$(11) \qquad \int_B^A H\, ds = 4\pi I.$$

On pourra ainsi déterminer le courant total I qui traverse la surface limitée au chemin suivi.

Les observations semblent indiquer qu'une fraction appréciable du champ terrestre doit ainsi être attribuée à des courants électriques. Partant d'un point de l'équateur géographique, si l'on mène dans l'hémisphère Nord une orthogonale aux méridiennes dirigée d'abord vers l'Ouest, cette ligne paraît former une sorte de spirale dont les branches successives,

d'abord assez rapprochées, s'écartent davantage dans les latitudes moyennes et se resserrent dans la zone polaire.

Comme l'expression (11) donne alors un travail négatif, il en résulterait qu'un ensemble de courants électriques, traversant la Terre du Sud au Nord, émergent ensuite par la surface de l'hémisphère Nord pour revenir à l'autre hémisphère, après s'être propagés dans l'atmosphère.

Admettons, par exemple, comme semblent l'indiquer les cartes magnétiques du globe, que la distance des spires au voisinage de l'équateur soit d'environ 2°,5 ou 28.10^6 centimètres. En prenant 0,33 pour la valeur moyenne de la composante horizontale, on aurait donc

$$4\pi I = 0{,}33.28.10^6 = 9{,}2.10^6.$$

Il en résulte $I = 0{,}73.10^6$; un tel courant correspondrait, comme on le verra plus loin (**421**), à 7,3 millions d'ampères.

Si ce courant était distribué d'une manière à peu près uniforme sur la surface $2\pi a^2$ de chaque hémisphère, l'intensité par unité de surface serait

$$\frac{I}{2\pi a^2} = \frac{\pi I}{2\pi^2 a^2} = 0{,}003.10^{-10}.$$

C'est donc un courant égal à 0,003 en unités C.G.S., ou à 0,03 ampère par kilomètre carré.

CHAPITRE DEUXIÈME

ACTIONS ÉLÉMENTAIRES

331. Action réciproque de deux éléments de courants. — De même que l'action de deux feuillets magnétiques peut s'exprimer en fonction des éléments des contours (258), l'action réciproque de deux courants peut aussi être considérée comme l'ensemble des forces qui s'exerceraient entre les éléments linéaires considérés deux à deux.

Une loi élémentaire n'est pas directement abordable par l'expérience. Il est possible, à la rigueur, d'étudier l'action d'un pôle sur un élément de courant, si l'on rend mobile une portion très petite du circuit, mais on ne peut pas faire agir un élément de courant sur un pôle, puisque le courant est toujours *fermé*, soit par un flux réel d'électricité lorsqu'il ne parcourt que des conducteurs, soit par le déplacement électrique (98) quand le circuit renferme des diélectriques.

De même, on peut observer l'action d'un courant fermé sur un élément de courant, mais non celle qui s'exerce entre deux éléments.

L'action d'un champ magnétique sur un élément de courant est entièrement définie par la loi de Laplace ; son point d'application est sur l'élément. Quant à l'action réciproque de l'élément sur un pôle magnétique, elle a la même valeur en sens contraire, mais on peut l'appliquer arbitrairement sur l'élément ou sur le pôle. Il est donc permis de considérer le champ magnétique d'un courant comme la résultante des champs produits, en vertu de la loi de Laplace, par chacun

des éléments du contour. Avec cette hypothèse, le champ élémentaire des courants se trouve déterminé.

Si ds est un élément d'un courant I, le champ produit à la distance r dans une direction qui fait l'angle θ avec celle du courant, c'est-à-dire l'action que cet élément exercerait sur l'unité de magnétisme, est perpendiculaire au plan $r\,ds$ et égal à $\frac{\mathrm{I}\,ds\sin\theta}{r^2}$. Pour l'unité de courant, cette action est

$$f = \frac{ds\sin\theta}{r^2}. \tag{1}$$

La recherche d'une action élémentaire entre les courants répond, au contraire, à une conception purement mathématique; ce genre de considérations, tout en laissant une part d'arbitraire, n'en est pas moins légitime si l'on impose aux actions élémentaires la seule condition que leur résultante relative à un circuit fermé reproduise, pour l'action d'un courant sur un élément, une loi conforme à celle qui a été établie par l'expérience.

Nous supposerons, pour simplifier, que les circuits que l'on envisage sont parcourus par l'unité du courant. Les actions réelles s'obtiendront en multipliant le résultat final par le produit des intensités I et I′ des deux courants.

La solution la plus directe consiste à admettre que l'action d'un élément sur un autre est celle que produirait le champ magnétique f du premier.

Soient ds et ds' les deux éléments, r la distance qui les sépare, θ et θ' les angles que fait avec la direction des courants la droite r comptée de ds vers ds'.

Menons par un point O (fig. 76) des droites OC et OC′ respectivement parallèles aux éléments ds et ds', l'axe des x étant parallèle à r, et le plan xy parallèle au plan $r\,ds$.

Le champ f est perpendiculaire au plan $r\,ds$, c'est-à-dire au plan xy, et dirigé d'avant en arrière.

Le plan directeur de l'action g de ce champ sur l'élément ds' est $f\,ds'$. Cette action est perpendiculaire au plan $f\,ds'$, c'est-à-dire perpendiculaire à l'élément ds' et au champ f; elle est donc située dans le plan $f\,ds$, et dirigée vers la gauche; elle a pour valeur l'aire du parallélogramme $f\,ds'$. Désignant par μ'

l'angle de l'élément ds' avec le plan rds, on a donc

$$(2) \qquad g = f\,ds' \cos\mu' = \frac{ds\,ds' \sin\theta \cos\mu'}{r^2}.$$

Si les intensités sont respectivement I et I', l'action élémentaire ψ devient

$$(3) \qquad \psi = \mathrm{II}' \frac{ds\,ds' \sin\theta \cos\mu'}{r^2}.$$

C'est la formule de Reynard (¹), déjà indiquée par Ampère (²) comme une solution du problème.

On serait arrivé au même résultat par la notion du travail électromagnétique.

Si l'élément ds' se déplace parallèlement à lui-même, le

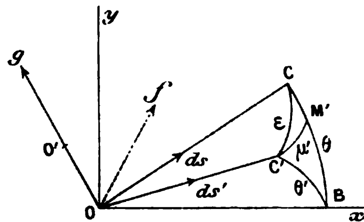


Fig. 76.

travail du champ f est le flux de force coupé, c'est-à-dire le produit du champ par la projection, sur un plan perpendiculaire, de l'aire décrite par l'élément ds'.

Cette aire est un parallélogramme dont l'un des côtés est ds'; l'aire de la projection est celle d'un rectangle qui a pour côtés la projection $ds' \cos\mu'$ de l'élément et la projection OO' du déplacement sur la direction de la force g, laquelle est perpendiculaire à OM'. Le travail est donc

$$f\,ds' \cos\mu' . \mathrm{OO'} = g . \mathrm{OO'};$$

le résultat est donc le même que si l'élément ds' était soumis à la force g.

(¹) REYNARD, *Ann. de ch. et de phys.* (4). t. XIX, p. 272; 1870.
(²) AMPÈRE, *Mémoires de la Société de Phys.* t. III, p. 123.

332. Expression analytique. — Rapportons le problème à trois axes rectangulaires (fig. 77), en prenant pour axe des z la direction de l'élément ds'.

Soient x, y, z les coordonnées du point P où se trouve l'élément ds, θ et θ' les angles de la droite $OP = r$ avec les directions des éléments ds et ds'.

L'action g de ds sur ds' est dans le plan rds et perpendiculaire à ds'; elle est donc dans le plan des xy et dirigée suivant la trace OG du plan rds.

On peut écrire

$$g = \frac{ds\,ds'\sin\theta\cos\mu'}{r^2} = \frac{ds'\cos\mu'}{r^3}\cdot r\,ds\sin\theta = \frac{A}{r^3}\,ds'\cos\mu'.$$

Le produit $r\,ds\sin\theta$ représente l'aire A du parallélogramme formé par les côtés r et ds.

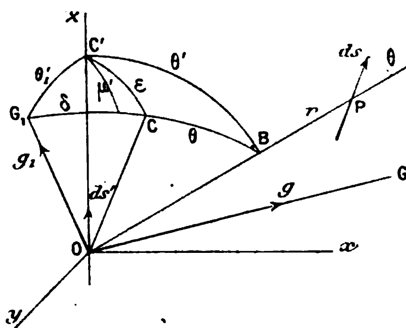


Fig. 77.

Désignons par α, β, γ les angles que fait avec les axes la normale N (fig. 78) au plan rds; l'angle γ est complémentaire de l'angle μ' que fait l'élément ds' avec le plan rds.

La trace OG du plan étant perpendiculaire à la projection ON' de la normale ON, on a, en appelant α' et β' les angles de la droite ON' avec les axes des x et des y,

$$\cos\alpha = \cos\alpha'\sin\gamma = \cos\alpha'\cos\mu',$$

$$\cos\beta = \cos\beta'\sin\gamma = \cos\beta'\cos\mu'.$$

D'autre part, les angles de la droite OG avec les axes des x et des y sont respectivement β' et $-\alpha'$.

Les composantes ξ et η de la force g sont donc

$$\xi = g\cos\beta' = ds'\frac{A}{r^3}\cos\mu'\cos\beta' = ds'\frac{A}{r^3}\cos\beta,$$

$$\eta = -g\cos\alpha' = -ds'\frac{A}{r^3}\cos\mu'\cos\alpha' = -ds'\frac{A}{r^3}\cos\alpha.$$

La normale N étant perpendiculaire à la droite r et à l'élé-

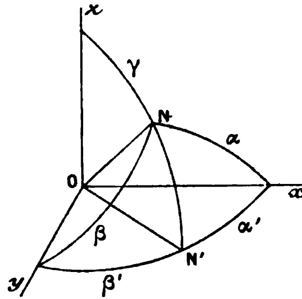


Fig. 78.

ment ds dont les projections sont dx, dy et dz, on déduit des relations

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0,$$
$$dx.\cos\alpha + dy.\cos\beta + dz.\cos\gamma = 0,$$

$$\frac{x\,dy - y\,dz}{\cos\gamma} = \frac{y\,dz - z\,dy}{\cos\alpha} = \frac{z\,dx - x\,dz}{\cos\beta} = r\,ds\sin\theta = A.$$

Il en résulte

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{ds'}{r^3}(z\,dx - x\,dz) = ds'\dfrac{z^2}{r^3}\,d\left(\dfrac{x}{z}\right), \\ \eta = \dfrac{ds'}{r^3}(z\,dy - y\,dz) = ds'\dfrac{z^2}{r^3}\,d\left(\dfrac{y}{z}\right), \end{cases}$$

et la composante ζ parallèle à l'élément ds' est nulle.

333. Formule générale. — Cas particuliers. — On peut maintenant, comme on l'a fait déjà (**258**) à propos des feuillets magnétiques, ajouter à chacune des composantes la différentielle exacte d'une fonction des coordonnées du point P, puisque ces termes disparaissent quand on considère l'action totale du circuit dont l'élément ds fait partie.

En désignant par X, Y et Z des fonctions arbitraires, on peut donc prendre, comme expressions générales des composantes de l'action de l'élément ds sur ds',

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= ds'\left[d\mathrm{X} + \frac{z^2}{r^3}\, d\left(\frac{x}{z}\right)\right], \\ \eta &= ds'\left[d\mathrm{Y} + \frac{z^2}{r^3}\, d\left(\frac{y}{z}\right)\right], \\ \zeta &= ds'\, d\mathrm{Z}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on admet, avec Ampère, que l'action des deux éléments est dirigée suivant la droite OP qui les joint (fig. 77), les trois composantes ξ, η et ζ de la force g, considérée comme attractive, sont respectivement proportionnelles aux coordonnées x, y et z du point P, ce qui donne

$$\frac{1}{x}\left[d\mathrm{X} + \frac{z^2}{r^3}\, d\left(\frac{x}{z}\right)\right] = \frac{1}{y}\left[d\mathrm{Y} + \frac{z^2}{r^3}\, d\left(\frac{y}{z}\right)\right] = \frac{d\mathrm{Z}}{z} = \frac{g}{r\,ds'}.$$

On en déduit

$$d\mathrm{X} = \frac{x}{z}\, d\mathrm{Z} - \frac{z^2}{r^3}\, d\left(\frac{y}{z}\right),$$

$$d\mathrm{Y} = \frac{y}{z}\, d\mathrm{Z} - \frac{z^2}{r^3}\, d\left(\frac{y}{z}\right).$$

Les seconds membres seront en même temps des différentielles exactes si l'on donne à Z la valeur $\frac{z^2}{r^3}$, d'où résulte

$$\mathrm{X} = \frac{z^2}{r^3} \colon \frac{x}{z} = \frac{z^3}{x r^3}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{z^3}{y r^3};$$

$$g = ds'\, \frac{r}{z}\, d\left(\frac{z^2}{r^3}\right) = 2\, \frac{ds'}{r^2}\left(dz - \frac{3}{2}\, \frac{z}{r}\, dr\right).$$

Menant la droite OC parallèle à ds et désignant par ε l'angle CC' des deux éléments, on a

$$dz = ds\cos\varepsilon, \qquad \frac{z}{r} = \cos\theta, \qquad dr = ds\cos\theta;$$

$$g = 2\frac{ds\,ds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right).$$

Si l'on appelle enfin ω l'angle CBC' formé par les plans $r\,ds$ et $r\,ds'$, I et I' les intensités des courants, l'action élémentaire ψ peut s'écrire, en tenant compte de la relation

$$\cos\varepsilon = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\omega,$$

$$(6)\qquad \begin{cases} \psi = 2\,\mathrm{II}'\dfrac{ds\,ds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \dfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right), \\ \psi = 2\,\mathrm{II}'\dfrac{ds\,ds'}{r^2}\left[\sin\theta\sin\theta'\cos\omega - \dfrac{\cos\theta\cos\theta'}{2}\right]. \end{cases}$$

C'est la formule habituelle d'Ampère.

Supposons encore que l'on pose, en désignant par u une fonction des coordonnées,

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = u,$$

c'est-à-dire que l'on ajoute à la valeur primitive de g une action nouvelle g_1 dont les composantes sont

$$\begin{aligned} \xi_1 &= ds'\,d(xu) = ds'(x\,du + u\,dx), \\ \eta_1 &= ds'\,d(yu) = ds'(y\,du + u\,dy), \\ \zeta_1 &= ds'\,d(zu) = ds'(z\,du + u\,dz); \end{aligned}$$

$$g_1^2 = ds'^2(r^2\,du^2 + u^2\,ds^2 + 2u\,du\,.\,r\,dr).$$

On peut écrire, en remarquant que

$$ds^2 = ds^2\cos^2\theta + ds^2\sin^2\theta = dr^2 + ds^2\sin^2\theta,$$

$$g_1^2 = ds'^2\Big[[d(ur)]^2 + u^2\,ds^2\sin^2\theta\Big].$$

L'angle θ_1 que fait la direction de g_1 avec la droite r est déterminé par la relation

$$\frac{rg_1}{ds'}\cos\theta_1 = xd(xu) + yd(yu) + zd(zu) = r^2\,du + ur\,dr = rd(ur),$$

$$\cos\theta_1 = \frac{ds'}{g_1}\,d(ur).$$

Si l'on veut que g_1 soit perpendiculaire à la distance r, il faut que le produit ur soit une constante a; par suite

$$(\alpha)\qquad u = \frac{a}{r},\qquad g_1 = u\,ds\,ds'\sin\theta = a\frac{ds\,ds'}{r}\sin\theta.$$

L'action élémentaire ψ se compose alors de deux forces, l'une donnée par la formule (3) de Reynard, en raison inverse du carré de la distance, l'autre ψ_1 perpendiculaire à la distance r et en raison inverse de la simple distance

$$(7)\qquad \psi_1 = a\mathrm{II}'\frac{ds\,ds'}{r}\sin\theta.$$

L'angle δ de g_1 avec l'élément ds est

$$\frac{g_1\,ds}{ds'}\cos\delta = dx\,d(xu) + dy\,d(yu) + dz\,d(zu) = du.r\,dr + u\,ds^2,$$

$$\cos\delta = \frac{ds'\,dr}{g_1\,ds}\,d(ur) + u\,\frac{ds\,ds'}{g_1}\sin^2\theta.$$

Avec la condition (α), il reste simplement

$$\cos\delta = \sin\theta,\qquad \delta = 90^\circ - \theta.$$

Finalement, l'action ajoutée g_1 est perpendiculaire à la distance r et fait avec l'élement ds un angle complémentaire de θ; elle est donc dirigée suivant la droite OG_1 (fig. 77) située dans le plan $r\,ds$.

Enfin l'angle θ'_1 de sa direction avec celle de l'élément ds', auquel elle est appliquée, est

$$\cos\theta'_1 = \sin\theta'\cos\omega = \frac{\cos\varepsilon - \cos\theta\cos\theta'}{\sin\theta}.$$

Cette hypothèse de deux forces différentes ψ et ψ_1, l'une en raison inverse du carré de la distance et l'autre de la simple distance a été émise par Grassmann [1].

Les équations (5) montrent d'ailleurs que le problème comporte un nombre indéterminé de solutions différentes, mais il serait sans aucune utilité de les examiner parce qu'on ne fait jamais usage de la loi élémentaire.

334. Méthode d'Ampère. — L'importance du sujet et l'intérêt que présentent les raisonnements et les expériences d'Ampère justifient un nouvel exposé de la question d'après les idées de l'illustre physicien; nous le ferons d'une manière un peu différente, en nous inspirant de sa méthode, mais sans suivre strictement le même mode d'exposition.

Ampère s'appuie sur un certain nombre de principes, qui sont ou des hypothèses ou des axiomes évidents, et sur des faits empruntés à l'expérience.

Pour déterminer l'action d'un pôle sur un élément, on s'appuie sur les principes suivants :

1° *Égalité de l'action et de la réaction.* — L'action d'un aimant sur un courant est égale et directement opposée à celle du courant sur l'aimant.

C'est une loi générale de la nature qui se vérifie dans le cas actuel (**323**) par l'instabilité d'un système mobile qui porte un aimant et un courant.

2° *L'action change de signe avec le signe du pôle ou le sens du courant.* — C'est la conséquence du fait général (**314**) que le courant produit un champ magnétique.

L'action reste la même quand on change à la fois le signe du pôle et le sens du courant.

3° *Principe des courants sinueux.* — Ampère vérifie ce principe par expérience en montrant que deux conducteurs aboutissant aux mêmes extrémités, l'un rectiligne et l'autre sinueux, ont une action nulle sur un aimant situé à une distance notable par rapport à l'intervalle qui les sépare, quand ils sont traversés en sens contraires par le même courant.

Ce principe pourrait conduire à des conséquences erronées

(1) Grassmann, *Pogg. Annal.*, t. LXIV, p. 1; 1845.

si le courant sinueux était enroulé en hélice autour du courant rectiligne, car le système constituerait alors un solenoïde électrodynamique (320) ; on n'en fait d'ailleurs usage que pour remplacer un élément de courant par ses projections ou par un contour polygonal aboutissant à ses extrémités.

4° *L'action d'un aimant sur un élément de courant est perpendiculaire à l'élément.* — Pour démontrer ce résultat expérimental, Ampère emploie un conducteur métallique courbé en arc de circonférence, rendu mobile autour de son axe par un équipage convenable, et posant sur deux surfaces de mercure respectivement en communication avec deux électrodes qui amènent et emportent le courant.

L'action d'un aimant quelconque laisse l'arc immobile : les actions élémentaires passent donc par l'axe de rotation, c'est-à-dire qu'elles sont normales aux éléments du courant.

L'expérience est bien démonstrative, car l'arc se met en mouvement dans un sens ou dans l'autre quand il peut tourner autour d'une droite autre que son axe.

5° *L'action d'un aimant sur un élément de courant est appliquée à l'élément.* — La démonstration de cette propriété sera empruntée encore à l'expérience.

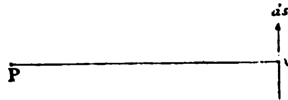


Fig. 79.

Une tige métallique verticale, recourbée à sa partie supérieure, est terminée par deux pointes qui posent dans des godets contenant du mercure, et peut ainsi tourner autour de son axe ; des électrodes plongeant dans le liquide permettent de faire traverser la tige par un courant.

Ce courant rectiligne reste immobile sous l'action d'un système magnétique quelconque ; le conducteur se met au contraire en mouvement dès qu'il présente des parties notables situées en dehors de l'axe de rotation.

6° *Principe de symétrie.* — Des raisons de symétrie suffiront maintenant pour déterminer la direction de la force.

On voit d'abord que l'action d'un pôle P (fig. 79) sur un

élément ds normal à la droite r qui les joint est perpendiculaire au plan rds. En effet, on sait (5°) que cette action est normale à l'élément et change de signe avec le sens du courant (2°); elle est aussi perpendiculaire au plan rds, car elle doit devenir symétrique de sa direction primitive quand on fait tourner la figure de 180° autour de la droite r.

L'action d'un pôle P (fig. 80) sur un élément ds dont la

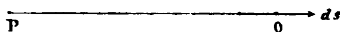


Fig. 80.

direction passe par le pôle est nulle, car elle est perpendiculaire à l'élement et ne doit pas changer quand on tourne la figure d'un angle quelconque autour de la droite r.

Les résultats sont évidemment les mêmes quand on remplace le pôle unique par un champ magnétique quelconque d'intensité F. Si l'élément ds fait l'angle α avec la direction du champ, on le remplacera par ses projections, l'une $ds\cos\alpha$ parallèle au champ, sur laquelle l'action est nulle, et l'autre $ds\sin\alpha$ perpendiculaire au champ.

L'action f étant, toutes choses égales, proportionnelle à l'intensité i du courant, à la longueur de l'élément et à l'intensité du champ, on peut écrire

$$f = ki\mathrm{F}\,ds\sin\alpha = \mathrm{IF}\,ds\sin\alpha.$$

La force f est perpendiculaire au plan $\mathrm{F}ds$, qu'Ampère désigne sous le nom de *plan directeur*, et proportionnelle à l'aire du parallélogramme $\mathrm{F}ds$; c'est la loi de Laplace.

Au lieu d'écrire immédiatement cette expression générale, on peut dire que l'action d'un pôle m sur un élément ds, incliné de l'angle α sur la droite qui les joint, est de la forme $mkif(r)ds\sin\alpha$ et déterminer $f(r)$ par les expériences de Biot et Savart. Il est facile de montrer d'ailleurs que la loi de l'inverse du carré de la distance est la seule qui satisfasse à ces expériences.

Considérons deux courants rectilignes parallèles S et S′, aux distances a et a' (fig. 81) d'un pôle magnétique P situé

dans leur plan commun. Pour deux éléments ds et ds', qui correspondent au même angle $-d\alpha = d\theta$, on a

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{r}{r'} = \frac{a}{a'}.$$

Si les actions relatives aux éléments correspondants ds et ds' sont dans le rapport des actions totales, on a

$$\frac{f(r)\,ds}{f(r')\,ds'} = \frac{r f(r)}{r' f(r')} = \frac{a'}{a} = \frac{r'}{r},$$

$$r^2 f(r) = r'^2 f(r').$$

L'action est donc en raison inverse du carré de la distance.

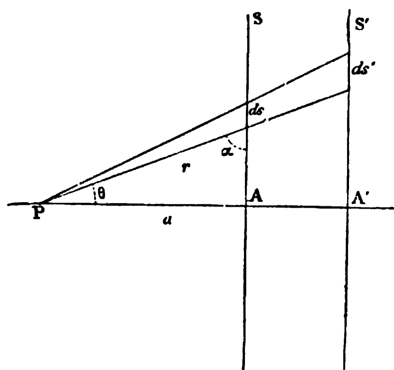


Fig. 81.

Il est vrai que l'action du pôle sur le courant rectiligne est appliquée en A sur le courant, tandis que l'action du courant sur le pôle est appliquée au pôle, mais on a vu (**323**) que cette contradiction apparente tient à la nécessité de faire intervenir dans le second cas la totalité du courant fermé.

335. Action réciproque d'un pôle et d'un courant. — Au lieu de vérifier que la loi du carré de la distance satisfait aux expériences de Biot et Savart, on peut laisser la loi indéterminée et s'appuyer sur cet autre fait expérimental que l'action d'un pôle sur un courant fermé passe par le pôle, ce qui revient à admettre que le courant produit un champ magnétique.

L'action de l'unité de pôle situé à l'origine des coordonnées

sur l'élément ds (fig. 77), parcouru par l'unité de courant et situé à la distance r, peut alors s'écrire

$$f(r)\,ds\sin\theta = \frac{f(r)}{r}\,r\,ds\sin\theta = \mathrm{A}\,\frac{f(r)}{r}.$$

Cette force étant perpendiculaire au plan directeur $r\,ds$, ses composantes sont (**332**)

$$\xi = \frac{f(r)}{r}\,\mathrm{A}\cos\alpha = \frac{f(r)}{r}(y\,dz - z\,dy),$$
$$\eta = \frac{f(r)}{r}\,\mathrm{A}\cos\beta = \frac{f(r)}{r}(z\,dx - x\,dz),$$
$$\zeta = \frac{f(r)}{r}\,\mathrm{A}\cos\gamma = \frac{f(r)}{r}(x\,dy - y\,dx).$$

Le couple $d\mathrm{C}$ de cette action par rapport à l'axe des z est

$$d\mathrm{C} = \eta x - \xi y = \frac{f(r)}{r}\Big[z(x\,dx + y\,dy) - (x^2 + y^2)\,dz\Big],$$
$$d\mathrm{C} = \frac{f(r)}{r}(z\,r\,dr - r^2\,dz) = f(r)(z\,dr - r\,dz) = -\,r^3 f(r)\,d\left(\frac{z}{r}\right).$$

Comme le rapport $\frac{z}{r}$ est le cosinus de l'angle θ' que fait la droite r avec l'axe des z, le couple total de l'action du pôle sur un arc AB du courant est

$$\mathrm{C} = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} r^3 f(r)\,d(\cos\theta') = \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} r^2 f(r)\,d(\cos\theta').$$

En intégrant cette expression par parties, il vient

$$\mathrm{C} = \Big[r^2 f(r)\cos\theta'\Big]_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} - \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \cos\theta'\,d\Big[r^2 f(r)\Big].$$

Lorsque le courant est fermé, le premier terme du second membre est nul. Le couple étant nul, quelle que soit la forme du circuit, puisque la résultante passe par le pôle, il faut que le second terme soit identiquement nul, c'est-à-dire que

le produit $r^2 f(r)$ soit une constante. L'action est donc en raison inverse du carré de la distance.

Si les extrémités de l'axe AB sont situées sur l'axe des z et qu'il puisse tourner autour de cet axe sans interrompre la continuité du circuit, le couple produit par le pôle m sur le courant I devient alors, en désignant par α et β les valeurs de l'angle θ' relatifs aux extrémités A et B,

$$C = m\mathrm{I}\Big[\cos\theta'\Big]_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} = m\mathrm{I}(\cos\alpha - \cos\beta).$$

Deux circonstances peuvent se présenter, suivant que le pôle est en dehors de la distance AB ou dans l'intervalle de ces deux points.

Dans le premier cas, les deux cosinus ont la même valeur et le couple est nul; l'arc reste immobile.

Dans le second cas, les cosinus sont égaux l'un à $+1$ et l'autre à -1, et le couple devient

$$C = 2m\mathrm{I}.$$

Lorsque l'arc a fait un tour complet, le travail du pôle est

$$2\pi C = 4\pi m\mathrm{I} = \mathrm{I}.4\pi m.$$

Le travail du courant sur le pôle, ou du pôle sur le courant, est le produit de l'intensité I par le flux de force $4\pi m$ qui émane du pôle, comme on l'a vu déjà (**319**).

Les composantes X, Y et Z du champ magnétique F produit par un courant I sur l'origine des coordonnées sont respectivement les intégrales des valeurs de $\mathrm{I}\xi$, $\mathrm{I}\eta$ et $\mathrm{I}\zeta$ prises en signes contraires; on a donc, en faisant $r^2 f(r) = 1$,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \mathrm{I}\int \frac{z\,dy - y\,dz}{r^3}, \\ Y &= \mathrm{I}\int \frac{x\,dz - z\,dx}{r^3}, \\ Z &= \mathrm{I}\int \frac{y\,dx - x\,dy}{r^3}. \end{aligned}\right.$$

Si le point considéré a pour coordonnées x', y' et z', il suffit de remplacer les coordonnées primitives de l'élément par $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, et de prendre

$$r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2.$$

336. Équivalence d'un courant et d'un feuillet magnétique. — L'action d'un champ sur un élément de courant étant identique à celle qu'il exerce sur un élément du contour d'un feuillet, il en résulte que l'action du courant sur un pôle est identique à celle que produirait un feuillet de même contour, dont la face positive est à gauche du courant et dont la puissance magnétique serait I.

Le potentiel magnétique du courant en un point est ainsi le produit $I\omega$ de l'intensité I par l'angle solide ω sous lequel on voit la face positive. Comme les composantes du champ sont respectivement égales et de signe contraire aux dérivées partielles du potentiel, la surface apparente ω d'un courant, vu de l'origine des coordonnées, a pour dérivées partielles

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial x}&=\int\frac{y\,dz-z\,dy}{r^3},\\ \frac{\partial\omega}{\partial y}&=\int\frac{z\,dx-x\,dz}{r^3},\\ \frac{\partial\omega}{\partial z}&=\int\frac{x\,dy-y\,dx}{r^3}. \end{aligned}\right.$$

337. Action de deux éléments. — Pour deux éléments de courant, Ampère admet encore le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, hypothèse ayant pour conséquence que l'action est dirigée suivant la droite qui joint les éléments. Cette force est en tous cas proportionnelle au produit des intensités I et I′ et au produit des longueurs ds et ds' des éléments ; elle dépend enfin de leur distance r et de leurs directions respectives.

Soient encore θ et θ' (fig. 82) les angles des directions de ces éléments avec celle de la distance $OO'=r$, ω l'angle des plans $r\,ds$ et $r\,ds'$, ε l'angle des éléments.

Le principe des courants sinueux permet d'abord de rem-

placer le courant ds par deux composantes rectangulaires, l'une a parallèle à r et l'autre b située dans le plan rds; on remplacera de même ds' par ses composantes rectangulaires a', b' et c' les deux premières étant respectivement parallèles à a et b, la troisième c' perpendiculaire au plan rds.

L'action totale de ds sur ds est la résultante des six actions qui s'exercent entre chacune des composantes a et b du premier élément avec les trois composantes du second.

Or, quatre d'entre elles sont nulles par raison de symétrie. L'action de a sur b' par exemple, étant dirigée suivant OO', ne change pas quand on fait tourner la figure de 180° autour de cette droite; comme cette opération revient à renverser

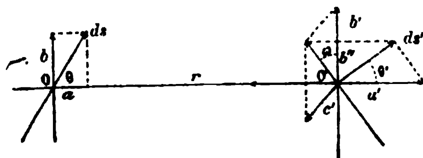


Fig. 82.

le sens du courant dans l'élément b', l'action est nulle. Il en est de même pour les actions de a sur c' et de b sur a'.

Les éléments b et c' perpendiculaires entre eux et situés dans des plans perpendiculaires ont aussi une action nulle. Si l'on considère, en effet, le système symétrique par rapport au plan rc', la force ne change pas, tandis que le courant n'est renversé que dans le symétrique de l'élément b.

Il ne reste donc à considérer que les actions de a sur a' et de b sur b', c'est-à-dire celles des projections dirigées suivant la droite r ou perpendiculaires à cette droite et parallèles. En tenant compte des relations

$$a = ds \cos\theta, \qquad a' = ds' \cos\theta',$$
$$b = ds \sin\theta, \qquad b' = ds' \sin\theta' \cos\omega,$$

l'action des deux éléments peut s'écrire

$$\psi = \mathrm{II}' ds\, ds' [\mathrm{F}(r) \cos\theta \cos\theta' + f(r) \sin\theta \sin\theta' \cos\omega].$$

L'homogénéité de la formule exige maintenant que chacune

des fonctions $F(r)$ et $f(r)$ soit en raison inverse du carré de la distance r, car le produit II' est une force mécanique (**329**) et le produit $ds\,ds'$ est le carré d'une longueur. On a donc, en désignant par H et h des constantes numériques,

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi &= II' \frac{ds\,ds'}{r^2} [H\cos\theta\cos\theta' + h\sin\theta\sin\theta'\cos\omega], \\ \psi &= II' \frac{ds\,ds'}{r^2} [h\cos\varepsilon + (H-h)\cos\theta\cos\theta']. \end{aligned} \right.$$

338. Détermination des constantes. — Deux sortes d'expériences sont nécessaires pour déterminer les constantes ; nous

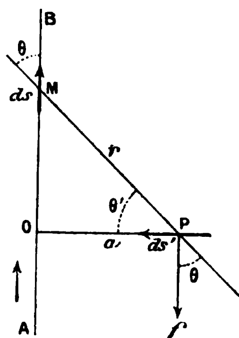


Fig. 83.

choisirons les plus simples, l'action d'un courant rectiligne et celle d'un courant circulaire sur le centre.

1° D'après les expériences de Biot et Savart, le champ produit par un courant rectiligne indéfini AB (fig. 83) au point P situé à la distance a est égal à $\frac{2I}{a}$, normal au plan ABP et dirigé d'avant en arrière.

Si l'on place au point P un élément ds' dirigé suivant la normale PO, l'action f' du champ sur cet élément est normale à l'élément et située dans le même plan ABP. Pour l'unité de courant de part et d'autre, on aura

$$(11) \qquad f' = \frac{2\,ds'}{a}.$$

Telle doit être la résultante des actions des éléments ds du courant rectiligne AB sur l'élément ds'.

Dans le cas actuel, les éléments ds et ds' étant perpendiculaires, on a $\cos\varepsilon = 0$. Comme les angles θ et θ' sont complémentaires, l'action élémentaire (10), considérée comme répulsive suivant la direction MP, se réduit à $ds' \frac{H-h}{r^2} \cos\theta' \sin\theta' \, ds$ et sa composante normale est

$$df' = ds' \frac{H-h}{r^2} \sin^2\theta' \cos\theta' \, ds.$$

En comptant l'arc s à partir du point O, on a

$$s = a \operatorname{tang}\theta', \quad ds = \frac{a}{\cos^2\theta'} d\theta' = \frac{r^2}{a} d\theta',$$

$$df' = ds' \frac{H-h}{a} \sin^2\theta' \cos\theta' \, d\theta' = ds' \frac{H-h}{3a} d(\sin^3\theta').$$

L'action totale f' est l'intégrale de cette expression entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, ce qui donne

$$f' = \frac{2\,ds'}{a} \cdot \frac{H-h}{3}.$$

Comparant avec la valeur (11), il en résulte

$$H - h = 3.$$

2° Le champ magnétique produit par un courant circulaire de rayon a sur son centre, pour l'unité d'intensité, est la somme des actions parallèles dues à tous les éléments du contour, ou $\frac{2\pi a}{a^2} = \frac{2\pi}{a}$. Si l'on place en ce point O (fig. 84) un élément ds' situé dans le plan du cercle, l'action f' que subit l'élément est $\frac{2\pi}{a} ds'$.

D'autre part, si l'on considère les actions élémentaires (10),

l'angle θ est toujours droit pour un élément ds du courant circulaire et l'on a

$$\varepsilon = 90^\circ + \theta', \qquad \cos\varepsilon = -\sin\theta'.$$

Comme $ds = a\,d\theta'$, la composante normale de l'action élémentaire devient

$$df' = \frac{ds\,ds'}{a^2}\,h\cos\varepsilon\sin\theta' = -ds'\,\frac{h}{a}\,\sin^2\theta'\,d\theta'.$$

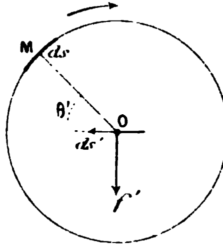


Fig. 84.

L'action totale est l'intégrale de cette expression entre les limites $\theta' = 0$ et $\theta' = 2\pi$, ce qui donne

$$f' = -ds'\,\frac{h}{a}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta'\,d\theta' = -\frac{\pi h}{a}\,ds'.$$

En comparant cette nouvelle valeur de f' avec la précédente, il en résulte

$$h = -2 \quad \text{et, par suite,} \quad H = 1.$$

L'action élémentaire (10), étant considérée comme attractive, peut donc s'écrire, conformément à l'équation (6),

$$(12) \qquad \psi = 2\,\text{I}'\,\frac{ds\,ds'}{r^2}\left[\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right].$$

339. Unités électrodynamiques. — On peut choisir l'unité de mesure des courants de manière que le facteur commun 2

disparaisse de l'expression (12). Si l'on désigne par J et J′ les valeurs des courants qui satisfont à cette condition, on aura $2II' = JJ'$, ou $J = I\sqrt{2}$. Les unités ainsi définies sont appelées *électrodynamiques*. On voit ainsi que l'*unité électrodynamique de courant est le quotient de l'unité électromagnétique par* $\sqrt{2}$.

Si l'on considère deux éléments parallèles entre eux et perpendiculaires à la droite qui les joint, leur action réciproque est attractive et a pour valeur

$$\psi = 2\frac{II'}{r^2}\,ds\,ds' = JJ'\frac{ds\,ds'}{r^2}.$$

En faisant $ds = ds' = r$, il reste $\psi = JJ'$. L'intensité électrodynamique d'un courant est donc la racine carrée de l'action qui s'exercerait entre deux éléments parallèles, ayant une même longueur égale à la distance qui les sépare, et perpendiculaires à cette distance.

Les unités électrodynamiques ne présentent d'autre intérêt que de simplifier l'expression de la formule d'Ampère dans un cas particulier, tandis qu'elles exigeraient, au contraire, l'introduction du diviseur 2 quand il s'agit de courants consécutifs ou dans l'emploi de l'expression générale (3); on ne fait aucune application de ce système de mesures.

340. Couples de l'action d'un élément sur un courant. — D'une manière générale, si ψ_x, ψ_y et ψ_z sont les composantes de l'action ψ d'un élément ds', situé à l'origine des coordonnées, sur l'élément ds d'un autre circuit, placé au point dont les coordonnées sont x, y et z, les couples de cette force ψ relatifs aux axes sont $y\psi_z - z\psi_y$, $z\psi_x - x\psi_z$ et $x\psi_y - y\psi_x$. Les intégrales de ces couples, étendues au contour fermé s sont nulles, puisque la résultante est appliquée à l'élément ds'; les couples élémentaires sont donc des différentielles exactes et l'on peut écrire

$$y\psi_z - z\psi_y = dU_1,$$
$$z\psi_x - x\psi_z = dU_2,$$
$$x\psi_y - y\psi_x = dU_3,$$

U_1, U_2 et U_3 étant des fonctions de la variable s ou des varia-

bles x, y et z, dont chacune est fonction de s, et le choix des axes est entièrement arbitraire.

Avec la formule (3), appliquée au cas où l'élément ds' est parallèle à l'axe des x, on a, en posant $p = \text{I}\text{I}'ds'$,

$$\psi_x = \frac{p}{r^3}(x\,dx - x\,dx) = 0,$$

$$\psi_y = \frac{p}{r^3}(x\,dy - y\,dx),$$

$$\psi_z = \frac{p}{r^3}(x\,dz - z\,dx);$$

$$y\psi_z - z\psi_y = p\,\frac{x}{r^3}(y\,dz - z\,dy),$$

$$z\psi_x - x\psi_z = p\,\frac{x}{r^3}(z\,dx - x\,dz),$$

$$x\psi_y - y\psi_x = p\,\frac{x}{r^3}(x\,dy - y\,dx).$$

Les seconds membres de ces équations sont encore des différentielles exactes d'une fonction de s.

Si l'élément ds' est parallèle à l'axe des y ou des z, il suffira de remplacer dans ces expressions le facteur commun x par y ou par z. Chacun des couples élémentaires ainsi obtenus étant une différentielle exacte, il en sera de même de leurs sommes ou de leurs différences, ce qui donne, par exemple,

$$(z-y)(y\,dz - z\,dy) = r^3 d\text{U}_1 = yz(y-z)\left(\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}\right),$$

$$(x-z)(z\,dx - x\,dz) = r^3 d\text{U}_2 = zx(z-x)\left(\frac{dz}{z} - \frac{dx}{x}\right),$$

$$(y-z)(x\,dy - y\,dx) = r^3 d\text{U}_3 = xy(x-y)\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right).$$

CHAPITRE TROISIÈME

CAS PARTICULIERS D'ÉLECTROMAGNÉTISME

EXPÉRIENCES DE CONTRÔLE

341. Principe des expériences. — On a vu précédemment que l'énergie relative d'un courant d'intensité invariable I dans un champ magnétique est, à une constante près, égale à $-I\varphi$, le facteur φ désignant le flux de force magnétique qui traverse la surface du courant par la face négative.

Si le circuit que parcourt le courant est de forme rigide, les actions réciproques tendent donc à modifier la position relative des aimants et du courant de manière à augmenter la valeur de φ; l'équilibre est stable lorsque ce flux passe par un maximum compatible avec les liaisons du système.

De même, l'énergie relative de deux courants est égale à $-II'M$ (327). Lorsque les circuits des courants sont rigides, la position d'équilibre correspond encore au cas où le coefficient d'induction mutuelle M a la valeur maximum que comportent les liaisons mécaniques.

Dans les deux cas, si l'un des circuits n'est pas rigide, la même règle s'applique et le contour se déforme de manière à embrasser le plus grand flux de force.

Dans un champ uniforme, par exemple, un courant de longueur déterminée tend à prendre la forme circulaire et à se mettre perpendiculaire au champ, de manière que la direction du champ soit à sa gauche.

Si même le conducteur est extensible, il s'allongera jusqu'à

ce que les réactions élastiques fassent équilibre aux forces électromagnétiques.

Supposons encore qu'un circuit soit composé de deux parties, respectivement invariables, dont l'une ACB (fig. 85) soit mobile autour des points A et B qui la rattachent à l'autre. On peut imaginer que la droite AB est parcourue par deux courants égaux et de sens contraires, de même intensité I que le courant primitif, et décomposer ainsi le système en deux circuits fermés distincts s et s'. En désignant par M leur

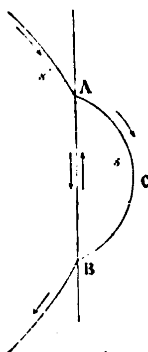


Fig. 85.

coefficient d'induction mutuelle, l'énergie relative des deux courants est égal à $-I^2M$.

La partie mobile ACB doit donc tourner autour de l'axe AB de manière que le coefficient M, ou le flux de force MI émis par l'un des circuits dans la surface de l'autre, prenne une valeur maximum.

Si les deux contours s et s' sont plans, il est clair que la partie mobile s se doit placer dans le plan du circuit s', dont elle formera le prolongement; ce résultat paraîtra manifeste si l'on considère l'action mutuelle des deux feuillets magnétiques équivalents.

Si le circuit s est flexible, il prendra la forme d'un arc de circonférence, afin que le coefficient M ait une valeur maximum. Il en résulte que, si le circuit général est entièrement flexible et de longueur déterminée, les actions mutuelles ten-

dent à lui donner une surface maximum, c'est-à-dire la forme d'une circonférence de cercle.

Enfin, si le fil conducteur est extensible, le rayon de la circonférence augmente jusqu'à ce que les réactions élastiques fassent équilibre aux forces électrodynamiques.

Le flux de force émis par un courant dans la surface limitée à son conducteur est, toutes choses égales, proportionnel à l'intensité I du courant et peut être représenté par LI, le facteur L désignant le *coefficient d'induction propre* ou de *self-induction* du circuit. Nous verrons plus tard comment on doit interpréter la valeur de L en tenant compte du flux de force qui traverse le conducteur lui-même. En tout état de cause, il est clair que cette valeur est maximum lorsque le contour est circulaire.

On peut donc résumer toutes les expériences relatives à l'action réciproque de deux courants, ou à l'action d'un courant sur lui-même, en disant que les mouvements tendent à se produire de manière que le coefficient d'induction mutuelle M soit maximum, dans le premier cas, et le coefficient d'induction propre L maximum dans le second.

Ces règles permettront d'interpréter correctement diverses expériences historiques.

342. Action de deux courants parallèles. — D'après la formule d'Ampère, deux éléments de courants parallèles entre eux et perpendiculaires à la droite qui joint leurs milieux doivent s'attirer ou se repousser, suivant que les courants sont de même sens ou de sens contraires.

On vérifie ce résultat en employant un cadre rectangulaire, de côtés $2a$ et $2b$, mobile autour d'une verticale parallèle au coté $2b$ et parcouru par le courant I. On approche de l'un des côtés verticaux un autre courant rectiligne et vertical I′, que l'on peut considérer comme indéfini; il se manifeste une attraction, ou une répulsion, suivant que les courants sont de même sens ou de sens contraires.

Si l'on désigne par r la distance du courant rectiligne au côté considéré du rectangle, le champ magnétique produit est $\frac{2I'}{r}$ et l'action exercée $2II'\frac{2b}{r}$, attractive ou répulsive.

Cette explication est incomplète, parce qu'il est nécessaire

de faire intervenir les actions qui s'exercent sur les quatre côtés du cadre. La rotation du cadre a lieu de manière que le coefficient d'induction mutuelle soit maximum; on voit aisément que cette condition est réalisée lorsque le rectangle mobile et le courant auxiliaire se trouvent dans le même plan, les parties voisines étant parcourues par des courants de même sens.

Soit AB (fig. 86) la projection du cadre sur un plan horizontal, C la trace de l'axe, O celle du courant rectiligne, c la distance OC, et supposons que le cadre soit dévié de l'angle α de sa position d'équilibre.

Si l'on admet que le champ du courant auxiliaire ne diffère pas sensiblement de celui que produit sa partie rectiligne, le flux de force émis dans le cadre AB est le même que celui

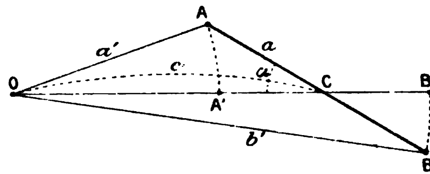


Fig. 86.

qu'émettrait ce courant dans le cadre A'B', les points A' et B' étant respectivement sur des arcs de cercle concentriques au point O et ayant pour rayons $OA = a'$ et $OB = b'$.

Pour l'unité de courant, le flux de force émis à la distance r dans l'élément $2b\,dr$ de la surface du rectangle A'B' est $\frac{2}{r}\,2b\,dr$ et le flux total, c'est-à-dire le coefficient d'induction mutuelle entre le cadre et le courant rectiligne indéfini,

$$(1) \qquad M = 4b\int_{a'}^{b'}\frac{dr}{r} = 4b\,\mathcal{L}.\frac{b'}{a'} = 2b\,\mathcal{L}.\frac{b'^2}{a'^2}.$$

Les triangles OAC et OBC donnent

$$a'^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\alpha,$$
$$b'^2 = c^2 + a^2 + 2ac\cos\alpha.$$

La valeur du coefficient M est maximum et égale à $4b\mathfrak{L}.\frac{c+a}{c-a}$ pour $\alpha=0$, condition qui correspond à l'équilibre stable du cadre ; elle change de signe pour $\alpha=\pi$.

Le travail nécessaire pour faire tourner le cadre de la première position à la seconde est $8\text{II}'b\mathfrak{L}.\frac{c+a}{c-a}$.

On déduit de l'équation (1)

$$\frac{dM}{d\alpha}=-8abc\frac{c^2+a^2}{(c^2+a^2)^2-4a^2c^2\cos^2\alpha}\sin\alpha.$$

Le couple qui tend à ramener le cadre dans sa position d'équilibre est donc, en appelant S sa surface $4ab$,

$$-\text{II}'\frac{dM}{d\alpha}=\text{II}'\frac{2\text{S}c(c^2+a^2)}{(c^2+a^2)^2-4a^2c^2\cos^2\alpha}\sin\alpha.$$

343. Courants angulaires. — Deux courants rectilignes placés dans le voisinage l'un de l'autre tendent à se mettre parallèlement entre eux. On énonce habituellement ce résultat en disant que deux courants qui font un angle s'attirent, si tous deux s'approchent ou s'éloignent en même temps du sommet de l'angle ou de la perpendiculaire commune, et qu'ils se repoussent dans le cas contraire, ce qui serait encore une vérification de la formule d'Ampère.

L'expérience se fait en approchant un courant rectiligne indéfini de la partie inférieure d'un cadre rectangulaire mobile, comme dans le cas précédent. En réalité, le cadre tourne de manière à recevoir sur sa face négative le maximum du flux de force émané du courant rectiligne.

Si le courant rectiligne passe par l'axe de rotation et lui est perpendiculaire, le flux de force relatif à une position quelconque du cadre est le flux qui traverse la surface, située dans le plan de l'axe et du courant, obtenue en rabattant chacun des points du contour par un arc de circonférence ayant pour axe le courant auxiliaire.

Prenons pour axe des z (fig. 87) la direction du courant rectiligne, pour axe des x l'axe de rotation du cadre, et suppo-

sons que cet appareil fasse l'angle α avec sa position d'équilibre. En posant $m = \tang\alpha$, les équations des droites passant par les côtés AB et A'B' du cadre sont

$$\text{AB} \begin{cases} x = c - b, \\ y = mz; \end{cases} \qquad \text{A'B'} \begin{cases} x = c + b, \\ y = mz. \end{cases}$$

En tournant autour de l'axe des z, ces droites décrivent des hyperboloïdes ayant pour équations

$$\begin{array}{ll} \text{AB} & x^2 + y^2 - m^2 z^2 = (c - b)^2, \\ \text{A'B'} & x^2 + y^2 - m^2 z^2 = (c + b)^2. \end{array}$$

La surface rabattue est un quadrilatère ayant deux côtés rectilignes de longueur $2b$, parallèles à l'axe des x et aux

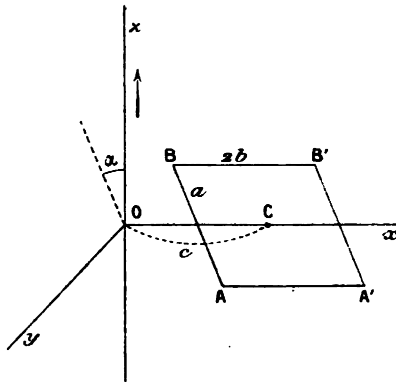


Fig. 87.

distances $z = \pm a \cos\alpha$, et deux côtés curvilignes qui sont les intersections des hyperboloïdes précédents par le plan des xz, c'est-à-dire les arcs des hyperboles

$$x^2 = m^2 z^2 + (c - b)^2,$$
$$x'^2 = m^2 z^2 + (c + b)^2.$$

Le flux de force émis, pour l'unité de courant, dans l'élé-

ment de surface $dxdz$ est $\frac{2}{x}dxdz$, ce qui donne, pour le coefficient d'induction mutuelle,

$$M = 2\int dz \int \frac{dx}{x} = 2\int dz\,\mathfrak{L}.\frac{x'}{x} = \int \mathfrak{L}.\frac{x'^2}{x^2}\,dz,$$

$$(2) \qquad M = \int \mathfrak{L}.\frac{m^2z^2+(c+b)^2}{m^2z^2+(c-b)^2}\,dz.$$

L'intégrale générale de cette expression est

$$z\mathfrak{L}.\frac{m^2z^2+(c+b)^2}{m^2z^2+(c-b)^2} + 2\left(\frac{c+b}{m}\operatorname{arc\,tg}\frac{mz}{c+b} - \frac{c-b}{m}\operatorname{arc\,tg}\frac{mz}{c-b}\right).$$

Comme on doit la prendre entre les limites $z = \pm a\cos\alpha$, il en résulte

$$M = 2a\cos\alpha\,\mathfrak{L}.\frac{a^2\sin^2\alpha+(c+b)^2}{a^2\sin^2\alpha+(c-b)^2} - 4\left(\frac{c+b}{\operatorname{tg}\alpha}\operatorname{arc\,tg}\frac{a\sin\alpha}{c+b} - \frac{c-b}{\operatorname{tg}\alpha}\operatorname{arc\,tg}\frac{a\sin\alpha}{c-b}\right)$$

et le couple de rotation est

$$-\text{II}'\frac{dM}{d\alpha} = \text{II}'\left\{\begin{aligned} &2a\sin\alpha\,\mathfrak{L}.\frac{a^2\sin^2\alpha+(c+b)^2}{a^2\sin^2\alpha+(c-b)^2} \\ &+8\,\frac{a^3cb(1+\cos\alpha)\sin 2\alpha}{(a^2\sin^2\alpha+c^2+b^2)^2-4c^2b^2} \\ &-4\left(\frac{c+b}{\sin^2\alpha}\operatorname{arc\,tg}\frac{a\sin\alpha}{c+b} - \frac{c-b}{\sin^2\alpha}\operatorname{arc\,tg}\frac{a\sin\alpha}{c-b}\right).\end{aligned}\right.$$

La valeur de M est maximum lorsque l'équilibre est stable, ou $\alpha = 0$, et se réduit alors, comme dans le cas précédent, à $4\alpha\,\mathfrak{L}.\frac{c+b}{c-b}$; le travail nécessaire pour faire tourner le cadre de $180°$, à partir de cette position, serait $8\text{II}'\mathfrak{L}.\frac{c+b}{c-b}$.

On pourrait encore se représenter les mêmes résultats, à la manière de Faraday, par la considération des lignes de force et de leur distribution dans le champ. Les lignes de force figuratives du champ résultant des systèmes en présence

sont plus serrées dans certaines régions que dans d'autres. En assimilant ces lignes de force (81) à des fils élastiques soumis à une tension dans le sens de leur longueur et à une répulsion dans le sens perpendiculaire, on aura une idée très nette des mouvements relatifs qui tendent à se produire.

344. Répulsion de deux éléments consécutifs. — Cette expérience importante d'Ampère consiste à mettre les deux pôles d'une pile en communication avec deux auges rectangulaires séparées par une cloison isolante et remplies de mercure. Un fil de fer est contourné de manière à former deux branches horizontales parallèles reposant sur le mercure des auges et une partie transversale en forme de pont qui relie les deux premières. Au moment où l'on ferme le circuit de la pile, on

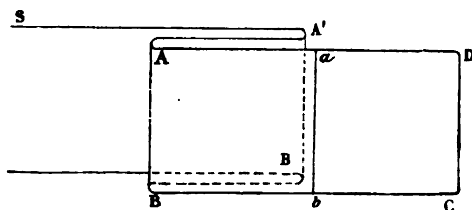


Fig. 88.

voit l'équipage mobile glisser sur la surface du mercure et s'éloigner des électrodes.

Ampère pensait vérifier ainsi que deux éléments de courant dirigés suivant la même droite et dans le même sens se repoussent, comme l'indique la formule élémentaire; mais il est facile de reconnaître que l'interprétation des phénomènes ne comporte point cette conséquence.

Dans ce cas, en effet, le courant parcourt un circuit dont une des portions est mobile, et dont la surface tend à devenir maximum. On le voit d'une manière directe en remplaçant le courant par un feuillet flexible replié sur lui-même, comme l'indique la figure 88. Les trois feuillets superposés dans l'espace ABB'A' ne donnent lieu entre eux à aucune force parallèle au plan du courant, mais leur action extérieure est équivalente à celle d'un feuillet simple. Il est manifeste que

la portion $aDCb$ tend à s'éloigner et que le feuillet se développe de manière à occuper la plus grande surface.

345. Rotations électromagnétiques. — Au lieu d'aboutir à des positions d'équilibre, comme on l'a fait jusqu'à présent, il est possible, par l'action des aimants sur les courants ou même par l'action réciproque des courants, de réaliser des expériences dans lesquelles le mouvement est continu, tandis que l'emploi d'aimants sous une forme quelconque ne permettrait que des déplacements limités.

Considérons, par exemple, un courant rectiligne indéfini dont la trace est en O (fig. 89) et un aimant PP′ dont l'un des pôles P′ est assujetti à se déplacer dans une glissière AB per-

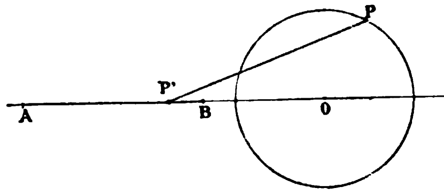


Fig. 89.

pendiculaire au courant, tandis que l'autre pôle P peut décrire une circonférence autour du courant, grâce à un contact mobile qui lui livre passage à chaque tour. Le pôle P tournera indéfiniment autour du courant; sa vitesse devrait même augmenter sans limite, abstraction faite des frottements, parce que le travail du courant à chaque révolution est le produit de $4\pi I$ par la masse m du pôle. Toutes réserves faites relativement à la réaction du pôle sur le courant, il s'établit un régime régulier lorsque les résistances passives font équilibre à la force motrice.

Il en serait de même si le pôle P était astreint à suivre un chemin fermé quelconque autour du courant.

346. Expérience de Faraday. — On peut dire, dans le cas précédent, que le flux de force émis par le pôle dans la face négative est toujours croissant et augmente de $4\pi m$ par tour. Il semble quelquefois que des mouvements continus soient capables de se produire, alors que le flux de force

émis par un aimant dans un circuit mobile semble nul ou invariable.

Considérons, par exemple, un arc ACB de courbe plane (fig. 90), mobile autour d'une droite AB passant par l'axe d'un aimant PP′, l'une des extrémités étant placée entre les deux pôles et l'autre en dehors, et supposons qu'un courant aille du point A au point B par l'arc ACB. Le flux de force magnétique émanant du pôle P qui traverse la portion ACB du circuit paraît nul, puisque le pôle est dans le plan du circuit;

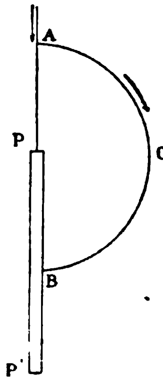


Fig. 90.

d'ailleurs, l'arc ACB paraît dans tous les azimuts avoir une situation identique par rapport au pôle. Cependant cet arc prend un mouvement de rotation continu qui, si le pôle P est nord, le fait tourner, pour un observateur placé au-dessus du point A, dans le sens des aiguilles d'une montre.

Pour analyser le phénomène, substituons au courant le feuillet équivalent; nous pouvons supposer que la partie mobile de ce feuillet est constituée par une lame élastique indéfiniment extensible, qui forme en arrière une surface concave et présente au pôle sa face négative. Cette surface tendant à embrasser une plus grande portion du flux marchera dans le sens indiqué et le mouvement sera continu, puisque le feuillet élastique peut s'enrouler sur lui-même indéfiniment.

La masse du pôle étant m, la variation du flux de force pour une rotation θ du plan du courant est $2m\theta$; le travail des forces

électromagnétiques relativement à ce pôle sera $2m\theta I$ pour le déplacement θ et, pour un tour entier, $4\pi m I$.

Le moment du couple de rotation par rapport à l'axe est indépendant de la grandeur et de la forme de l'arc mobile, car il a pour expression

$$\frac{4\pi m I}{2\pi} = 2mI.$$

Quant à l'action du pôle inférieur P′, elle est évidemment nulle ; car une portion quelconque du flux de force émané de ce point et qui rencontre le feuillet le traverse nécessairement deux fois, en entrant d'abord par la face positive, puis par la face négative ; il ne peut y avoir, de ce chef, aucune variation d'énergie et, par suite, aucune cause de mouvement.

Si les deux pôles sont en dehors de la ligne AB, le courant mobile prend une position d'équilibre stable, sans rotation continue. Si les pôles sont tous deux situés dans l'intervalle AB, la variation totale du flux de force relative à un déplacement quelconque de l'arc est nulle, puisque les deux pôles donneraient des variations égales et contraires ; l'arc doit rester immobile.

Ces résultats ont déjà été obtenus (**335**) en considérant l'action d'un pôle sur chacun des éléments du courant.

Pour réaliser l'expérience de rotation, Faraday emploie un petit équipage de forme à peu près rectangulaire ; au milieu du côté supérieur est une pointe qui plonge dans une goutte de mercure porté sur le pôle P de l'aimant creusé en godet ; les côtés latéraux aboutissent à un anneau de cuivre qui se meut dans une rigole circulaire isolée contenant du mercure et attachée à l'aimant au-dessous du pôle. Le courant arrive au godet supérieur par l'aimant lui-même et émerge ensuite par la rigole de mercure ; il se subdivise à partir de la pointe et descend par les côtés latéraux, de manière à former deux arcs qui subissent des couples de même sens.

347. Roue de Barlow. — Une roue métallique dentée, mobile autour d'un axe horizontal, est disposée de manière qu'une ou plusieurs dents plongent à la partie inférieure dans une auge renfermant du mercure. Si l'on fait traverser ce système par un courant qui entre par l'axe et sorte par le mercure, la

seule action du courant sur lui-même tendra à faire marcher les dents inférieures dans le sens qui les éloigne du reste du circuit, de manière à en augmenter la surface totale; mais cette action est généralement trop faible pour vaincre les frottements. On obtient un effet plus énergique en disposant l'auge entre les branches d'un aimant en fer à cheval placé horizontalement. Les lignes de force du champ magnétique traversent alors le plan de la roue; si on les suppose dirigées d'avant en arrière, c'est-à-dire le pôle nord en avant, la roue prend un mouvement de rotation en sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre.

Pour avoir un phénomène facile à calculer, nous remplacerons l'aimant par un champ magnétique uniforme d'intensité F, parallèle à l'axe de rotation.

Si la roue est remplacée par un disque qui touche le mercure, ce qui forme un système équivalent, l'action du champ sur un élément dr du rayon parcouru par le courant est $\mathrm{FI}\,dr$ et produit un couple $\mathrm{FI}\,r\,dr$. En appelant a le rayon du disque, le couple total est $\mathrm{FI}\int r\,dr = \mathrm{FI}\frac{a^2}{2}$ et le travail correspondant à un tour entier $\pi\mathrm{FI}a^2 = \mathrm{FIS}$, c'est-à-dire proportionnel à la surface S du disque.

Supposons encore que les dents consécutives de la roue soient séparées par l'angle θ et que la surface du mercure soit tellement placée que l'une des dents touche le liquide au moment même où la précédente le quitte. Le flux de force qui traverse le triangle formé par les rayons qui corrrespondent à ces deux dents est égal à $\mathrm{F}\frac{a^2\sin\theta}{2}$, ou sensiblement $\mathrm{F}\frac{a^2\theta}{2}$; le travail correspondant est $\mathrm{IF}\frac{a^2\theta}{2}$, ce qui donne encore pour un tour entier, le travail IFS, proportionnel à la surface totale S de la roue.

348. Expérience d'Ampère. — Cette expérience, dans laquelle on produit la rotation d'un aimant par un courant, est la réciproque de celle de Faraday (**346**). L'appareil est encore disposé de telle sorte que l'un seulement des pôles de l'aimant puisse traverser le courant et l'on obtient une rotation continue. L'aimant (fig. 91), lesté par un contre-poids de platine,

flotte dans le mercure et peut tourner sur lui-même autour de son axe; le courant est amené à la surface du liquide, traverse la partie émergente de l'aimant et en sort par un conducteur fixe qui plonge à la partie supérieure N dans une goutte de mercure. Si on suppose que le courant suive rigoureusement l'axe de l'aimant, le travail à chaque tour pour une masse magnétique m située en dehors de l'axe est $4\pi m I$ et donne lieu à un couple dont le moment est $2mI$. En réalité, le phénomène est plus complexe parce que le courant traverse la section entière de l'aimant.

Faraday a répété l'expérience en plaçant l'aimant en dehors

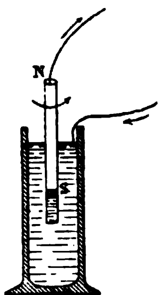


Fig. 91.

du circuit. Le courant est amené au centre du vase par une tige métallique verticale et l'aimant, qui flotte dans le mercure, tourne autour de cette tige.

Dans les deux cas, si le courant monte par l'axe et que l'extrémité supérieure de l'aimant soit un pôle nord, la rotation se fait en sens contraire du mouvement des aiguilles d'une montre. La disposition de Faraday donne un frottement beaucoup plus grand et la rotation est moins rapide.

349. Rotation des liquides. — Lorsque le courant traverse un liquide, les filets liquides qui coïncident avec les lignes de flux électrique peuvent être considérés comme des circuits mobiles, capables d'obéir aux actions électromagnétiques, et l'expérience montre que le liquide est entraîné avec le courant qu'il transporte.

1° *Expérience de Davy.* — Deux électrodes de platine vien-

nent affleurer dans le mercure un peu au-dessous de sa surface. En plaçant au-dessus de l'une d'elles, l'électrode négative par exemple, le pôle nord d'un aimant, on constate une dépression du mercure et en même temps une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre.

2° *Expérience de Jamin.* — Les deux électrodes d'un voltamètre sont placées suivant la même verticale et sur l'axe des pôles d'un aimant en fer à cheval. Si les molécules liquides situées sur un filet de courant formaient un fil rigide, on se trouverait dans l'un des cas de l'expérience de Faraday (**346**) où la rotation n'est pas possible. En réalité les forces électromagnétiques agissent d'une façon indépendante, et de la même manière que dans l'expérience de Davy, sur les portions des filets qui partent en divergeant de chacune des électrodes. Le liquide se divise alors en deux couches superposées qui tournent en sens contraires, et la rotation est rendue visible par l'entraînement des bulles gazeuses qui proviennent de la décomposition de l'eau.

3° *Expériences de Bertin.* — Dans les appareils imaginés par Bertin, le mouvement du liquide est rendu plus visible par de petits morceaux de liège qui flottent à la surface. On place une dissolution de sulfate de cuivre dans une couronne annulaire qui renferme deux cercles de cuivre, l'un intérieur et l'autre extérieur. En prenant ces cercles comme électrodes, on obtient dans le liquide une série de courants radiants, centripètes ou centrifuges. Un aimant placé dans l'axe de l'appareil, de manière que sa partie moyenne soit au niveau de la couronne, donne au liquide une rotation dans un sens déterminé conforme à la théorie.

Le sens de la rotation ne change pas quand on remplace l'aimant central par un tube aimanté situé autour de la couronne. En effet, si le pôle nord est à la partie supérieure dans les deux cas, le flux de force magnétique est dirigé de haut en bas, aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de l'aimant creux. Il n'en est plus de même quand on remplace l'aimant par une bobine; la rotation du liquide change de sens suivant que la bobine est intérieure ou extérieure à la couronne annulaire. Nous verrons, en effet, que le flux de force n'a pas le même sens à l'intérieur et à l'extérieur de la bobine.

350. Actions électrodynamiques. — Quelques-unes des expériences qui précèdent peuvent être reproduites en remplaçant le champ des aimants par le champ de courants convenablement placés. Ainsi la roue de Barlow (**347**) tourne également si l'on met en face d'elle un courant ou une série de courants centrés sur le même axe. Les expériences de Faraday (**346**) et d'Ampère (**348**) se réaliseraient encore si on remplace l'aimant par un système de courants capable de produire le même champ; la substitution conviendrait également pour les expériences de rotation des liquides.

Considérons encore le cas théorique d'un courant rectiligne indéfini X'X (fig. 92) d'intensité I', et un courant mobile rec-

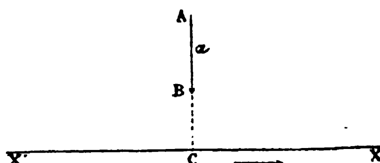


Fig. 92.

tiligne AB, perpendiculaire au premier et situé dans le même plan, d'intensité I et de longueur $2b$, dont le milieu est à la distance c du premier. L'action du courant rectiligne sur le courant mobile est perpendiculaire au second, située dans le plan commun, et a pour expression

$$I\int \frac{2I'}{r}\,dr = 2II'\int_{c-b}^{c+b}\frac{dr}{r} = 2II'\mathcal{L}.\frac{c+b}{c-b}.$$

Le courant mobile serait entraîné par une force constante, dans le sens ou en sens contraire du courant indéfini, suivant qu'il est descendant ou ascendant par rapport à ce dernier.

Si le courant mobile est fermé, ou si ses extrémités se trouvent sur le courant indéfini, aucun mouvement de translation n'est possible parce que le flux de force qui le traverse resterait invariable.

351. Action d'un champ uniforme. — Considérons d'abord deux conducteurs rectilignes indéfinis AA', BB' (fig. 93), pa-

rallèles entre eux et séparés par la distance b, et supposons que les deux extrémités A et B étant en communication avec les électrodes d'un courant, le circuit soit fermé par une barre transversale CC′, mobile parallèlement à elle-même le long des conducteurs AA′ et BB′.

L'appareil étant situé dans un champ magnétique uniforme, soit Z la composante du champ normale au plan des conducteurs; pour un déplacement dx de la barre mobile, la variation du flux de force dans le circuit est $bZdx$. S'il s'agit du champ terrestre et que les rails soient dans un plan horizontal, la composante Z est dirigée de haut en bas dans notre hémisphère et, avec le sens du courant indiqué par les flèches,

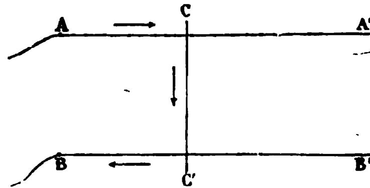


Fig. 93.

le pont mobile CC′ tendra à s'éloigner de AB; il s'en rapprocherait pour un courant de sens contraire.

L'action propre du courant tend à augmenter la surface et à éloigner le pont mobile. Cette action électrodynamique et celle du champ peuvent s'ajouter ou se retrancher suivant le sens du courant; le mouvement du pont sera, en effet, plus ou moins facile dans l'un ou l'autre cas.

Supposons maintenant que le conducteur mobile forme un circuit fermé de surface S. Dans un champ magnétique uniforme, comme celui de la terre, l'équilibre stable correspond au cas où le flux de force qui traverse la face négative du courant est maximum (**324**).

Si l'axe de rotation est dans le méridien magnétique, le travail total est nul lorsque le courant, situé d'abord dans ce plan, y revient après une rotation de 180°, car les travaux qui correspondent aux deux moitiés de la rotation sont alors égaux et de signes contraires.

Enfin, le travail serait nul pour une rotation quelconque autour de la direction du champ.

352. Rotation d'un courant sous l'action de la terre. — Une portion de courant non fermée et mobile autour d'un axe prend, en général, un mouvement continu de rotation sous l'influence du magnétisme terrestre.

Prenons, en effet, l'axe de rotation pour axe des z et le plan des zx dans le plan de l'axe et du champ. Remplaçons le champ par ses composantes Z et X, et un élément quelconque ds du courant situé au point (x, y, z) par ses projections dx, dy, dz. Sur la composante dz, l'action de Z est nulle et celle de X est purement directrice; sur dx, l'action de X

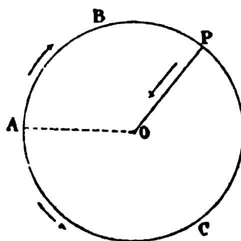


Fig. 94.

est nulle, sur dy elle est parallèle à l'axe. Il ne reste donc à considérer que l'action de Z sur dx et sur dy, laquelle produit un couple $Z(xdx + ydy)$ ou $Z\rho d\rho$, en appelant ρ la distance de l'élément à l'axe de rotation. Si b et a sont les valeurs de ρ relatives aux extrémités de la partie mobile du courant, le couple total est $Z\frac{a^2 - b^2}{2}$. Ce couple est constant et l'appareil prend un mouvement continu de rotation. Le travail correspondant à un tour complet pour le courant I est $IZ\pi(a^2 - b^2)$, c'est-à-dire proportionnel à l'aire de la couronne décrite par le circuit mobile.

Supposons, par exemple, qu'un courant horizontal OP de longueur a (fig. 94) soit mobile autour d'un axe vertical passant par l'une des extrémités O et dont l'autre extrémité P plonge dans une rigole pleine de mercure. Le courant qui arrive au

mercure en A, parcourt en sens opposés les deux parties ABP et ACP, regagne l'axe par la partie mobile PO et revient ensuite au voisinage du point A par un conducteur fixe. La partie mobile tourne en sens contraire du mouvement des aiguilles et le travail relatif à un tour complet est $IZ\pi a^2$.

On peut encore considérer le phénomène d'une autre manière. Soit x la portion du courant qui suit l'arc B, y celle qui suit l'arc C; le courant sera évidemment égal à l'intensité totale $I = x + y$ dans la portion mobile PO.

La projection horizontale S de la surface du courant se compose de deux parties, l'une ABPO pour laquelle la composante verticale Z du champ terrestre traverse la face négative, l'autre ACPO dont la face supérieure est de signe contraire. La première tend donc à augmenter, la seconde à diminuer; pour un déplacement angulaire θ du rayon PO, la somme des travaux est

$$\frac{1}{2} a^2 (x + y) Z\theta = \frac{1}{2} a^2 I Z\theta.$$

Ce travail est indépendant de la position du conducteur OP; le couple de rotation est donc constant. C'est d'ailleurs le problème traité pour la roue de Barlow.

Si la surface du courant donne une projection verticale S', le mouvement de rotation sera modifié par l'action directrice correspondant à cette projection. Il est facile de voir que, suivant le rapport des deux surfaces S et S', la vitesse initiale et la valeur des frottements, le moment de l'action directrice pourra l'emporter sur le moment de rotation et maintenir l'équipage en équilibre dans une position perpendiculaire au méridien magnétique.

Dans les appareils utilisés pour réaliser cette expérience, l'axe est terminé à sa partie supérieure par un godet à mercure. Un conducteur hozizontal pose par une pointe dans ce godet et se termine par deux tiges recourbées verticalement qui plongent dans une rigole annulaire contenant un liquide conducteur. Le courant mobile se partage alors en deux parties symétriques par rapport à l'axe de rotation. Dans ce cas, la projection S' est nulle, et le couple de rotation,

qui donnerait au système un mouvement uniformément accéléré s'il n'y avait pas de frottement, finit par lui imprimer un mouvement uniforme.

DES BOBINES

353. Propriétés des courants circulaires. — Le potentiel et le champ d'un courant circulaire sont les mêmes que ceux d'un feuillet de même puissance et de même contour (**263**) et s'expriment facilement pour les points situés sur l'axe.

Si le rayon du cercle est a, on a, pour le point situé à la distance x du centre, en appelant u la distance au contour, c'est-à-dire en posant $u^2 = a^2 + x^2$,

$$V = 2\pi I \left(1 - \frac{x}{u}\right),$$

$$F = 2\pi I \frac{a^2}{u^3} = 2 \frac{IS}{u^3}.$$

Le champ est proportionnel à la surface S du courant et en raison inverse du cube de la distance au contour ; il est maximum au centre du cercle où $u = a$.

Cette valeur du champ se déduirait immédiatement de la loi de Laplace, car la composante parallèle à l'axe de l'action due à un élément ds du contour est $\frac{I\,ds}{u^2} \cdot \frac{a}{u}$, ce qui donne

$$F = \frac{Ia}{u^3} \int ds = 2\pi I \frac{a^2}{u^3} = 2 \frac{IS}{u^3}.$$

Pour un feuillet magnétique de même contour, de puissance magnétique équivalente $U = I$ et dont l'épaisseur h est infiniment petite, l'intensité d'aimantation serait $\frac{I}{h}$.

Le champ F_i produit au centre (**88**) par les couches terminales est égal à $-4\pi \frac{I}{h}\left(1 - \frac{h}{2a}\right)$ et l'induction magnétique

$$F_1 = F_i + 4\pi \frac{I}{h} = 2\pi \frac{I}{a};$$

elle est égale au champ produit par le courant, ce qui est conforme à la règle générale.

Le potentiel d'un courant circulaire en dehors de l'axe s'exprimera ainsi par les séries trouvées précédemment (263) pour le feuillet. En chaque point, le champ est dirigé dans le plan méridien ; ses composantes parallèle et perpendiculaire à l'axe se déduiront de la valeur du potentiel.

354. Bobines électrodynamiques. — Dans un solenoïde électrodynamique (320) dont les courants élémentaires sont à la distance h, ou qui renferme n courants par unité de longueur de la directrice ($nh = 1$), chacun des courants peut être remplacé par un feuillet magnétique de même surface dont l'intensité d'aimantation est $\frac{I}{h} = nI$.

Supposons maintenant que l'on enroule sur un tube à section constante, de forme quelconque, une série de courants perpendiculaires aux génératrices et équidistants. La *bobine* ainsi constituée équivaut à un ensemble de solenoïdes dont les directrices sont des courbes parallèles, ou à un aimant solenoïdal de même forme. Pour chaque élément dS d'une section droite, l'aimantation est nI, la valeur de n variant d'un élément à l'autre, et la densité correspondante des surfaces terminales est $\pm nI$. Le champ intérieur en un point quelconque est égal à l'induction du système magnétique correspondant, c'est-à-dire la résultante de $4\pi nI$ et de l'action F_i produite par les couches extrêmes.

355. Bobines cylindriques. — Si le tube d'enroulement est cylindrique, le magnétisme des sections terminales correspond aux couches de glissement (126) que l'on obtiendrait en superposant deux cylindres homogènes de densités $\pm \rho$, dont l'un aurait glissé parallèlement à l'axe d'une quantité δ telle que $\rho\delta = nI$; la bobine équivaut à un cylindre aimanté uniformément (267) dans le sens de la longueur.

Sur les points extérieurs l'action de la bobine se réduit à celle de ces deux surfaces dont la densité magnétique σ est constante et égale à $\pm nI$.

Pour les points intérieurs, le champ est égal à l'induction du système magnétique équivalent.

Si le cylindre est assez long pour que dans une partie de

son étendue l'action des surfaces soit négligeable, le champ intérieur est uniforme et a pour intensité

$$F = 4\pi n I.$$

Le flux de force total qui traverse la section droite S de la bobine est alors

$$\varphi = FS = 4\pi n I S.$$

Dans tous les cas, ce flux est de sens contraire à celui qui provient des bases de l'aimant équivalent.

On voit par là qu'une bobine n'est pas équivalente à un aimant creux qui aurait le même moment magnétique : dans l'aimant creux, toutes les lignes de force tant intérieures qu'extérieures partent de la surface positive pour s'absorber à la surface négative; dans les bobines, au contraire, les lignes de force intérieures sont la continuation des lignes de force extérieures et forment des courbes fermées qui n'aboutissent jamais à des masses magnétiques.

Lorsque la section de la bobine est circulaire, si α et β désignent les angles apparents du rayon des faces positive et négative pour un point de l'axe situé à gauche des courants, le champ en ce point est

$$F = 2\pi n I(\cos\beta - \cos\alpha).$$

Pour un point situé à l'intérieur de la bobine, le champ est égal à l'induction du cylindre aimanté équivalent, c'est-à-dire

$$F = 2\pi n I(\cos\beta + \cos\alpha).$$

Cette expression se déduit de la précédente en remplaçant l'angle α par $\pi - \alpha$, ce qui revient à faire varier cet angle d'une manière continue dans la première formule.

356. Bobines annulaires. — Lorsque le tube d'enroulement est fermé sur lui-même, le système magnétique équivalent est un aimant solenoïdal fermé. Le champ extérieur est nul et le champ intérieur se réduit à $4\pi n I$, perpendiculaire en chaque point au plan des courants.

Si le tube est limité par une surface canal de révolution et

que N soit le nombre total des spires, le nombre des courants élémentaires par unité de longueur sur le solénoïde de longueur l est $\frac{N}{l}$, l'intensité d'aimantation correspondante $\frac{N}{l}I$ et le produit de cette intensité par la longueur l du solénoïde est une quantité constante NI.

Dans ce cas (**266**), en désignant par dS la section du solénoïde considéré, le flux total de force qui traverse la bobine annulaire est

$$\varphi = 4\pi NI \int \frac{dS}{l}.$$

Pour un *tore* de rayon moyen R, dont le rayon de la section est a, l'expression du flux de force peut s'écrire, en désignant par α le rapport des rayons a et R,

$$\varphi = 4\pi n I\left(R - \sqrt{R^2 - a^2}\right) = 4\pi n I R\left(1 - \sqrt{1 - \alpha^2}\right).$$

Pour un *anneau* à section rectangulaire, dont les côtés parallèle et perpendiculaire à l'axe sont $2b$ et $2a$, on a

$$\varphi = 4NIb\,\mathcal{L}.\frac{R+a}{R-a}.$$

357. Systèmes de courants superficiels. — Supposons enfin qu'une surface quelconque soit couverte par un ensemble de courants plans de même intensité, parallèles entre eux et à une distance constante telle qu'il en existe n par unité de longueur normale à la direction commune de leurs plans.

Le système équivaut à un aimant uniforme dont l'aimantation est nI. L'action extérieure est celle de deux couches magnétiques superficielles, qui sont des couches de glissement dans le cas actuel et dont la densité en chaque point est la projection normale $\sigma = nI\cos\theta$ de l'aimantation.

Le champ intérieur est la résultante de $4\pi nI$ et de l'action F_i des couches superficielles. Ce champ est uniforme lorsque la surface est du second degré.

Dans le cas de la sphère, on a (**260**)

$$F = \frac{8}{3}\pi n I$$

et le flux de force qui traverse le grand cercle est

$$\varphi = 4\pi \frac{2}{3}\pi a^2 n \mathrm{I} = \frac{2}{3}(2\pi a)^2 n \mathrm{I}$$

Il résulte de là une manière nouvelle d'envisager le magnétisme terrestre : l'action magnétique de la terre est équivalente à celle d'une série de courants circulaires situés dans des plans équidistants perpendiculaires à l'axe magnétique, ces courants circulant de l'Est à l'Ouest.

On peut, de même, remplacer un aimant de forme et d'aimantation quelconques par un système de courants superficiels, en tant du moins qu'on envisage seulement son action extérieure, puisqu'il équivaut à un ensemble de feuillets uniformes ou à un aimant lamellaire (**250**).

Cette équivalence est incomplète, mais on pourrait obtenir une représentation exacte de tous les effets magnétiques, tant intérieurs qu'extérieurs, en remplaçant les filets magnétiques, dans lesquels un aimant peut être décomposé, par les solénoïdes électrodynamiques correspondants.

AIMANTATION PAR LES COURANTS

358. Hypothèse d'Ampère. — Des considérations analogues ont conduit Ampère à admettre que les solénoïdes dont l'ensemble équivaut au magnétisme d'un aimant sont formés par des courants réels qui circulent à l'intérieur des molécules ; ces courants ne passent jamais d'une molécule à une autre, et ils préexistent à l'aimantation (**300**) qui aurait seulement pour effet de les orienter.

Dans cette hypothèse, un aimant n'est plus une substance continue, mais un ensemble de molécules distinctes, donnant lieu à une distribution très complexe de la force magnétique et du potentiel. Cependant il en résulte déjà une simplification notable, car le champ et l'induction magnétique sont alors définis de la même manière et les composantes du champ satisfont à l'équation de Laplace, aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur des aimants.

Il paraît difficile de concevoir cependant que des courants puissent exister d'une manière permanente dans un milieu sans dégagement de chaleur et, par suite, sans une dépense continue d'énergie. Il est vrai que si on localise les courants dans les molécules elles-mêmes, dont la constitution est inconnue, il n'est pas impossible d'admettre que la résistance soit nulle et que les courants persistent sous une forme qui n'est pas abordable par l'expérience. L'hypothèse d'Ampère n'implique donc par elle-même aucune contradiction.

359. Électro-aimants. — Arago a découvert (¹), dès 1820, qu'un fil de cuivre parcouru par un courant attire la limaille de fer; chaque parcelle de limaille devenant un petit aimant se place perpendiculairement au fil, le pôle nord à gauche du courant. Ampère fit remarquer qu'on peut augmenter beaucoup l'action du courant sur un barreau de fer doux ou d'acier en enroulant le fil en hélice autour du barreau; on obtient ainsi, avec le fer doux en particulier, des aimants temporaires auxquels on a donné le nom d'*électro-aimants*.

L'action extérieure des électro-aimants peut être beaucoup plus grande que celle des meilleurs barreaux d'acier; mais leur caractère principal est de pouvoir, lorsque le fer qui les constitue est très doux, gagner ou perdre presque instantanément leurs propriétés magnétiques. Enfin ils présentent cette propriété curieuse qu'en modifiant d'une manière convenable l'enroulement du fil sur le noyau de fer doux, on peut y distribuer le magnétisme à volonté et obtenir dans la longueur du barreau un nombre quelconque de pôles ou de *points conséquents*.

Le calcul des effets des électro-aimants est en général très difficile, lors même que les courants qui entourent le morceau de fer doux sont équidistants et parallèles entre eux. Dans ce cas, le système des courants développe un champ intérieur dont l'intensité est définie par l'induction d'un aimant uniforme terminé à la même surface; le noyau de fer doux placé dans ce champ prend en chaque point une aimantation qui dépend de l'intensité du champ et aussi du magnétisme développé par l'induction sur le corps lui même, abstraction faite

(¹) F. Arago, *Ann. de ch. et de phys.* (2), t. XV, p. 93; 1820.

de tout phénomène d'hystérésis (**285**). L'aimantation ne peut donc être uniforme que dans les cas particuliers que nous avons examinés (**273**). Quant à l'action extérieure, elle est la résultante de celle du système des courants ou de l'aimant équivalent et de celle du noyau de fer doux.

360. Exemples. — Pour une sphère entourée de courants parallèles et équidistants, l'intensité F du champ produit par les courants (**357**) a pour valeur $\frac{8}{3}\pi n I$.

L'aimantation A et l'induction F_1 sont alors

$$A = \frac{3}{4\pi}\frac{\mu-1}{\mu+2}F = 2\frac{\mu-1}{\mu+2}nI,$$

$$F_1 = \frac{3\mu}{\mu+2}F = \frac{8\pi\mu}{\mu+2}nI.$$

La sphère prendrait encore une aimantation uniforme dans une bobine cylindrique assez longue pour que l'effet des extrémités puisse être considéré comme négligeable (**355**).

Il en serait de même pour un ellipsoïde et aussi très approximativement pour un cylindre dont l'axe coïnciderait avec celui de la bobine.

Dans le cas d'une bobine cylindrique de grande longueur, le champ intérieur est $F = 4\pi nI$; l'aimantation d'un long cylindre placé dans ce champ parallèlement à sa direction serait $kF = 4\pi knI$, et l'induction intérieure $F_1 = 4\pi kF = 16\pi^2 knI$.

Si S est la section du barreau, le flux d'induction magnétique qui le traverse est

$$F_1 S = 16\pi^2 knIS,$$

et le flux total, en y comprenant le flux de force $4\pi nIS$ du courant, a pour valeur

$$\varphi = 4\pi n(1 + 4\pi k)IS = \mu 4\pi nIS.$$

Cette quantité étant accessible à l'expérience, on en pourra déduire la perméabilité μ ou le coefficient d'aimantation k.

La détermination de ces coefficients est encore plus exacte

par l'emploi d'un morceau de fer doux en forme d'anneau circulaire entouré d'une bobine annulaire (**356**). Désignant par N le nombre des spires, le champ en un point est $F = 4\pi \frac{NI}{l}$, l'aimantation kF, l'induction magnétique correspondante $4\pi k F$ et, en y joignant le champ des courants,

$$F_1 = (1 + 4\pi k)F = \mu F = 4\pi NI \frac{\mu}{l}.$$

Si la section S' du fer doux n'occupe qu'une partie de l'espace S limité par les courants, le flux qui traverse le fer n'est pas modifié, et le flux total d'induction compris dans l'anneau des courants est

$$\varphi = 4\pi NI \left[\int \frac{dS}{l} + 4\pi \int \frac{k\,dS'}{l'} \right].$$

Les coefficients k et μ peuvent être considérés comme des constantes lorsque le rayon moyen R de l'anneau est assez grand par rapport à son épaisseur pour que le champ soit à peu près uniforme dans chaque section.

Supposons, par exemple, que la section du fer soit un cercle de rayon a' concentrique à la section circulaire d'un tore; le flux total d'induction dans le tore sera

$$\varphi = 4\pi NI \left[R - \sqrt{R^2 - a^2} + 4\pi k (R - \sqrt{R^2 - a'^2}) \right].$$

Si la section de la bobine annulaire est un rectangle dont les côtés sont $2b$ et $2a$, le fer ayant aussi une section rectangulaire $2b'.2a'$, l'expression du flux devient

$$\varphi = 4NI \left[b\mathfrak{L}.\frac{R + a}{R - a} + 4\pi k b' \mathfrak{L}.\frac{R + a'}{R - a'} \right].$$

On verra plus loin la méthode qui permet de déterminer la valeur de φ, pour faire usage de ces différentes formules.

361. Circuits électromagnétiques. — Si l'on considère, dans le champ d'un système de courants, un tube d'induction qui traverse la surface de n courants de même intensité I, la force

magnétomotrice correspondante (**287**) est $4\pi n\mathrm{I}$. D'une manière plus générale encore, si $\Sigma\mathrm{I}$ est la somme des intensités des courants dont la surface est traversée par le tube d'induction considéré, la force magnétomotrice est $4\pi\Sigma\mathrm{I}$.

Avec l'emploi des courants, il n'y a plus à tenir compte de la réluctance propre aux feuillets magnétiques ou aux aimants lamellaires équivalents. La réluctance r du tube d'induction étant la somme $\int \frac{dl}{\mu\mathrm{S}}$ de celle de ses éléments de longueur, le flux d'induction qui traverse le tube se réduit à

$$\varphi = \frac{4\pi n\mathrm{I}}{r} \quad \text{ou} \quad \varphi = 4\pi\,\frac{\Sigma\mathrm{I}}{r}.$$

Dans un électro-aimant de forme quelconque, le champ magnétique F est la résultante des champs produits par le système des courants et par les couches d'aimantation ; à part les effets d'hystérésis, la perméabilité μ est alors en chaque point une fonction de l'intensité F du champ.

Lorsque le circuit magnétique est fermé, c'est-à-dire entièrement composé de substances analogues au fer, l'aimantation apparente est négligeable et le champ ne dépend que des courants. Si l'on connaît, pour chacune des substances qui constituent le tube d'induction, la relation qui existe entre la perméabilité et la force magnétisante, on pourra ainsi déterminer la reluctance du tube et, par suite, le flux d'induction qui le traverse. Cette propriété importante sera utilisée dans l'étude des machines.

MESURE DES COURANTS

362. Galvanomètres. — Le champ magnétique d'un courant est, toutes choses égales, proportionnel à son intensité ; la mesure du champ donnera donc celle du courant et c'est la méthode la plus généralement employée.

L'instrument qui sert à cet usage est appelé *galvanomètre* ou *électrodynamomètre*, suivant qu'on utilise les actions électromagnétiques ou les actions électrodynamiques.

Un galvanomètre se compose d'une aiguille aimantée, ou d'un système magnétique quelconque, situé au voisinage d'un circuit conducteur que traverse le courant. Le système magnétique étant soumis, en outre, à l'action d'un champ extérieur, comme celui de la Terre, on détermine l'action du courant, soit par comparaison avec celle du champ extérieur, soit par un couple antagoniste, tel que la torsion d'un fil métallique ou d'une suspension bifilaire, qui ramène le système dans sa position primitive d'équilibre.

Considérons seulement le cas d'une aiguille horizontale suspendue à un fil sans torsion appréciable, et placée au centre d'un cadre de forme circulaire ou rectangulaire, sur lequel on a enroulé un fil conducteur suivant une série de spires parallèles.

Si le plan des spires est parallèle au méridien magnétique, et qu'on les fasse traverser par un courant I, elles produiront un champ magnétique dont l'intensité au milieu du cadre pourra être représentée par GI, le facteur G étant ce qu'on appelle la *constante galvanométrique* du cadre. En désignant par H la composante horizontale du champ terrestre, le champ résultant fait avec le méridien magnétique un angle δ dont la tangente est égale à $\frac{GI}{H}$.

Une aiguille aimantée infiniment petite placée en ce point, et qui était d'abord en équilibre dans le plan du cadre, sera donc déviée de l'angle δ, et on pourra en déduire l'intensité du courant par l'expression

$$I = \frac{H}{G} \operatorname{tang} \delta. \tag{1}$$

Lorsque la longueur de l'aiguille est de même ordre que les dimensions du cadre, le champ magnétique du courant n'est plus uniforme dans tout l'espace qu'elle occupe ; la relation est alors moins simple et le facteur G doit être considéré comme étant lui-même variable avec la déviation. Ce facteur est maximum pour $\delta = 0$ et varie très peu tant que cet angle reste très petit. L'intensité du courant est donc, entre certaines limites, simplement proportionnelle à la déviation,

quelle que soit la forme du cadre. On pourra d'ailleurs, par une graduation empirique, déterminer la relation qui existe entre l'intensité du courant et la déviation produite.

La position d'équilibre ne dépend que du mode de distribution des masses magnétiques sur l'aiguille et non de leurs valeurs absolues; l'accroissement du moment magnétique n'a d'autre effet que de modifier l'intensité des forces et, par suite, la période des oscillations de l'aiguille.

Pour augmenter la *sensibilité* du galvanomètre, c'est-à-dire la déviation δ produite par un courant déterminé, il faut augmenter la constante galvanométrique G et diminuer, s'il est possible, la valeur du champ efficace H. On augmentera la constante G en multipliant les spires du cadre, suivant la méthode de Schweigger, et en les plaçant aussi près que possible de l'aiguille. Pour diminuer le champ extérieur, on peut placer à une certaine distance un aimant qui produise au centre du cadre un champ magnétique parallèle et de sens contraire à celui de la terre.

Souvent aussi on a recours à un système quasi-astatique formé de deux aiguilles (225) portées par le même équipage, dont l'une est située au centre du cadre et l'autre à l'extérieur, c'est-à-dire en des points où le champ du courant a des directions de sens contraires; l'action de la terre sur le système mobile est beaucoup plus faible, tandis que celle du courant est augmentée. On peut encore employer deux cadres, chacun d'eux ayant une des aiguilles en son centre, et y faire passer le courant en sens contraires, de manière que les actions exercées sur les deux aiguilles soient concordantes et de même ordre.

363. Boussole des tangentes. — Si l'on veut déterminer l'intensité d'un courant en valeur absolue, il faut, en outre de la composante H du champ terrestre, connaître aussi la constante galvanométrique G de l'instrument. On donne en particulier le nom de *boussole des tangentes* à un galvanomètre dans lequel l'enroulement du fil et la forme du cadre ont été choisis de manière que ce coefficient puisse être calculé d'après leurs dimensions.

Si le cadre porte un fil de longueur L, faisant N tours sur un cercle de rayon a, ou $L = N 2\pi a$, et que l'aiguille supposée

infiniment petite soit placée en un point de l'axe à une distance u de la circonférence, on aura (353)

$$G = N\frac{2\pi a^2}{u^3} = \frac{La}{u^3} = \frac{4\pi^2 N^2}{L}\left(\frac{a}{u}\right)^3,$$

$$I = \frac{Hu^3}{La}\operatorname{tang}\delta = \frac{HL}{4\pi^2 N^2}\left(\frac{u}{a}\right)^3\operatorname{tang}\delta,$$

ce qui donne, lorsque l'aiguille est située au centre du cercle,

$$(2)\qquad I = \frac{Ha^2}{L}\operatorname{tang}\delta = \frac{Ha}{2\pi N}\operatorname{tang}\delta = \frac{HL}{4\pi^2 N^2}\operatorname{tang}\delta.$$

Pour une aiguille de longueur notable par rapport au rayon de la bobine, il serait encore nécessaire d'évaluer l'intensité du champ en dehors de l'axe des courants.

La formule de la boussole des tangentes est rigoureuse et indépendante de la longueur de l'aiguille, lorsque le champ du courant est uniforme. C'est ce qui aurait lieu, par exemple, avec une bobine cylindrique très longue (355) ou une bobine sphérique (357), constituées par des courants équidistants. En appelant n le nombre des spires par unité de longueur, les valeurs de la constante galvanométrique G sont respectivement $4\pi n$, dans le premier cas, et $\frac{8}{3}\pi n$ dans le second.

364. Electrodynamomètres. — Dans un électrodynamomètre on évalue directement l'action exercée entre deux circuits, l'un fixe et l'autre mobile, traversés par le même courant ou par deux courants différents. Supposons, par exemple, que l'aimant d'une boussole des tangentes soit remplacé par une petite bobine, où un courant pourra être amené par une suspension bifilaire, et qui est en équilibre quand l'axe de la bobine est dans le méridien magnétique. Si l'on fait passer un courant I dans le cadre et un courant I' dans la bobine, celle-ci est déviée; par une torsion convenable α de la suspension on la ramène dans sa position primitive.

Le moment magnétique de la bobine mobile est proportionnel à I' et peut être représenté par KI'; le couple produit

par l'action du cadre est alors $GKII'$. Comme le couple de torsion du bifilaire est proportionnel au sinus de l'angle, on aura, en désignant par C le moment du couple qui correspond à une torsion de 90°,

$$GKII' = C \sin\alpha, \tag{3}$$

ou, si le même courant I parcourt les deux fils,

$$I^2 = \frac{C}{GK} \sin\alpha. \tag{4}$$

On pourra donc déterminer la valeur absolue de l'intensité du courant, si l'on connaît les constantes C, K et G, ou bien laisser ces constantes indéterminées et se servir de l'appareil comme d'un instrument de comparaison. Tel est le principe des expériences de Weber.

D'autres dispositions expérimentales permettraient encore d'évaluer le produit de deux courants en déterminant, par exemple, au moyen de la balance, l'attraction ou la répulsion qui s'exerce entre des circuits qu'ils parcourent.

365. Galvanomètre balistique. — Lorsque la durée du courant est assez courte pour que l'aiguille n'ait pas le temps de subir un déplacement appréciable avant la cessation du courant, cette aiguille a reçu cependant une impulsion et acquis une certaine vitesse ; elle est projetée hors de sa position d'équilibre et y revient ensuite par une série d'oscillations. C'est le cas, par exemple, de la décharge d'un condensateur par un fil conducteur qui renferme un galvanomètre ; la quantité totale d'électricité que débite la décharge peut se déduire de l'angle d'impulsion imprimé à l'aiguille. On dit alors que le galvanomètre est *balistique*.

Lorsque le galvanomètre dont on fait usage est traversé par un courant permanent, l'intensité est donnée par une expression de la forme

$$I = \frac{H}{G} f(\delta),$$

dans laquelle le coefficient G peut être considéré comme une constante, et où la fonction inconnue $f(\delta)$ se réduit simplement

à l'angle δ tant que les déviations restent très petites. Si l'on appelle m le moment magnétique de l'aiguille, l'action du courant sur l'aiguille dans sa position d'équilibre produit un couple dont le moment est mGI.

On sait, d'autre part, que lorsqu'un corps tourne autour d'un axe avec une vitesse angulaire ω, le produit du moment d'inertie K par l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ est égal au moment du couple résultant par rapport à l'axe de rotation. Comme l'intensité I d'un courant est le quotient de la quantité élémentaire d'électricité dq qui s'écoule par l'intervalle de temps dt correspondant, et que la déviation pendant la décharge est assez petite pour que le couple produit par l'action de la terre soit négligeable, on a, dans le cas actuel,

$$\mathrm{K}\frac{d\omega}{dt} = m\mathrm{GI} = m\mathrm{G}\frac{dq}{dt}.$$

On en déduit, en appelant ω_0 la vitesse angulaire imprimée à l'aiguille et q la décharge totale,

$$\mathrm{K}\omega_0 = m\mathrm{G}q.$$

Une fois lancée avec cette vitesse, l'aiguille a acquis une force vive égale à $\frac{\mathrm{K}\omega_0^2}{2} = \frac{m^2\mathrm{G}^2q^2}{2\mathrm{K}}$; elle s'arrête après avoir atteint une déviation α, dite *angle d'impulsion*, pour revenir vers sa position primitive. Le repos temporaire correspond au moment où la force vive a été épuisée par le travail contraire du champ terrestre; on a donc

$$\frac{m^2\mathrm{G}^2q^2}{2\mathrm{K}} = \mathrm{H}m(1-\cos\alpha) = 2\mathrm{H}m\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

$$q^2 = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{G}^2}\cdot\frac{\mathrm{K}}{m}\,4\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{G}^2}\cdot\frac{\mathrm{K}}{m\mathrm{H}}\,4\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Lorsque l'angle d'impulsion α reste assez petit, il est simplement proportionnel à la quantité d'électricité qui s'écoule pendant la décharge, et cette loi de proportionnalité suffira pour toutes les expériences de comparaison.

Remarquons maintenant que, si l'on fait osciller l'aiguille sous la seule influence du magnétisme terrestre, la durée τ des oscillations simples infiniment petites est

$$\tau^2 = \pi^2 \frac{K}{mH};$$

il en résulte

$$q = \frac{H}{G} \frac{\tau}{\pi} \alpha.$$

Pour déterminer la décharge q en valeur absolue, il faut encore connaître la composante horizontale H du champ terrestre et la constante G du galvanomètre ; cette dernière valeur pourra être calculée directement ou déterminée par comparaison avec une boussole des tangentes, en faisant passer un même courant dans les deux appareils.

En réalité, l'angle d'impulsion α est diminué par la résistance du milieu et, comme on le verra plus loin, par les courants d'induction que le mouvement de l'aiguille produit dans le fil; mais, si les oscillations ne diminuent pas très rapidement, on ne fait pas d'erreur appréciable en admettant que les causes d'amortissement produisent le même effet à chaque oscillation, au moins pour les premières.

L'aiguille revenant du côté de l'impulsion primitive à la 5e oscillation simple, la différence des écarts correspond à la perte d'amplitude pendant 4 oscillations. Le nouvel écart étant α', l'impulsion que l'on aurait dû observer, sans amortissement, est égal à $\alpha + \frac{\alpha - \alpha'}{4}$. On aura donc finalement

$$q = \frac{H}{G} \cdot \frac{\tau}{\pi} \left(\alpha + \frac{\alpha - \alpha'}{4} \right).$$

CHAPITRE QUATRIÈME

COURANTS INDUITS

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

366. Découverte de Faraday. — Les actions électromagnétiques ou électrodynamiques étudiées dans les chapitres précédents sont purement *mécaniques*; elles produisent des forces appliquées soit sur les aimants, soit sur les conducteurs traversés par des courants, et correspondent à un état permanent des courants et des aimants en présence. Dans tous les cas où les systèmes éprouvaient des déplacements relatifs, nous avons admis, en effet, expressément ou d'une manière implicite, que ces déplacements étaient sans influence sur l'état électrique des conducteurs.

Faraday ([1]) a découvert en 1831 une nouvelle classe de phénomènes de nature toute différente, qui correspondent à l'état variable des systèmes; ces phénomènes, qu'il a compris sous le nom général d'*induction*, sont de nature *électrique* et se manifestent par la production dans les conducteurs de courants temporaires.

Les courants qui en résultent sont appelés *courants induits* et le circuit qu'ils parcourent *circuit induit;* le système dont la variation a été la cause du courant induit est l'*inducteur*.

Au point de vue expérimental, les courants induits peuvent être compris dans plusieurs catégories distinctes :

1° Un circuit fermé devient le siège d'un courant temporaire quand on déplace un aimant dans le voisinage, ou qu'on

([1]) Faraday, *Experim. Researches*, série I, p. 125 et *Philos. Trans. L. R. S.* pour 1832, p. 125.

en fait varier l'aimantation, ou, d'une manière plus générale, qu'on modifie le champ magnétique dans lequel est placé le circuit. C'est l'*induction magnéto-électrique.*

2° On obtient des effets analogues en substituant un système de courants au système magnétique. Le circuit considéré est parcouru par un courant induit toutes les fois qu'on fait varier la distance, l'intensité ou la forme d'un courant extérieur, comme si l'on produisait la modification correspondante du système magnétique équivalent au courant. C'est l'*induction électrodynamique ou volta-électrique.*

3° Ces phénomènes ne dépendent que des modifications dans la forme ou dans la position relative du circuit par rapport au champ magnétique d'un système extérieur d'aimants ou de courants; on peut donc, sans changer les résultats, laisser le champ extérieur invariable et déformer ou déplacer le circuit qui est le siège de l'induction.

4° Enfin, le fait seul de modifier par un procédé quelconque l'intensité du courant dans un circuit, même quand il est soustrait à toute action extérieure, provoque dans ce circuit un courant d'induction, qui se superpose au courant primitif et est toujours de sens contraire à la variation d'intensité du courant principal ; on donne à ce genre particulier de courants induits le nom d'*extra-courants.*

367. Caractères des courants induits. — L'expérience fournit d'abord sur ces phénomènes les faits généraux suivants :

1° Quel que soit le mode de variation qui provoque un courant induit, deux variations égales en sens opposés donnent des courants égaux et de sens contraires;

2° La durée du courant induit est égale à celle de la variation du système inducteur;

3° La quantité d'électricité mise en mouvement dans le courant induit, par une opération quelconque, est indépendante de la durée de la variation et, par suite, de celle du courant induit lui-même;

4° Enfin, la nature du conducteur où se propagent les courants d'induction n'intervient que par la résistance qu'il apporte dans le circuit.

En examinant les diverses circonstances dans lesquelles se produisent les courants d'induction, il est facile de recon-

naître qu'elles ont pour caractère commun de correspondre à une variation du flux de force magnétique qui traverse le circuit induit. Cela est évident pour tous les phénomènes de déplacement relatif des courants ou des aimants; l'expérience montre, d'ailleurs, que tout déplacement ou toute déformation du circuit induit qui ne modifie pas la valeur du flux qui le traverse ne produit jamais de courants induits.

Il en est encore de même pour l'extra-courant. En effet, un courant donne lieu à un champ magnétique et, par suite, à un flux de force qui traverse la surface limitée à son propre circuit. On conçoit que tout changement d'intensité ou de forme modifiant ce flux de force puisse provoquer un effet analogue à celui que produirait le déplacement d'un aimant extérieur donnant lieu à la même variation.

On est donc conduit à caractériser les phénomènes d'induction de la manière suivante :

Quand on modifie d'une manière quelconque le flux de force magnétique qui traverse un circuit fermé, ce circuit devient le siège d'un courant temporaire dont la durée est égale à celle de la variation du flux.

Cet énoncé définit les conditions dans lesquelles se produisent les courants induits; il reste à établir les lois qui en déterminent le sens et la grandeur.

368. Loi de Lenz. — Le sens des courants induits que l'on obtient par le déplacement relatif ou la déformation des systèmes est défini par une loi générale que Lenz (¹) a énoncée, peu de temps après la découverte de Faraday. Ces mouvements relatifs sont généralement accompagnés d'un travail des forces électromagnétiques ou électrodynamiques, soit du système primitif, soit des courants induits. On peut formuler la loi de Lenz de la manière suivante :

Tout déplacement relatif d'un circuit fermé et d'un système de courants ou d'aimants développe un courant induit dirigé de façon que le travail des actions réciproques tende à s'opposer au mouvement.

Cette loi, d'une grande utilité pratique, a même une portée plus générale, car elle convient également à d'autres phéno-

(¹) Lenz, *Acad. des Sciences de St-Pétersbourg*, 29 novembre 1833. — *Pogg. Ann.* t. XXXI, p. 483; 1834.

mènes dont nous avons vu déjà quelques exemples (**74**, **212**), alors même que l'électricité ne joue aucun rôle; elle représente une sorte de résistance que les propriétés de la matière opposent à tout changement d'état.

369. Théorème de Neumann. — Pour déterminer l'intensité du courant induit, Neumann [1] admit, comme un fait expérimental, que dans le déplacement relatif de deux systèmes le *courant induit pendant un temps très court est proportionnel à la vitesse du mouvement.* Ce principe permet d'établir une théorie complète des courants d'induction qui se produisent dans un conducteur linéaire mobile en présence d'un système magnétique quelconque.

Neumann en déduit, en particulier, ce théorème, que nous retrouverons plus loin sous une forme plus générale :

La force électromotrice d'induction est égale au travail qui serait accompli dans l'unité de temps par le système magnétique, si l'intensité du courant dans le circuit induit était égale à l'unité.

370. Principe de la conservation de l'énergie. — L'existence des phénomènes d'induction peut être considérée comme une conséquence nécessaire du principe de la conservation de l'énergie, combiné avec les lois d'Ohm et de Joule et avec celles des actions électromagnétiques. Cette proposition importante a été mise pour la première fois en lumière en 1847 par Von Helmholtz [2] dans son célèbre mémoire sur la *Conservation de la force.* Lord Kelvin [3] est arrivé de son côté et d'une manière indépendante aux mêmes conclusions.

Lorsque le régime permanent est établi dans un circuit de résistance R, qui renferme une force électromotrice constante E, l'intensité I_0 du courant, est réglée par la loi d'Ohm

$$E = R I_0, \tag{1}$$

qui donne, en multipliant les deux membres par $I_0 dt$,

$$E I_0 dt = R I_0^2 dt. \tag{2}$$

Cette équation signifie que, pendant le temps dt, l'énergie

(1) NEUMANN, *Abhandl. der Berl. Akad. der Wissenschaften;* 1845, p. 1.
(2) HELMHOLZ, *Die Erhaltung der Kraft,* p. 60; 1847.
(3) W. THOMSON, *British Ass. Rep.*; 1848, pl. II, p. 9.

$EI_0 dt$ fournie par la force électromotrice, laquelle est empruntée aux actions chimiques dans le cas d'une pile, est égale à l'énergie calorifique $RI_0^2 dt$ dégagée dans le circuit en vertu de la loi de Joule.

Supposons maintenant que le courant effectue un travail extérieur dT; l'équation (2) est alors en défaut, puisque l'énergie chimique doit fournir en même temps à l'échauffement du circuit et au travail accompli; le courant doit donc prendre une autre valeur I.

Il est ici nécessaire de faire deux hypothèses dont l'exactitude ne semble pas pouvoir être contestée. Si la pile est de nature chimique, il paraît évident que la loi de Faraday est encore applicable, c'est-à-dire que les poids des corps combinés restent proportionnels au courant et que l'énergie chimique est $EI dt$, car les réactions produites dans la pile sont indépendantes de tout ce qui se passe à l'extérieur. D'autre part, aucune raison ne permet de mettre en doute que la chaleur dégagée dans un élément du circuit soit encore représentée par la loi de Joule, de sorte que l'énergie calorifique est $RI^2 dt$. L'excès de l'énergie chimique sur l'énergie calorifique, ou l'énergie disponible, représente alors le travail extérieur, ce qui donne

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} (EI - RI^2)\,dt &= dT, \\ (E - RI)\,dt &= \frac{1}{I}\,dT. \end{aligned} \right.$$

Si l'on pose $I = I_0 + i$ ou $E - RI = E - RI_0 - Ri$, la quantité i représente la variation de courant corrélative du travail extérieur; c'est un courant *induit*.

En remplaçant E par sa valeur (1) relative au régime permanent, il en résulte

$$(4) \qquad Ri = -\frac{1}{I}\frac{dT}{dt} = e,$$

$$(5) \qquad RI = E + e.$$

Le courant I est ainsi défini par la même expression que s'il existait à chaque instant dans le circuit une force électro-

motrice $E + e$; la quantité e est la force électromotrice d'induction corrélative du travail extérieur dT.

371. Régime uniforme. — Si le circuit du courant se trouve en présence d'un système magnétique qui se déplace, le travail du courant sur le système est le produit $I d\varphi$ de l'intensité par l'accroissement $d\varphi$ du flux de force magnétique émis par le système dans la face négative du courant.

Le milieu extérieur n'absorbe aucune partie de l'énergie des courants à régime invariable; si le mouvement du système est réglé de manière que la nouvelle intensité I reste constante, ce qui est toujours possible, on aura donc $dT = I d\varphi$; dans ce cas, l'équation (4) devient

$$(6) \qquad R i = -\frac{d\varphi}{dt} = e.$$

La condition nécessaire pour que le courant soit uniforme, avec la valeur I donnée par l'équation (5), est donc que le flux de force φ émis par le système magnétique dans le circuit varie proportionnellement au temps.

L'équation (6) conduit déjà à plusieurs conséquences :

Th. I. *Le courant induit* i *tend à s'opposer au mouvement du système magnétique*; c'est la *loi de Lenz*. En effet, quand on a $d\varphi > 0$ ou $dT > 0$, le courant induit i est négatif, c'est-à-dire de sens contraire au courant I qui produit le travail $I d\varphi$; l'inverse a lieu si $d\varphi < 0$, auquel cas le mouvement du système magnétique devrait être produit par des forces étrangères.

Th. II. *La force électromotrice d'induction* e *est égale et de signe contraire à la dérivée par rapport au temps du flux de force magnétique qui traverse le circuit.*

Th. III. *Pour l'unité d'intensité, le travail du courant sur le système magnétique pendant l'unité de temps est* $\frac{d\varphi}{dt} = -e$; c'est le *théorème de Neumann*.

Th. IV. La quantité d'électricité induite dans le circuit pendant le temps dt est $i\,dt = dq$. Entre deux positions 1 et 2 du système magnétique, on a donc

$$R \int i\,dt = R \int dq = -\int_1^2 d\varphi,$$

$$(7) \qquad R q = \varphi_1 - \varphi_2.$$

La quantité q *d'électricité induite est le produit de l'inverse de la résistance du circuit par la diminution du flux de force du système magnétique dans le circuit*, ou par l'accroissement du flux de force dans la surface positive.

372. Régime variable. — Lorsque le système magnétique n'existe pas ou se déplace suivant une loi différente, le courant I varie avec le temps.

On doit admettre, en outre, que l'établissement et les variations d'intensité du courant exigent un travail particulier, qui réside sans doute dans le milieu sous forme d'énergie en réserve, ou énergie *intrinsèque* du courant, et qu'on pourra utiliser en supprimant la force électromotrice.

Quelle que soit d'ailleurs la nature de ce travail, il est infiniment petit pour une variation $d\mathrm{I}$ du courant et peut être représenté par $\mathrm{I}f(\mathrm{I})\,d\mathrm{I}$; le travail extérieur est alors

$$d\mathrm{T} = \mathrm{I}\left[d\varphi + f(\mathrm{I})\,d\mathrm{I}\right],$$

et l'équation (4) devient

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{R}i = -\frac{d\varphi}{dt} - f(\mathrm{I})\frac{d\mathrm{I}}{dt} = e.$$

Dans ce cas, la force électromotrice d'induction dépend elle-même des variations du courant. On a encore, entre deux états du système,

$$\text{(9)} \qquad \mathrm{R}\int_1^2 i\,dt = \mathrm{R}q = \varphi_1 - \varphi_2 - \int_1^2 f(\mathrm{I})\,d\mathrm{I}.$$

Quel que soit le mode de variation du champ magnétique extérieur, si les intensités I_1 et I_2 du courant sont les mêmes aux deux limites, la dernière intégrale est nulle. C'est ce qui aura lieu, en particulier, lorsque le champ est produit par un système magnétique partant du repos relatif, pour arriver ensuite au repos, auquel cas les valeurs initiale et finale du courant sont égales à I_0.

Avec cette restriction, le Th. IV du n° précédent peut être considéré comme général.

Remarquons ici que la force électromotrice d'induction (6),

produite par le mouvement d'un système magnétique dans des conditions convenables, et même la valeur plus générale (8), sont indépendantes de l'existence d'une force électromotrice E dans le circuit. L'induction doit donc se produire également lorsque le conducteur est primitivement à l'état neutre; c'est sous cette forme que les courants d'induction ont été découverts par Faraday.

Il est vrai que, si le courant était réellement nul, l'action réciproque de l'aimant et du circuit serait aussi nulle, et les considérations précédentes ne permettraient pas de prévoir la production de courants induits. Mais on peut dire que cette neutralité parfaite n'est qu'un état d'équilibre instable, impossible à réaliser pratiquement, et qu'il suffirait d'une cause infiniment petite, une variation de température en quelque point du circuit, dont l'homogénéité physique n'est jamais absolue, ou le déplacement d'un corps électrisé extérieur, même à une très grande distance, pour faire naître un courant si faible qu'il fût, auquel cas les raisonnements peuvent être appliqués.

Lorsque le circuit reste ouvert, la force électromotrice d'induction produit des différences de potentiel le long des conducteurs et une électrisation qui va croissant vers les extrémités libres.

373. Loi générale de l'induction. — Les raisonnements qui précèdent s'appliqueraient de la même manière, et presque identiquement dans les mêmes termes, aux différentes catégories de courants induits.

On le voit d'une manière évidente pour l'induction électrodynamique, c'est-à-dire celle qui serait produite par le déplacement d'un système de courants constants, substitué au système magnétique, puisqu'on a démontré l'équivalence absolue des champs magnétiques produits par les courants et par les aimants.

Dans le cas des courants induits par variation d'intensité d'un aimant ou d'un courant voisin, le résultat peut être considéré comme équivalent à celui qu'on obtiendrait en amenant de l'infini dans la position actuelle, pour le superposer au premier, un aimant ou un courant identique à la variation considérée.

Quant aux extra-courants, produits par les déformations du circuit lui-même ou par les changements d'intensité du courant principal, l'expérience montre qu'ils sont liés également, et de la même manière, aux variations correspondantes du flux de force magnétique.

On peut donc considérer comme une règle générale que toute variation du flux de force dans un circuit, quelle qu'en soit l'origine, correspond à une variation de l'énergie potentielle et donne lieu à la même force électromotrice d'induction que si cette variation était produite par le déplacement d'un système magnétique extérieur.

Cette conséquence apparaît surtout comme nécessaire, si, abandonnant l'idée des actions à distance, on considère la transmission des forces électriques et magnétiques comme due à une modification des propriétés élastiques du milieu intermédiaire ; on comprend alors que la seule cause prochaine des courants induits dans un conducteur puisse être l'état du milieu où il est plongé, quelle que soit l'origine des forces qui agissent dans ce milieu.

S'il existe des aimants dans le voisinage du circuit ou si le milieu lui-même est magnétique, on doit remplacer le flux de force par le flux d'induction magnétique correspondant. La loi générale d'induction peut donc se formuler de la manière suivante :

La force électromotrice d'induction dans un circuit est égale et de signe contraire à la dérivée, par rapport au temps, du flux total d'induction magnétique qui le traverse.

374. Énergie intrinsèque d'un courant. — Le flux de force émis par un courant dans son propre circuit peut être représenté par LI. Le facteur L est une constante, et représente le flux relatif à l'unité de courant, lorsque le milieu n'est pas magnétique ou que l'aimantation est en chaque point proportionnelle au champ ; c'est le *coefficient d'induction propre* ou *de self-induction* du circuit. Ce coefficient dépend de la forme du contour, de la section du conducteur et même aussi de la manière dont le courant est distribué dans la section, mais on n'aura d'abord à considérer que les courants homogènes, distribués comme les courants permanents.

Quand il existe des milieux magnétiques dont l'aimantation

n'est pas proportionnelle aux champs, le facteur L doit être lui-même considéré comme une fonction de l'intensité.

S'il existe un système magnétique dans le voisinage, le flux total d'induction dans le circuit est $\varphi + LI$ et l'on a

$$\text{(10)} \qquad E - RI = \frac{d(\varphi + LI)}{dt},$$

$$\text{(11)} \qquad (E - RI)\,dt = d\varphi + L\,dI + I\,dL,$$

ou, en multipliant par I de part et d'autre,

$$(EI - RI^2)\,dt = I\,d\varphi + d\left(\frac{LI^2}{2}\right) + \frac{I^2}{2}\,dL.$$

L'intégration entre deux états 1 et 2 du système donne

$$\int_1^2 (EI - RI^2)\,dt = \int_1^2 I\,d\varphi + \left[\frac{LI^2}{2}\right]_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 I^2\,dL.$$

Le premier membre représente l'énergie totale disponible du courant ; le premier terme du second membre est le travail électromagnétique. Si l'on appelle *énergie intrinsèque* du courant l'expression $\frac{LI^2}{2}$, le terme suivant en représente la variation entre les deux courants I_1 et I_2 ; cette énergie est le travail que coûterait l'établissement du courant I dans le circuit, ou le travail qu'il peut produire quand on l'annule. Le dernier terme a une signification plus complexe. Si le coefficient L ne dépend que de la forme du circuit, ce terme est le travail qui correspondrait à une déformation du contour ; il disparaît alors lorsque le contour est invariable.

Enfin, quand il n'existe pas d'aimants ou qu'ils sont immobiles par rapport au circuit, on a toujours $d\varphi = o$; l'énergie disponible sert uniquement à faire varier l'énergie intrinsèque du circuit et l'équation (10) se réduit à

$$\text{(12)} \qquad E = RI + L\frac{dI}{dt};$$

c'est une équation différentielle qui intervient dans un grand nombre de problèmes.

375. Induction électrodynamique. — Lorsque le flux inducteur φ dans un circuit C provient d'un feuillet magnétique ou d'un courant I' dans un autre circuit C', il est proportionnel à ce courant I' par un facteur M qui est encore une constante, avec les mêmes restrictions que précédemment, et que nous avons appelé déjà (327) le *coefficient d'induction mutuelle* des deux contours. Le flux total dans le premier circuit C étant $MI' + LI$, l'équation (10) devient

$$(E - RI)dt = d(MI' + LI).$$

Si le circuit C', de résistance R', renferme aussi une force électromotrice E', le flux qui le traverse est $MI + L'I'$ et l'on a, de même,

$$(E' - R'I')dt = d(MI + L'I').$$

Ces équations, ajoutées membre à membre, après avoir multiplié la première par I et la seconde par I', donnent

$$(13)\quad (EI - RI^2 + E'I' - R'I'^2)dt = Id(MI' + LI) + I'd(MI + L'I').$$

Le premier membre représente l'énergie disponible dans les deux circuits. Pour le second membre, on a d'abord, d'après ce qui a été vu précédemment,

$$Id(LI) + I'd(L'I') = d\left(\frac{LI^2}{2}\right) + d\left(\frac{L'I'^2}{2}\right) + \frac{I^2}{2}dL + \frac{I'^2}{2}dL',$$

et les termes en M peuvent s'écrire

$$Id(MI') + I'd(MI) = d(MII') + II'dM.$$

Le second membre de l'équation (13) est donc

$$d\left[\frac{LI^2}{2} + MII' + \frac{L'I'^2}{2}\right] + \frac{I^2}{2}dL + II'dM + \frac{I'^2}{2}dL'.$$

L'ensemble des trois premiers termes représente la variation de l'*énergie intrinsèque* du système des deux courants. Cette énergie comprend l'énergie intrinsèque propre à chacun des circuits supposé soustrait à toute action étrangère et une énergie MII' due à leur situation relative.

Les termes suivants correspondent au travail de déformation de chacun des circuits ou de leur déplacement relatif.

Remarquons enfin que l'on peut écrire

$$\frac{LI^2}{2}+MII'+\frac{L'I'^2}{2}=I\frac{LI+MI'}{2}+I'\frac{L'I'+MI}{2}.$$

Chacun des termes du second membre est la moitié du produit du courant par le flux de force qui traverse le circuit correspondant ; il représente le travail qu'il faudrait dépenser pour amener le champ, dans le circuit considéré, de zéro à sa valeur actuelle et, par suite, le travail qu'il serait capable de produire si on annulait en même temps les deux courants. Cette règle est générale pour un ensemble quelconque de courants.

La portion de l'énergie considérée ici se trouve sous une forme qu'il n'est pas possible de préciser actuellement. On ne peut dire, par exemple, si elle existe à l'état d'énergie potentielle ordinaire, comme serait la tension d'un corps élastique, ou d'une énergie actuelle, consistant dans le mouvement d'un fluide particulier ou les vibrations d'un corps, ou bien encore sous les deux formes à la fois ; ni si elle est localisée dans le circuit traversé par le courant ou, suivant les vues plus probables de Faraday et de Maxwell, répandue dans le milieu tout entier.

Supposons que les deux circuits aient une forme invariable et qu'on les déplace de telle manière que les deux intensités I et I′ gardent des valeurs constantes, différentes naturellement des valeurs initiales ou finales ; le coefficient M étant alors seul variable, l'équation (13) se réduit à

$$(EI-RI^2+E'I'-R'I'^2)\,dt=2II'\,dM.$$

Dans ce cas, l'énergie disponible des deux courants est double du travail des forces électrodynamiques : une moitié de cette énergie est employée à produire le travail extérieur, l'autre à accroître l'énergie intrinsèque MII' correspondant à la position relative des deux courants.

Cette remarque doit être rapprochée de la proposition analogue relative au déplacement des conducteurs à potentiel constant (70).

376. Forces électromotrices élémentaires. — Quand un circuit se déplace ou se déforme dans le champ produit par un système extérieur, la variation totale du flux de force φ n'est autre chose que l'ensemble des flux de force coupés par les éléments du contour. On doit donc considérer la force électromotrice totale d'induction due à ces déplacements comme la somme d'une série de forces électro-motrices élémentaires provoquées dans chacun des éléments du contour.

Pour un élément ds qui fait l'angle α avec la direction du champ F, l'action électrodynamique serait dirigée suivant la normale au plan Fds, vers la gauche du courant. Si dx est la projection du déplacement sur cette normale, comptée vers la droite, la diminution correspondante du flux de force dans le circuit est $\mathrm{F}ds \sin\alpha . dx$. La force électromotrice de relative à l'élément ds est donc

$$de = \frac{d}{dt}(\mathrm{F}\,ds \sin\alpha . dx) = \mathrm{F}ds \sin\alpha \frac{dx}{dt}. \tag{14}$$

Cette force électromotrice est un accroissement du potentiel électrique V dans l'étendue de l'élément considéré. Comme le champ varie lui-même avec le temps, cet accroissement de potentiel par unité de longueur devra s'écrire

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial s} = \mathrm{F} \sin\alpha \frac{dx}{dt}.$$

Si le conducteur induit reste immobile et que le champ soit produit par un ensemble d'autres courants I', le flux de force relatif aux circuits extérieurs est (**328**)

$$\varphi = ds \Sigma \int \frac{\mathrm{I}'\,ds' \cos\varepsilon}{r}.$$

La force électromotrice produite sur l'élément ds et l'accroissement de potentiel correspondant sont alors.

$$de = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial s} ds = ds \frac{\partial}{\partial t} \Sigma \int \frac{\mathrm{I}'\,ds' \cos\varepsilon}{r}. \tag{15}$$

CHAPITRE CINQUIÈME

CAS PARTICULIERS D'INDUCTION

PHÉNOMÈNES DIVERS

317. La résistance électromagnétique est une vitesse. — On a vu déjà (**329**) que la nature de la force électromotrice et de l'intensité d'un courant, évaluées en unités électromagnétiques, donne pour la résistance une vitesse physique. Les phénomènes d'induction permettent de concevoir des expériences dans lesquelles la résistance serait mesurée par la vitesse d'un système en mouvement uniforme.

Considérons le cas (fig. 93) d'une barre CC′ sur deux rails parallèles AA′, BB′, à la distance b, situés dans un plan vertical perpendiculaire au méridien magnétique, et dont les extrémités A et B sont réunies par un conducteur métallique. Supposons que la composante horizontale H du champ terrestre soit dirigée d'arrière en avant et qu'on donne au pont CC′, parallèlement à lui-même, un déplacement dx vers la droite. Il en résulte un courant d'induction qui tend à s'opposer au mouvement et parcourt le pont de C en C′.

Le flux de force coupé étant égal à $\mathrm{H}bdx$, la quantité dq d'électricité induite est, en appelant R la résistance totale du circuit,

$$\mathrm{R}dq = \mathrm{H}bdx,$$

$$\mathrm{R}\frac{dq}{dt} = \mathrm{H}b\frac{dx}{dt}.$$

Le rapport $\frac{dq}{dt}$ est l'intensité I du courant induit et $\frac{dx}{dt}$ représente la vitesse u de transport du pont ; on a donc

$$RI = Hbu.$$

Si la résistance des rails est négligeable devant celle du conducteur extérieur et que le mouvement du pont soit uniforme, les facteurs R et u sont des constantes et l'intensité I du courant est elle-même invariable.

Supposons maintenant que le circuit renferme une boussole des tangentes (**363**), dans laquelle le courant I produise une déviation δ ; on aura

$$R = \frac{H}{I} bu = \frac{Lb}{a^2 \operatorname{tang} \delta} u.$$

Le premier facteur de la dernière expression est un nombre abstrait, puisque les quantités L, b et a sont des longueurs ; la résistance R est donc un multiple de la vitesse u.

Si l'on fait $Lb = a^2$ et que la vitesse u soit assez grande pour que l'action du courant soit égale à celle du champ terrestre, c'est-à-dire que la déviation de l'aiguille dans la boussole soit de 45°, il reste simplement $R = u$.

Ainsi, la résistance du circuit considéré est égale à la vitesse avec laquelle il faudrait déplacer le pont d'un mouvement uniforme, dans les conditions indiquées, pour que l'action du courant induit sur une boussole de dimensions convenables produise une déviation de 45°.

L'expérience suivante, indiquée par Faraday, peut être considérée comme une application du même problème.

Supposons que deux électrodes A et B soient plongées dans l'eau, aux bords opposés d'une rivière, d'un canal ou d'un courant marin, et reliées entre elles par un conducteur métallique. Si u est la vitesse du courant et b la distance des électrodes, il s'établira entre elles, sous l'influence de la composante verticale Z du magnétisme terrestre, une force électromotrice égale à Zbu, qui donnerait dans un circuit de résistance R un courant I tel que $RI = Zbu$.

Cette expérience n'est pas irréalisable ; mais, à moins de

pouvoir opérer avec des valeurs très grandes de u et de b, la polarisation des électrodes rendrait, sans doute, très difficile l'observation du courant induit.

378. Circuit fermé dans un champ uniforme. — Considérons un circuit fermé de surface S. Supposons qu'il soit placé dans un champ uniforme d'intensité F, le champ terrestre par exemple, et perpendiculaire à la direction du champ. Si on fait tourner le cadre d'un angle α autour d'une perpendiculaire au champ, la variation du flux de force magnétique est égale à $FS(1-\cos\alpha)$, et la quantité q d'électricité mise en mouvement dans un circuit de résistance R, est

$$Rq = FS(1-\cos\alpha).$$

Un retournement face pour face donnerait

$$Rq = 2FS.$$

La quantité d'électricité q peut être déterminée en valeur absolue (**365**) par l'emploi d'un galvanomètre balistique; c'est une méthode fréquemment utilisée pour la comparaison des résistances ou des champs magnétiques.

On a vu, par exemple (**324**), que la tangente de l'inclinaison magnétique I est égale au rapport des travaux qui correspondent, pour une même intensité de courant, au retournement, face pour face, d'un cadre d'abord horizontal, puis vertical et perpendiculaire au méridien. Ce rapport est celui des forces électromotrices d'induction ou des quantités correspondantes d'électricité induite. En appelant q et q' les décharges relatives à ces opérations, α et α' les angles d'impulsion, corrigés de l'amortissement, qu'elles produisent dans un même galvanomètre balistique, on a

$$\operatorname{tang} I = \frac{Z}{H} = \frac{q}{q'} = \frac{\alpha}{\alpha'}.$$

379. Disque de Faraday. — Un disque de métal, mobile autour de son axe, lequel est parallèle à la direction d'un champ uniforme F, fait partie d'un circuit formé par un conducteur qui communique, d'une part à l'axe de rotation, et

d'autre part à une lame de ressort qui appuie sur un point de la circonférence. Lorsqu'on imprime au disque un mouvement de rotation uniforme, il se produit également dans le circuit un courant uniforme. C'est l'opération inverse de la roue de Barlow (**347**). Si, le plan du disque étant vertical, le champ F le traverse d'avant en arrière et que le sens de la rotation soit celui des aiguilles d'une montre, le courant induit parcourt le disque du centre à la circonférence.

La force électromotrice a pour expression, en désignant par a le rayon du disque et ω la vitesse angulaire,

$$e = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega a^2}{2} F.$$

On obtiendrait un résultat analogue en plaçant le disque entre les pôles d'un aimant en fer à cheval ou entre les armatures de deux électro-aimants. Sous cette dernière forme, M. Le Roux a obtenu des courants assez intenses pour produire de vives étincelles entre le disque et le ressort.

Les courants induits apparaissent d'ailleurs dans toutes les expériences, en particulier celles qui ont été examinées au chapitre III, où le mouvement d'un circuit conducteur est provoqué par des actions électromagnétiques ou électrodynamiques; ces courants doivent intervenir dans le calcul des forces mécaniques qui provoquent les déplacements.

380. Courants telluriques. — Considérons, par exemple, une sphère aimantée uniformément. Supposons qu'un arc conducteur, s'appuyant par l'une de ses extrémités sur le pôle magnétique et par l'autre sur l'équateur, tourne autour de l'axe d'un mouvement uniforme; cet arc coupera le même flux de force que s'il était appliqué sur la surface le long d'un méridien. Un élément de méridien ds, dont la vitesse linéaire est v, coupe dans chaque unité de temps un flux de force égal à $Zv\,ds$, Z étant la composante normale du champ magnétique à la latitude λ de l'élément.

Soit a le rayon de la sphère, ω la vitesse angulaire de rotation de l'arc et P la valeur du champ au pôle; on a

$$v = \omega a \cos\lambda, \qquad Z = P \sin\lambda, \qquad ds = a\,d\lambda.$$

Le flux de force coupé dans chaque unité de temps par l'arc entier, ou la force électromotrice d'induction e, est

$$e = P\omega a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\lambda \cos\lambda \, d\lambda = \frac{P\omega a^2}{2}.$$

Si l'arc est isolé, cette valeur de e représente la différence de potentiel qui s'établit entre ses deux extrémités. Si les extrémités de l'arc étaient reliées à deux corps de même capacité C, ces corps prendraient, au bout d'un temps plus ou moins long, des charges statiques égales et de signes contraires, chacune d'elles étant la moitié de Ce.

Enfin, si l'arc était fermé par un conducteur immobile, tel que l'axe même de la sphère, le circuit serait parcouru par un courant continu et uniforme de l'équateur au pôle, ou inversement, suivant le sens de la rotation.

Comme la terre peut être assimilée à une sphère aimantée uniformément, on voit qu'un arc extérieur, *qui ne participerait pas au mouvement de rotation*, devrait être parcouru par un courant d'induction dirigé de l'équateur vers le pôle dans l'hémisphère positif et du pôle à l'équateur dans l'hémisphère négatif, c'est-à-dire finalement du pôle nord magnétique de la Terre au pôle sud, puisque le sens et la grandeur des courants induits ne dépendent que du mouvement relatif de l'arc et du système magnétique. Il est probable que cette induction intervient dans le magnétisme terrestre (**330**) et joue un rôle important dans certains phénomènes naturels, tels que les aurores polaires, qui semblent être des décharges traversant les régions supérieures de l'atmosphère, et les courants accidentels observés sur les lignes télégraphiques en dehors de l'action locale des orages.

381. État variable des courants. — Le travail nécessaire pour établir un courant dans un circuit correspond à une énergie intrinsèque qui est restituée au moment où les forces électromotrices disparaissent. Dans tous les cas, les effets de self-induction qui en sont la conséquence déterminent la loi de l'intensité pendant la période variable, soit au moment de la fermeture, soit au moment de la rupture du circuit.

Considérons un circuit unique de résistance R, dont le coef-

ficient de self-induction est L et qui renferme une force électromotrice E; on a, en général,

$$(1) \qquad E = \frac{d(LI)}{dt} + RI.$$

Si les valeurs de E et de L restent constantes et que la résistance passe en un temps très court de R_0 à R, les intensités I_0 et I_1 du courant permanent, aux deux limites, sont

$$E = R_0 I_0 = R I_1.$$

La quantité totale q d'électricité induite dans cette transformation est

$$(2) \qquad Rq = -(I_1 - I_0)L = (I_0 - I_1)L.$$

Pendant la période variable, comptée à partir du changement de résistance, on a

$$L\,dI = (E - RI)\,dt, \qquad \frac{dI}{I - I_1} = -\frac{R}{L}\,dt,$$

$$(3) \qquad I = I_1 + (I_0 - I_1)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Le courant ne devrait acquérir la valeur définitive I_1 qu'au bout d'un temps infini, mais le rapport $\frac{R}{L}$ est en général extrêmement grand et la période variable très courte.

Si les variations d'intensité sont insensibles au bout du temps θ, on a

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\theta I\,dt = I_1\theta + \frac{L}{R}(I_0 - I_1), \\ &R\int_0^\theta I^2\,dt = RI_1^2\theta + \frac{L}{2}(I_0 - I_1)(I_0 + 3I_1). \end{aligned} \right.$$

La première de ces expressions représente le flux d'électricité pendant le temps θ et la seconde l'énergie calorifique correspondante dégagée dans le circuit.

On peut remarquer que les valeurs de ces deux intégrales

sont les mêmes que si l'on avait eu d'abord dans le circuit un courant uniforme d'intensité $\frac{I_0+I_1}{2}$ pendant le temps $\frac{2L}{R}$, auquel aurait succédé un courant d'intensité normale I_1 pendant le reste du temps $\theta-\frac{2L}{R}$.

Si la valeur primitive I_0 est nulle, ou R_0 infini, ce qui correspond à l'établissement du courant par la fermeture du circuit de résistance R, on a

$$(5)\qquad I=I_1\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)=\frac{E}{R}-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Le dernier terme représente l'intensité de l'extra-courant à l'époque t. Cet extra-courant s'affaiblit d'une manière très rapide. Pour qu'il soit réduit au n^e de l'intensité finale I_1, il faut qu'on ait

$$e^{-\frac{R}{L}t}=\frac{1}{n},\qquad t=\frac{L}{R}\,\mathfrak{L}.n.$$

La quantité totale d'électricité q qui correspond à l'extra-courant, c'est-à-dire

$$(6)\qquad q=-\frac{LI_1}{R}=-\frac{LE}{R^2},$$

est la même que si le courant avait eu l'intensité $-I_1$, égale et contraire à la valeur normale, pendant le temps $\frac{L}{R}$.

382. Extra-courant de rupture. — Supposons que, le régime permanent étant établi dans un circuit de résistance R, on y ajoute subitement une résistance nouvelle r; on aura, aux deux limites,

$$E=RI_0=(R+r)I_1.$$

Si le coefficient de self-induction n'a pas été modifié par ce changement de résistance, l'intensité sera donnée à chaque instant par l'équation

$$(7)\qquad I=\frac{E}{R+r}\left(1+\frac{r}{R}e^{-\frac{(R+r)t}{L}}\right).$$

La quantité totale d'électricité q, qui correspond à l'extra-courant, est alors

$$(8)\qquad (\mathrm{R}+r)q = L(\mathrm{I}_0-\mathrm{I}_1) = \frac{L}{\mathrm{R}}r\mathrm{I}_1 = \frac{L}{\mathrm{R}}\cdot\frac{r}{\mathrm{R}+r}\mathrm{E}.$$

Ce cas présente une certaine analogie avec celui où l'on rompt le circuit dans l'air, la résistance r correspondant à la couche de gaz traversée par l'étincelle de rupture; en réalité, la résistance de l'étincelle est loin de rester constante pendant la durée du phénomène.

Supposons qu'au lieu de rompre le circuit, on supprime la force électromotrice, en remplaçant la pile par un conducteur de même résistance. La valeur finale I_1 étant nulle, l'équation (3) se réduit à

$$(9)\qquad \mathrm{I} = \mathrm{I}_0 e^{-\frac{\mathrm{R}}{L}t} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}e^{-\frac{\mathrm{R}}{L}t}.$$

L'extra-courant de rupture est alors égal et de signe contraire à l'extra-courant de fermeture (**381**), et les quantités d'électricité mises en mouvement sont les mêmes.

383. Cas de deux circuits. — Considérons deux circuits voisins C et C′ dont la position relative et la forme restent invariables, auquel cas les coefficients d'induction propre et mutuelle sont des constantes, les forces électromotrices E et E′ étant elles-mêmes constantes.

Les équations différentielles simultanées (**375**) des deux courants deviennent alors

$$(10)\qquad \begin{cases} M\dfrac{d\mathrm{I}'}{dt} + L\dfrac{d\mathrm{I}}{dt} + \mathrm{RI} - \mathrm{E} = 0, \\ M\dfrac{d\mathrm{I}}{dt} + L\dfrac{d\mathrm{I}'}{dt} + \mathrm{R}'\mathrm{I}' - \mathrm{E}' = 0; \end{cases}$$

elle admettent encore des solutions de la forme

$$(11)\qquad \begin{cases} \mathrm{RI} - \mathrm{E} = \mathrm{A}e^{\rho t} + \mathrm{B}e^{\rho' t}, \\ \mathrm{R}'\mathrm{I}' - \mathrm{E}' = \mathrm{A}'e^{\rho t} + \mathrm{B}'e^{\rho' t}, \end{cases}$$

dans lesquelles les coefficients A, B, A′, B′ sont des con-

stantes qui seront déterminées par les conditions relatives aux limites du phénomène.

En exprimant que ces valeurs des intensités satisfont aux équations différentielles (10), quel que soit le temps, on trouve que les facteurs ρ et ρ' des exposants sont les racines de l'équation du second degré

$$(12)\qquad \left(1-\frac{M^2}{LL'}\right)\rho^2+\left(\frac{R}{L}+\frac{R'}{L'}\right)\rho+\frac{RR'}{LL'}=0.$$

Ces racines sont toujours réelles; en outre, elles doivent être négatives attendu que l'intensité ne peut croître indéfiniment avec le temps, quelles que soient les conditions de l'expérience. Il faut donc qu'on ait $LL'>M^2$; cette inégalité est d'ailleurs une conséquence de la valeur analytique des coefficients; on ne pourrait avoir $LL'=M^2$ que si les deux circuits étaient en coïncidence rigoureuse.

Il en résulte que, si le coefficient de self-induction L d'un circuit est très petit, son coefficient M d'induction mutuelle avec un autre circuit quelconque est aussi très petit.

Supposons que $E'=0$, c'est-à-dire que le second circuit ne renferme pas de force électromotrice.

Les quantités d'électricité q et q' qui traversent les deux circuits pendant un temps t s'obtiendront directement par les équations différentielles (10).

En désignant par I_0 et I'_0 les intensités des deux courants à l'origine du temps considéré, I et I' les valeurs finales, l'intégration donne

$$\begin{aligned}Rq&=Et+L(I_0-I)+M(I'_0-I'),\\ R'q'&=M(I_0-I)+L'(I'_0-I').\end{aligned}$$

Au bout d'un temps assez grand après la fermeture du circuit primaire C, on a

$$I_0=0,\qquad I'_0=0,$$

$$I=\frac{E}{R},\qquad I'=0;$$

$$Rq=E\left(t-\frac{L}{R}\right),\qquad R'q'=-M\frac{E}{R}.$$

Si, au contraire, on ouvre le circuit primaire C après que le régime permanent s'est établi, les valeurs limites sont

$$I_0 = \frac{E}{R}, \qquad I'_0 = 0,$$

$$I = 0, \qquad I' = 0.$$

Les quantités d'électricité induite dans les deux circuits ont les mêmes valeurs que précédemment, mais de signes contraires, ce qui était évident, puisque la variation du flux de force a été la même dans les deux cas.

Il est à remarquer que la quantité totale d'électricité qui correspond à l'extra-courant du circuit primaire C est indépendante du circuit secondaire C′ et que l'induction totale sur ce dernier ne dépend que de sa résistance R′, du coefficient d'induction mutuelle des deux circuits, et de l'intensité I du courant primaire permanent. La considération directe des flux de force permettait de prévoir ces résultats.

Pour connaître l'intensité des courants à chaque instant, il faut compléter la solution du problème par la détermination des constantes.

384. Courants de rupture et de fermeture. — Considérons d'abord le cas où, le courant étant établi dans le circuit primaire C, on rompt brusquement ce circuit. Le courant I est annulé et il ne reste dans ce circuit que les charges correspondant à la capacité du fil ouvert. La seconde des équations (10) donne alors

$$L'\frac{dI'}{dt} + R'I' = 0, \qquad I' = I'_0 e^{-\frac{R'}{L'}t},$$

et la décharge totale est

$$q' = \int I'\,dt = I'_0 \frac{L'}{R'}.$$

Comme on a, d'autre part, $R'q' = MI_0$, il en résulte

$$R'q' = MI_0 = L'I'_0.$$

La valeur initiale I'_0 du courant induit est une fraction du

courant inducteur I_0 représentée par le rapport des coefficients M et L'.

Il faut remarquer toutefois, qu'on a supposé la rupture du courant primaire instantanée, sans qu'il ait pu se prolonger par une résistance variable, comme dans le cas où il se produit une étincelle.

L'énergie calorifique dépensée dans le circuit secondaire est alors

$$R'\int I'^2 dt = \frac{R' I_0'^2}{2}\frac{L'}{R'} = \frac{M^2}{2L'} I_0^2.$$

Au moment où l'on ferme le circuit inducteur, les deux courants réagissent l'un sur l'autre et il faut tenir compte des équations simultanées (10) et (11).

On déterminera les constantes par la condition que, pour $t=0$, on ait $I=0$ et $I'=0$, ce qui donne

$$\frac{M}{R'}(A'\rho + B'\rho') + \frac{L}{R}(A\rho + B\rho') = E,$$

$$\frac{M}{R}(A\rho + B\rho') + \frac{L'}{R'}(A'\rho + B'\rho') = 0,$$

$$A + B + E = 0,$$

$$A' + B' = 0;$$

$$B' = -A' = \frac{E}{\rho - \rho'}\cdot\frac{MR'}{LL' - M^2},$$

$$A(\rho - \rho') = E\left(\frac{L'R}{LL' - M^2} + \rho'\right),$$

$$B(\rho' - \rho) = E\left(\frac{L'R}{LL' - M^2} + \rho\right).$$

La dérivée initiale du courant secondaire est

$$\left(\frac{dI'}{dt}\right)_0 = \frac{A'\rho + B'\rho'}{R'} = -E\frac{M}{LL' - M^2}.$$

L'intensité part de zéro, passe par un maximum et décroît ensuite jusqu'à zéro.

On a aussi, pour le courant primaire,

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_0 = E\,\frac{L'}{LL'-M^2};$$

ce courant croît toujours vers sa valeur permanente $\frac{E}{R}$.

Si les circuits C et C′ ont les mêmes dimensions et la même forme, on fera $R'=R$ et $L'=L$.

Enfin, si on suppose les circuits parallèles et assez rapprochés pour que les coefficients L et M ne diffèrent pas d'une manière appréciable, les équations (10) donnent

$$R(I-I')=E.$$

Dans ce cas, la différence des courants direct et induit est toujours égale au courant qui correspond au régime permanent. Comme on a

$$I+I'=2I'+\frac{E}{R},$$

il en résulte

$$RI'+2L\frac{dI'}{dt}=0,$$

$$I'=I'_0 e^{-\frac{R}{2L}t}=-\frac{E}{R}\,e^{-\frac{R}{2L}t}.$$

385. Courants dérivés dans le régime variable. — La loi qui lie dans un polygone fermé les intensités des courants aux forces électromotrices (155) est encore applicable au régime variable, si l'on ajoute aux forces électromotrices ordinaires celles qui proviennent des effets d'induction.

Nous examinerons seulement le cas simple où le courant se bifurque entre deux points, par deux conducteurs de résistances r et r' qui ne renferment pas de forces électromotrices, dont les coefficients d'induction propre et mutuelle sont respectivement L, L' et M. Pour fixer les idées, nous supposerons que ces conducteurs sont enroulés en bobine. Désignant

par i et i' les courants dans les deux branches, la force électromotrice sur chacun des fils est

$$(13)\qquad e = ri + \frac{d}{dt}(Li) + \frac{d}{dt}(Mi') = r'i' + \frac{d}{dt}(L'i') + \frac{d}{dt}(Mi).$$

Si les coefficients d'induction sont constants, on a

$$(14)\qquad ri + (L - M)\frac{di}{dt} = r'i' + (L' - M)\frac{di'}{dt}.$$

Supposons d'abord que le coefficient L' soit très petit, ce qui correspondrait au cas où le second fil a été déroulé ; il en résulte que le coefficient d'induction mutuelle M est aussi très petit et l'équation différentielle se réduit à

$$(15)\qquad r'i' = ri + L\frac{di}{dt}.$$

Tant que le courant général $i + i'$ est croissant, le rapport de l'intensité i' dans la branche rectiligne à l'intensité i du courant voisin est plus grand que pour l'état permanent. La branche enroulée en bobine se comporte donc comme si elle avait une résistance *apparente* supérieure à sa résistance *réelle* ; l'inverse a lieu quand l'intensité est décroissante. Cet effet croît avec la valeur du coefficient L et avec la rapidité des variations.

Il en est de même dans le cas général : chaque conducteur se comporte pour un courant croissant comme si sa résistance était augmentée par l'induction propre.

Soient q et q' les quantités d'électricité qui parcourent les deux conducteurs pendant le même intervalle de temps t; l'intégration de l'équation (14) donne

$$rq - r'q' + [Li - L'i' + M(i' - i)]_0^t = 0.$$

Dans le cas d'une décharge, les intensités initiale et finale sont nulles ; le terme compris entre parenthèses est nul, et l'équation se réduit à

$$(16)\qquad rq - r'q' = 0.$$

La décharge totale se partage donc entre les deux branches suivant la loi ordinaire, c'est-à-dire en raison inverse des résistances, bien qu'à chaque instant le partage se fasse d'une manière différente ; il y a finalement compensation.

Cette conclusion n'est exacte que si les deux circuits n'ont produit extérieurement aucun travail, en particulier si, pendant la durée de la décharge, aucun aimant n'a été déplacé dans le voisinage de l'un deux. Aussi est-il difficile, pour la mesure des décharges, d'employer un galvanomètre balistique placé en dérivation sur le circuit principal.

386. Expérience de Faraday. — Considérons encore l'expérience par laquelle Faraday a démontré l'existence de l'extra-courant direct qui se produit au moment de la rupture d'un circuit. Le circuit d'une pile constante E renferme deux fils en dérivation comme ceux que nous venons de considérer ; l'un des fils, de résistance r' est rectiligne, l'autre, de résistance r forme une bobine d'un grand nombre de spires dont le coefficient d'induction propre est L.

Appelant R la résistance du circuit en dehors du pont et I le courant principal, on a, après la fermeture du circuit, les équations

$$(17)\qquad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{I} = i + i', \\ & \mathrm{E} = \mathrm{RI} + r'i', \\ & L\frac{di}{dt} + ri = r'i'. \end{aligned} \right.$$

Si l'on pose

$$\rho^2 = \mathrm{R}r + \mathrm{R}r' + rr',$$

et que l'on compte le temps à partir de l'époque où le circuit est fermé, auquel cas les courants sont d'abord nuls, on en déduit, pour le courant qui parcourt la bobine à l'époque t,

$$i = \frac{r'\mathrm{E}}{\rho^2}\left(1 - e^{-\frac{\rho^2 t}{L(\mathrm{R}+r')}}\right),$$

et, pour celui qui traverse le fil rectiligne,

$$i' = \frac{r\mathrm{E}}{\rho^2}\left(1 + \frac{\mathrm{R}r'}{(\mathrm{R}+r')r}e^{-\frac{\rho^2 t}{L(\mathrm{R}+r')}}\right).$$

Si, une fois le régime établi, on rompt le circuit principal, sans que l'étincelle de rupture ait une durée sensible, les équations (17) donnent, en faisant $R = \infty$,

$$i + i' = 0,$$

$$L \frac{di}{dt} + (r + r')i = 0.$$

L'intégrale de cette équation détermine le courant induit qui parcourt le circuit formé par l'ensemble des deux branches. Le courant i étant d'abord défini par le régime permanent dans le cas actuel, on aura, pour une époque t' à partir de la rupture du circuit,

$$i = \frac{E r'}{\rho^2} e^{-\frac{(r+r')t'}{L}}.$$

Ce courant temporaire s'amortit au bout d'un temps très court; il est dirigé dans la branche rectiligne en sens contraire du courant primitif.

La quantité totale d'électricité induite a pour valeur

$$q = \int_0^\infty i\,dt' = \frac{EL}{\rho^2} \frac{r'}{r + r'}.$$

Si l'aiguille d'un galvanomètre, placé sur le fil rectiligne, est disposée de manière à buter contre un obstacle qui l'empêche d'obéir au courant permanent, cette aiguille doit être projetée en sens contraire, au moment de la rupture du circuit principal, par le courant d'induction, et son angle d'impulsion correspond à la décharge q.

387. Phénomènes d'induction dans les câbles. — En étudiant la propagation de l'électricité dans les conducteurs cylindriques pendant l'état variable, nous avons négligé (**167**) les effets d'induction électrodynamique qui sont dus aux changements d'intensité du courant. Il résulte de là une nouvelle cause de retard dans l'établissement et la suppression du courant principal, et ce retard ne peut plus être calculé comme nous l'avons fait précédemment (**381**), parce que la durée de propagation est très notable par rapport à la durée des phénomènes

d'induction ; il n'est plus possible d'admettre alors que l'intensité du courant a la même valeur à chaque instant dans toute l'étendue du circuit.

Si le fil éprouve une série de charges et de décharges alternatives, comme on le fait pour les transmissions télégraphiques, on peut considérer le phénomène comme étant dû à une force électromotrice variable et il se produira des effets analogues à ceux qui ont été indiqués plus haut.

En outre, le câble considéré peut être voisin d'autres câbles qui réagissent sur le premier, soit par leur simple présence, soit par les variations des courants propres qui les parcourent. Les effets qui en résultent sont très manifestes dans les fils aériens suspendus aux poteaux télégraphiques.

Enfin, lorsque plusieurs conducteurs sont renfermés dans une même gaîne diélectrique, comme dans les câbles souterrains ou sous-marins, le potentiel en chaque point de l'un des fils dépend de la charge des fils voisins. Il en résulte un nouveau mode d'influence ou d'induction, purement électrostatique, et que Lord Kelvin (1) a appelé *péristatique* pour la distinguer de celle de Faraday. Ce phénomène présente une analogie parfaite avec l'influence mutuelle de tubes élastiques, réunis ensemble sur toute leur longueur, qui seraient remplis et entourés d'un même liquide, quand on fait circuler le liquide dans un ou plusieurs tubes, pendant que les autres ont leurs extrémités ouvertes ou fermées, ou soumises à toute autre condition particulière ; un tube fermé correspondrait alors à un fil conducteur isolé et un tube ouvert à un fil non isolé.

On voit, d'après ces indications, combien le problème de la propagation de l'électricité est complexe, quand on veut tenir compte de toutes les circonstances qui interviennent dans le phénomène.

388. Moteurs électriques. — Les *moteurs électriques* sont des machines renfermant des fils conducteurs, des électro-aimants ou des aimants permanents, et combinées de façon que, lorsqu'on y introduit un courant produit par une source étrangère, les actions réciproques électromagnétiques ou

(1) Sir W. Thomson, *Phil. mag.* [4], t. XIII, p. 135 ; 1857.

électrodynamiques sont utilisées pour provoquer un déplacement relatif des organes. La continuité du mouvement est obtenue, soit à l'aide de contacts glissants, soit avec des commutateurs qui modifient en temps opportun la direction du courant d'excitation.

Ces machines pourraient être construites de manière à recevoir un travail uniforme lorsque l'intensité du courant est constante ; tel serait le cas de la roue de Faraday (**379**). Le plus souvent, les actions sont périodiques, et le mouvement relatif des organes, oscillatoire ou rotatif, fait naître à chaque instant une force électromotrice d'induction e de sens contraire à celle E du courant excitateur.

Lorsqu'un régime régulier est établi, le travail des actions réciproques est utilisé en partie à vaincre des résistances extérieures, électriques ou mécaniques, et, pour le reste, aux réactions internes qui se traduisent finalement par un échauffement des conducteurs, puisque la vitesse reprend la même valeur au bout de chaque période.

Si l'on néglige des pertes accessoires, l'énergie dépensée par la source, pendant chaque période T, est égale au travail extérieur, augmenté de l'énergie calorifique dégagée. En appelant R la résistance du circuit, on a donc

$$\int_0^T \mathrm{EI}\,dt = \int_0^T \mathrm{I^2R}\,dt + \int_0^T e\mathrm{I}\,dt.$$

Dans le cas général, les valeurs des intégrales dépendent de la loi suivant laquelle varie le courant pendant la durée d'une période ; mais, si la force électromotrice E est constante et la machine réglée de manière que le courant reste sensiblement uniforme, cette équation se réduit à

$$(18) \qquad \mathrm{E} - e = \mathrm{IR}.$$

Le rendement u d'un pareil moteur est le rapport qui existe entre le travail $e\mathrm{I}$ utilisé à l'extérieur, pendant l'unité de temps, et l'énergie totale dépensée EI, c'est-à-dire le rapport $\frac{e}{\mathrm{E}}$ des forces électromotrices. En désignant par $\mathrm{I_0}$ l'intensité du cou-

rant uniforme que produirait dans le circuit en repos la force électromotrice E, on a donc

$$(19) \qquad u = \frac{e}{E} = 1 - \frac{IR}{E} = 1 - \frac{I}{I_0}.$$

Le travail extérieur lui-même a pour expression

$$(20) \qquad eI = \frac{e(E-e)}{R} = RI(I_0 - I);$$

il est maximum lorsque le travail accompli réduit de moitié l'intensité du courant; le rendement est alors de 50 °/₀.

Si le travail extérieur est très faible, la vitesse du moteur croît très rapidement, avec ou sans limite, suivant le mode de construction; la force électromotrice d'induction tend à devenir égale à la force électromotrice extérieure et le rendement tend vers l'unité.

389. Électromoteurs. — Lorsqu'un moteur électrique, au lieu de recevoir un courant, est mis en marche par une machine étrangère, il devient, en général, le siège d'une force électromotrice E de signe contraire à celle qui produirait le mouvement, et le circuit qui le constitue, s'il est fermé, peut être parcouru par un courant électrique. L'appareil devient alors un producteur d'électricité, ou un *électromoteur*.

Supposons qu'il existe dans le circuit, pour une cause temporaire quelconque, un courant d'intensité i; si le travail Ei, absorbé par la force électromotrice d'induction, est supérieur à l'énergie calorifique dégagée sur les conducteurs, le courant augmente jusqu'à une valeur I telle qu'on ait

$$(21) \qquad EI = I^2R.$$

Si la condition $E > iR$ est satisfaite pour un courant infiniment petit, la machine, une fois mise en mouvement, doit s'amorcer d'elle-même et donner pour le régime régulier un courant déterminé par l'équation précédente. Lorsque l'on a, au contraire, $E < iR$ pour un courant infiniment petit, le travail extérieur ne peut faire naître et maintenir un courant électrique, à moins que l'on n'introduise d'une manière artificielle dans le circuit un courant auxiliaire d'intensité telle que la

condition $E \geqq iR$ soit réalisée, après quoi la force électromotrice étrangère pourra être supprimée, sans que le courant cesse de se maintenir.

Une machine employée comme électromoteur pourra donc être capable ou non de créer un courant électrique, ou d'entretenir un courant déjà établi, suivant la valeur de la résistance totale, ou, ce qui produit un effet analogue, suivant la nature du travail extérieur que l'on veut faire produire au courant. Comme la force électromotrice d'induction, toutes choses égales d'ailleurs, est proportionnelle à la vitesse de la machine, on voit que, pour une résistance totale et un travail extérieur donnés, l'électromoteur sera d'autant plus facilement capable de produire et d'entretenir un courant que sa vitesse sera plus grande.

Considérons deux cas extrêmes :

1° Si une machine est composée d'aimants permanents qui produisent un champ magnétique invariable dans lequel se meuvent des fils conducteurs, comme serait la roue de Faraday, la force électromotrice est simplement proportionnelle au nombre n de tours ou d'oscillations de la machine, pendant l'unité de temps, et peut être représentée par $E = nE_1$. A vitesse constante, une pareille machine se comporte exactement comme une pile ordinaire. Elle est toujours capable de produire un courant dans un circuit métallique quelconque, puisque la condition $E > iR$ est toujours satisfaite pour un courant très faible.

2° Si la machine est composée de fils fixes et de fils mobiles (ou de deux systèmes d'électro-aimants, pourvu qu'on reste entre les limites dans lesquelles l'aimantation est proportionnelle à la force magnétisante), la force électromotrice d'induction e est proportionnelle à l'intensité du courant et peut être représentée par nAI. Une machine de cette nature ne peut produire et entretenir un courant, dans le circuit considéré, que si la vitesse est assez grande pour qu'on ait $nA > R$, c'est-à-dire que la valeur de n soit supérieure à la limite n_0 définie par la condition $n_0 A = R$.

L'existence possible de machines ayant un tel caractère, ce qui serait le cas des machines purement électrodynamiques, conduit à une conséquence singulière.

Le passage du courant échauffe les conducteurs. Si la résistance R était indépendante de la température, le courant augmenterait sans limite, avec un accroissement corrélatif du travail nécessaire à l'entretien de la vitesse; il en serait de même pour la température et aucun mode de refroidissement artificiel n'empêcherait les métaux d'atteindre leur température de fusion. On doit admettre qu'un pareil résultat est contraire à la marche des phénomènes naturels et que certaines causes doivent exister pour s'opposer à l'accroissement indéfini du courant.

Le seul terme variable étant la résistance du circuit, il en résulte que cette résistance doit être croissante avec la température, ce qui est, en effet, la propriété commune à tous les métaux; l'équilibre électrique existe alors quand la température est telle que l'on ait $nA = R$.

Si l'on admet, en outre, que le système soit reversible avec le courant d'équilibre, l'énergie calorifique I^2R dégagée dans le circuit doit être proportionnelle à la température absolue T; on aurait alors $R = R_0 T$, c'est-à-dire que le coefficient de variation de résistance des métaux serait égal au coefficient de dilatation des gaz. Cette propriété se vérifie, au moins d'une manière approximative, pour les métaux purs.

3° Dans les machines à électro-aimants, l'aimantation est d'abord proportionnelle à l'intensité du courant, et tend ensuite vers une limite maximum. La force électromotrice E est aussi proportionnelle à l'intensité du courant pour les courants faibles et tend vers un maximum.

Lorsque l'intensité du courant est voisine de celle qui correspond au maximum d'aimantation, la force électromotrice est sensiblement constante et l'appareil est encore comparable à une pile chimique.

Supposons que le courant d'un électromoteur mécanique ait à vaincre une force électromotrice E' extérieure, qui absorbe pendant l'unité de temps le travail E'I.

La force électromotrice efficace étant $E - E' = IR$, le rendement de l'appareil, comme dans le cas d'une pile, a pour valeur

$$u = \frac{E'}{E} = 1 - \frac{IR}{E},$$

et le travail extérieur peut s'écrire

$$E'I = \frac{E'(E - E')}{R}.$$

Le rendement augmente, en général, à mesure que le courant diminue, mais les conditions du travail maximum varient beaucoup avec le mode de constitution de la machine.

Si le travail extérieur n'est autre que la mise en mouvement d'une seconde machine identique à la première, les forces électromotrices E et E′ sont respectivement proportionnelles aux vitesses des deux machines et à une même fonction $\varphi(I)$ de l'intensité. Le rendement u est alors égal au rapport des vitesses ou des nombres de tours n et n' des deux machines pendant l'unité de temps, et le travail utile pendant l'unité de temps a pour expression

$$E'I = \frac{n'(n - n')}{R} \varphi^2(I).$$

Le travail utile maximum ne peut être déterminé que si l'on connaît la forme de la fonction φ.

Toutefois, le problème des électromoteurs est en réalité moins simple, même lorsque les courants sont maintenus de même sens, soit par le jeu naturel de la machine, soit que par un commutateur on en redresse la direction dans le circuit extérieur. Il y a presque toujours des oscillations périodiques de l'intensité dont l'influence n'est pas négligeable.

La question se présente aussi sous un aspect tout différent quand on utilise les courants alternatifs que produisent certains types de machines ; nous y reviendrons plus tard.

390. Application à l'étude du magnétisme. — Nous sommes maintenant en mesure de justifier la méthode indiquée au n° **294**, pour étudier la distribution du magnétisme dans les aimants par les courants induits.

Quand on entoure en un point la section d'un barreau aimanté par une bobine formée d'un nombre n de spires, reliée à un galvanomètre balistique, et qu'on fait brusquement glisser cette bobine d'une certaine quantité parallèlement à la longueur du barreau, en laissant la bobine en repos dans sa

nouvelle position, le circuit est traversé par une décharge q, si R est la résistance totale, le flux $\delta\varphi$ de force magnétique qui sort de l'aimant, entre les deux positions de la bobine, est donné par l'expression $n\delta\varphi = \mathrm{R}q$. En opérant par déplacements successifs, on peut déterminer la loi de variation du flux de force latéral.

Si la bobine est située d'abord au milieu de l'aimant, ou plus exactement au point neutre, et qu'on l'éloigne brusquement jusqu'à une grande distance, on obtiendra le flux total de force magnétique qui émane de l'aimant et, par suite, la masse totale du magnétisme libre contenu dans la portion correspondante du barreau, ou, plus exactement, le flux d'induction intérieure.

Si la bobine auxiliaire entoure ainsi, soit le milieu d'une longue bobine cylindrique qui renferme un morceau de fer doux, soit un point quelconque d'une bobine annulaire, on peut, à un moment donné, établir ou supprimer brusquement un courant d'intensité connue I dans la bobine aimantante. La valeur de $\delta\varphi$, qui correspond dans le circuit induit à la rupture ou à l'établissement du courant principal, représentera le flux total $L\mathrm{I}$ d'induction magnétique qui traverse la section de l'une des spires.

On pourra ainsi déterminer la valeur de L, par expérience, et en déduire (**359**) le coefficient k d'aimantation.

391. Hypothèses de Weber. — On a vu plus haut (**358**) comment Ampère explique le magnétisme par les courants moléculaires; nous pouvons examiner quelles sont les propriétés physiques de ces courants.

Considérons l'un d'eux, défini par les valeurs L, I et R, et soit φ le flux de force extérieure qui traverse sa surface; on a alors, puisque la force électromotrice est nulle,

$$\frac{d}{dt}(L\mathrm{I} + \varphi) + \mathrm{R}\mathrm{I} = 0.$$

On doit admettre aussi que la résistance du circuit moléculaire est nulle, ce qui donne

$$L\mathrm{I} + \varphi = \mathrm{C^{te}} = L\mathrm{I}_0. \tag{22}$$

L'intensité I_0 est celle du courant qui parcourrait le circuit

considéré, si le flux de force extérieure était nul. Si l'on suppose $I_0 = 0$, c'est-à-dire le courant moléculaire primitivement nul, ce qui correspondrait au cas d'un milieu magnétique à l'état neutre, on a finalement

$$LI + \varphi = 0. \tag{23}$$

Le courant induit dans la molécule par un champ extérieur produit donc un flux de force égal et de signe contraire à φ. En d'autres termes, l'aimantation équivalente au courant est de signe contraire à la force magnétisante; il semble donc que les courants induits dans les molécules ne suffisent pas pour expliquer l'aimantation des corps magnétiques.

Ces courants peuvent, au contraire, rendre compte des phénomènes diamagnétiques. L'hypothèse de Weber consiste à admettre qu'il y a dans chaque molécule d'un milieu diamagnétique des canaux le long desquels des courants peuvent se propager sans résistance. Si ces canaux existaient dans toutes les directions, la molécule serait un conducteur parfait. Pour un courant primitivement nul, l'intensité est donnée par l'équation (23). En appelant θ l'angle que fait la direction de force magnétisante X avec la normale au plan du circuit, de surface A, on a

$$\varphi = XA\cos\theta = -LI.$$

Le moment magnétique du courant est IA et sa projection sur la direction de la force magnétisante est

$$IA\cos\theta = -\frac{XA^2}{L}\cos^2\theta.$$

Supposons qu'il y ait n molécules par unité de volume, et que les axes des circuits soient distribués indifféremment dans toutes les directions. La zone qui correspond à l'angle $d\theta$ autour de la direction de la force magnétisante est $2\pi\sin\theta\, d\theta$, de sorte qu'on doit remplacer $\cos^2\theta$ par la valeur moyenne

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\pi\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta = \frac{4}{3}.$$

Le moment magnétique de l'aimantation est donc $-\dfrac{4n}{3}\dfrac{A^2}{L}X$;

l'aimantation est directement opposée à la force magnétisante, ce qui est conforme aux phénomènes de diamagnétisme, et le coefficient k d'aimantation a pour valeur

$$k = -\frac{4n}{3}\frac{A^2}{L}.$$

Pour expliquer dans le même ordre d'idées les phénomènes magnétiques, il faut admettre que le courant primitif dans une molécule ou autour d'un canal conducteur n'est pas nul, et prendre l'équation générale (22). En considérant toujours un circuit dont la normale fait un angle θ avec la direction de la force magnétisante, on aura

$$LI + XA\cos\theta = LI_0,$$

$$I = I_0 - \frac{XA}{L}\cos\theta.$$

Si le courant primitif I_0 était nul, le moment de l'action du champ sur la molécule serait

$$-IAX\sin\theta = \frac{X^2A^2}{L}\sin\theta\cos\theta = \frac{X^2A^2}{2L}\sin^2\theta.$$

Il y aurait équilibre stable quand le plan du courant est parallèle ou perpendiculaire à la direction du champ. Tel est le cas, par exemple, d'un anneau que l'on introduit brusquement dans un champ magnétique très intense.

Dans le cas général, le moment du couple qui agit sur la molécule peut s'écrire

$$\frac{X^2A^2}{L}\cos\theta\sin\theta - I_0AX\sin\theta = mX\sin\theta(BX\cos\theta - 1).$$

En admettant encore (**301**) que la réaction du milieu est constante en grandeur et en direction, on aura, pour la condition d'équilibre,

$$X\sin\theta(1 - BX\cos\theta) = D\sin(\alpha - \theta).$$

La composante du moment magnétique de la molécule, parallèlement à la force magnétisante, est

$$IA\cos\theta = \left(I_0 - \frac{XA}{L}\cos\theta\right)A\cos\theta = m\cos\theta(1 - BX\cos\theta).$$

Si le coefficient B est très petit, c'est-à-dire si le courant primitif I_0 est très intense, on retrouve les résultats de Weber relatifs à l'aimantation des corps magnétiques. Lorsque le coefficient B est très grand, la formule correspond aux phénomènes de diamagnétisme.

Dans les cas intermédiaires, l'aimantation serait d'abord proportionnelle à la force magnétisante pour des forces faibles, puis passerait par un maximum et irait en décroissant. L'expérience ne semble indiquer aucun phénomène de cette nature, de sorte que l'intervention des courants d'induction moléculaires ne peut pas encore être considérée comme absolument démontrée.

392. Écrans conducteurs. — Si l'on suppose que chaque molécule d'un milieu soit un conducteur parfait, ou, ce qui revient au même, qu'elle soit entourée par une couche de résistance négligeable, le flux d'induction $LI + \varphi$ qui traverse un circuit quelconque tracé sur cette surface est invariable.

Dans ce cas, la composante normale du champ en chaque point de la surface est constante.

Si le flux d'induction qui sort de la molécule est primitivement nul, tout système magnétique extérieur produira des courants induits tels que l'induction magnétique reste nulle sur toute la surface et dans l'intérieur de la couche qui enveloppe la molécule.

Supposons que la molécule soit une sphère de rayon a; les courants superficiels produiront à l'intérieur un champ $-X$ égal et de signe contraire au champ extérieur X.

La sphère est assimilable à un aimant uniforme (242) dont l'aimantation est $-\frac{3X}{8\pi}$ et le moment magnétique $-\frac{a^3}{2}X$.

S'il existe dans l'unité de volume n sphères semblables assez éloignées pour ne pas avoir de réaction mutuelle appréciable, l'aimantation moyenne est $-\frac{na^3}{2}X = -\frac{3h}{8\pi}X$, en appelant h

le rapport du volume de l'ensemble des sphères à celui du milieu qui les renferme.

Il est clair que ces considérations s'appliquent également à une surface d'étendue finie qui jouirait d'une conductibilié parfaite; les courants induits provoqués par les variations d'un champ extérieur seront toujours tels que le flux relatif à chacune des portions de la surface reste constant, autrement dit que la composante normale de l'induction magnétique en chaque point soit invariable. Si donc, à un instant donné, cette composante est nulle, elle restera nulle quelles que soient les modifications du champ extérieur.

Il résulte de là qu'une surface fermée ou indéfinie, de conductibilité parfaite, constitue un écran absolu, pour les points situés d'un côté, contre tous les effets que peuvent produire les variations du champ dû à des systèmes situés du côté opposé. Ces effets se réduisent à des courants superficiels qui provoquent à chaque instant des variations du champ égales et de signes contraires.

Autour d'un conducteur parfait, la distribution des forces magnétiques est entièrement comparable à la distribution des vitesses dans un fluide incompressible qui entourerait le même corps.

COURANTS PÉRIODIQUES.

393. Courants alternatifs. — Lorsque la force électromotrice qui agit dans un circuit est une fonction continue du temps, le courant varie lui-même d'une manière continue. Si la résistance r et le coefficient de self-induction L restent constants, l'équation différentielle

$$(1) \qquad e = ri + L\frac{di}{dt}$$

est linéaire; dans ce cas, le courant produit par une série de forces électromotrices simultanées est la somme des courants dus à chacune d'elles.

Quel que soit le mode de variation de la force électromotrice, on peut la développer en une série de termes harmoniques par la formule de Fourier.

Supposons que le développement se réduise à un seul terme de la forme $e = E \sin \omega t$; le facteur E représente la valeur maximum ou l'*amplitude* de la force électromotrice et l'angle ωt est la *phase* de cette fonction.

Tel serait le cas d'un cadre de surface S tournant avec une vitesse angulaire ω constante dans un champ uniforme. Lorsque la normale au plan du cadre fait l'angle ωt avec la composante H du champ perpendiculaire à l'axe, le flux de force qui traverse la surface du circuit est $\varphi = SH \cos \omega t$ et la force électromotrice d'induction a pour expression

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = SH\omega \sin \omega t.$$

D'une manière générale, lorsque la force électromotrice est de la forme $e = E \sin \omega t$, la *période* est

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

La *fréquence* est l'inverse de la période, c'est-à-dire le nombre de périodes par seconde, ou $\frac{\omega}{2\pi}$. On appelle quelquefois *pulsation* la quantité ω, mais cette expression ne semble pas heureusement choisie.

L'équation fondamentale (1) devient alors

$$(2) \qquad E \sin \omega t = ri + L\frac{di}{dt}.$$

Lorsque le régime permanent est établi, le courant i varie nécessairement suivant la même période et peut être représenté par

$$(3) \qquad i = I \sin(\omega t - \alpha).$$

Le coefficient I est l'*amplitude* du courant et α représente sa *perte de phase* par rapport à la force électromotrice.

Pour déterminer les constantes I et α, il suffit de substituer ces valeurs dans l'équation (2), qui donne

$$E \sin \omega t = I[r \sin(\omega t - \alpha) + L\omega \cos(\omega t - \alpha)],$$

et d'identifier, dans les deux membres, les coefficients des sinus et cosinus de l'angle variable ωt. En posant

$$(4) \qquad \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{L\omega}{\sin\alpha} = a = \sqrt{r^2 + L^2\omega^2},$$

l'équation se réduit à

$$(5) \qquad I = \frac{E}{a} = \frac{E}{r}\cos\alpha = \frac{E}{L\omega}\sin\alpha.$$

Lorsque le terme $L\omega$ est très petit par rapport à r, il en est de même pour l'angle α et la formule se réduit à $E = Ir$; l'amplitude du courant est alors le quotient de l'amplitude E de la force électromotrice par la résistance r, que l'on peut appeler *résistance ohmique* du circuit.

Dans le cas général, l'induction propre intervient dans la valeur de I; la quantité a est la résistance *apparente* ou l'*impédance* du circuit. Le terme $L\omega$ intervient comme une résistance fictive qu'on appelle *inductance* ou *réactance;* le carré de l'*impédance* a^2 est égal à la somme des carrés de la résistance et de la réactance.

La perte de phase α croît avec l'inductance et sa valeur maximum est de 90°.

Cette perte de phase équivaut à un *retard* θ des oscillations du courant sur celles de la force électromotrice

$$\theta = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\alpha}{2\pi} T;$$

le maximum de retard est donc un quart de période.

Nous rappellerons ici quelques propriétés des lignes trigonométriques. La valeur moyenne de $\sin x$ entre 0 et π est

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,dx = -\frac{1}{\pi}\Big[\cos x\Big]_0^\pi = \frac{2}{\pi}.$$

Entre les mêmes limites, la valeur moyenne de $\sin^2 x$ est

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Enfin, on peut écrire

$$\sin x \sin(x-\alpha) = \frac{1}{2}[\cos\alpha - \cos(2x-\alpha)].$$

La valeur moyenne du dernier terme entre ces limites étant nulle, celle du premier membre se réduit à $\frac{\cos\alpha}{2}$.

Il résulte de là que les valeurs moyennes de la force électromotrice et du courant dans une demi-période, alors que ces quantités ne changent pas de signe, sont respectivement égales à $\frac{2E}{\pi}$ et $\frac{2I}{\pi}$. La quantité d'électricité que débite le courant pendant cet intervalle est $\frac{2I}{\pi}\cdot\frac{T}{2}$, ou $\frac{IT}{\pi}$.

De même, les carrés moyens E_m^2 et I_m^2 de la force électromotrice et du courant sont

$$E_m^2 = \frac{E^2}{2}, \quad I_m^2 = \frac{I^2}{2},$$

c'est-à-dire la moitié des carrés des amplitudes correspondantes. Les valeurs de E_m et de I_m s'appellent souvent force électromotrice et intensité *efficaces*. Le rapport du courant efficace au courant moyen est $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{10}{9}$.

L'énergie calorifique dégagée dans le circuit pendant l'unité de temps, en vertu de la loi de Joule, est le produit de la résistance par le carré moyen du courant, ou le produit rI_m^2 de la résistance par le carré de l'intensité efficace.

Le travail fourni pendant le temps dt par la force électromotrice est

$$dW = ei\,dt = EI\sin\omega t\sin(\omega t-\alpha)\,dt.$$

L'énergie dépensée pendant l'unité de temps se transforme

en chaleur dégagée, puisqu'on a supposé que le courant n'effectue aucun autre travail; elle a pour expression

$$W = \frac{EI\cos\alpha}{2} = r\frac{I^2}{2} = rI_m^2.$$

On peut écrire aussi

$$W = \frac{E^2}{2L\omega}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{E^2}{4L\omega}\sin 2\alpha.$$

Quand la résistance varie seule, le travail maximum correspond à $\sin 2\alpha = 1$ ou $r = L\omega$, c'est-à-dire au cas où la résistance est égale à la réactance.

Il importe de remarquer cependant que cette discussion des courants variables suppose implicitement que l'électricité n'a pas d'*inertie* et que l'intensité reste la même à chaque instant dans toute l'étendue du circuit. L'hypothèse parait justifiée dans tous les cas de courants permanents et de variations lentes, au moins quand on néglige la capacité propre des conducteurs, mais il n'est plus permis de l'admettre quand il s'agit de variations extrêmement rapides; les résultats obtenus dans le cas actuel ne doivent donc être considérés que comme une première approximation.

Nous verrons, en outre, que les courants alternatifs à grande fréquence ne traversent pas la section entière des conducteurs et tendent à se localiser au voisinage de la surface, ce qui introduit une nouvelle modification dans la manière d'évaluer la résistance.

394. Traduction géométrique (1). — Remarquons d'abord que la dérivée par rapport au temps de $\sin(\omega t - \alpha)$ est

$$\omega\cos(\omega t - \alpha) = \omega\sin\left(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Cette dérivée présente une avance de phase de 90° sur la fonction primitive. Il en est de même pour un cosinus et aussi pour la dérivée par rapport à une variable quelconque, d'une

(1) Blakesley, *Altern te Currents*; London 1889.

expression complexe $u = Ae^{i\varphi}$, dans laquelle l'argument φ est une fonction linéaire des variables.

En outre, si la valeur de φ renferme un terme ωt proportionnel au temps, on a aussi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u.$$

L'équation (2) équivaut donc à la suivante :

$$(6) \qquad E \sin \omega t = rI \sin(\omega t - \alpha) + L\omega I \sin\left(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Considérant deux axes rectangulaires OX et OY (fig. 95), si l'on mène la droite $OP = E$ dans une direction qui fait l'angle

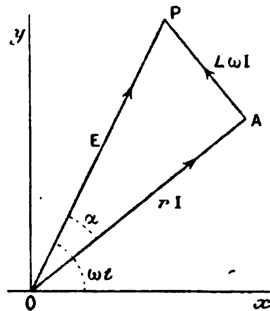


Fig. 95.

ωt avec l'angle des x, le premier membre $E \sin \omega t$ représente la projection de cette droite sur l'axe des y. Menant, de même, la droite $OA = rI$ dans la direction $\omega t - \alpha$, le terme $rI \sin(\omega t - \alpha)$ du second membre est la projection de cette droite sur l'axe des y. Enfin le dernier terme doit être considéré comme la projection de la longueur $L\omega I$ qui ferait avec l'axe des x le même angle $\omega t - \alpha$ augmenté d'un droit; la longueur correspondante AP est donc perpendiculaire à OA. Il résulte de l'équation (6) que cette droite AP aboutit à l'extrémité de la droite OP. L'amplitude E de la force électromotrice est ainsi représentée par l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont

les côtés sont respectivement les produits de l'amplitude du courant par la résistance r et par la réactance $L\omega$.

A mesure que le temps t augmente, ce triangle OAP tourne avec la vitesse angulaire ω et les projections de ses côtés représentent respectivement les valeurs périodiques des quantités correspondantes.

La même méthode s'applique à des phénomènes plus complexes et peut présenter quelquefois de grands avantages sur la discussion analytique des formules. Il suffit de se rappeler que la dérivée d'une grandeur doit être portée vers la gauche et les constructions s'achèvent sans qu'il y ait à se préoccuper des axes de projections.

395. Introduction des capacités. — Supposons que le circuit, qui renferme une force électromotrice de forme sinusoïdale $e = E \sin \omega t$, soit interrompu par une série de condensateurs en cascade dont la capacité totale, en mesures électromagnétiques, est représentée par C. Si v est la différence de potentiel des armatures du condensateur unique, ou la somme des différences de potentiel de tous les condensateurs, et que le coefficient de self-induction L du circuit soit constant, l'équation différentielle est

$$(7) \qquad e = E \sin \omega t = ri + L \frac{di}{dt} + v.$$

Lorsque le régime est établi, sans que les condensateurs aient reçu une charge primitive, les valeurs de i et de v sont aussi sinusoïdales et de même période.

Pendant le temps dt, la quantité d'électricité $i dt$ que débite le courant produit un accroissement dv de la différence de potentiel et la relation $i dt = C dv$ donne

$$i = C \frac{dv}{dt}, \quad \frac{di}{dt} = C \frac{d^2 v}{dt^2} = -C \omega^2 v.$$

Remplaçant v par cette dernière valeur en fonction de la dérivée du courant, l'équation différentielle (7) devient

$$E \sin \omega t = ri + \left(L - \frac{1}{C\omega^2}\right) \frac{di}{dt}.$$

L'introduction des capacités a donc le même effet que si l'on diminuait le coefficient de self-induction ou la réactance. Il peut même arriver que la réactance finale soit négative si le second terme de la parenthèse est supérieur au premier. Enfin la réactance est annulée pour la condition $CL\omega^2 = 1$. Dans ce cas, l'impédance du circuit se réduit à la résistance ordinaire et l'amplitude du courant est liée à l'amplitude de la force électromotrice par la loi d'Ohm.

La perte de phase du courant sur la force électromotrice est donnée par l'équation

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{L\omega}{r}\left(1 - \frac{1}{CL\omega^2}\right);$$

cette perte de phase reste positive tant que $CL\omega^2 > 1$, devient nulle pour $CL\omega^2 = 1$ et négative quand $CL\omega^2 < 1$. Dans ce dernier cas, le courant est en avance sur la force électromotrice et la réactance reparaît en sens contraire.

Dans la construction géométrique (fig. 95), on devra porter sur la droite AP la longueur

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)I = \left(L - \frac{1}{C\omega^2}\right)I\omega.$$

396. Emploi des imaginaires. — L'addition géométrique de deux longueurs rectangulaires équivaut à la somme algébrique de deux termes, l'un réel et l'autre imaginaire, et l'on peut ainsi prévoir que l'emploi des quantités complexes donnera des formules plus simples.

En modifiant l'origine du temps, on peut représenter la force électromotrice par $E\cos\omega t$, auquel cas le courant sera aussi $I\cos(\omega t - \alpha)$. Faisant la somme des deux solutions, après avoir multiplié les termes de la première par $i = \sqrt{-1}$, la force électromotrice sera représentée par la grandeur complexe $Ee^{i\omega t}$ et le courant par $Ie^{i(\omega t - \alpha)}$.

D'une manière plus générale, supposons qu'un circuit renfermant une force électromotrice complexe $Ee^{i(\omega t - \iota)}$, ait un coefficient de self-induction L, dans la valeur duquel on comprendra l'influence des capacités, et aboutisse à deux points, séparés par d'autres organes de nature quelconque, dont la

différence de potentiel est $Ve^{i(\omega t-\varphi)}$. Comme la dérivée du courant est $i\omega Ie^{i(\omega t-\alpha)}$, l'équation différentielle (7) est alors

$$Ee^{i(\omega t-\varepsilon)} = I(r+iL\omega)e^{i(\omega t-\alpha)} + Ve^{i(\omega t-\varphi)},$$

ou, après suppression du facteur commun $e^{i\omega t}$,

$$(8) \qquad Ee^{-i\varepsilon} = (r+iL\omega)Ie^{-i\alpha} + Ve^{-i\varphi}.$$

Si l'on égale séparément les quantités réelles et les imaginaires des deux membres, il est facile de vérifier que l'on retrouvera les mêmes équations que précédemment.

Posons maintenant

$$R = r + iL\omega$$

et représentons par E, I et V les quantités complexes $Ee^{-i\varepsilon}$, $Ie^{-i\alpha}$ et $Ve^{-i\varphi}$; l'équation (8) devient

$$(9) \qquad E = IR + V,$$

c'est-à-dire identique à celle qui traduit la loi d'Ohm.

Les règles de Kirchhoff (**155**) s'appliquent également aux grandeurs complexes. En effet, si un réseau de conducteurs renferme des forces électromotrices sinusoïdales de même période, la somme des courants qui émanent d'un nœud est toujours nulle et l'on a $\Sigma Ie^{-i\alpha} = 0$, c'est-à-dire, en employant les quantités complexes, $\Sigma I = 0$.

Appliquant, de même, l'équation (9) aux différentes branches d'un circuit fermé et représentant par E la somme des forces électromotrices que renferme le circuit, on aura encore, en supposant qu'il n'existe pas d'induction mutuelle entre les différentes branches du réseau,

$$E = \Sigma IR.$$

Dans cette manière d'opérer, le rapport de deux grandeurs, celui du courant à la force électromotrice ou celui de deux courants, sera donné finalement par le rapport de deux quantités complexes $Ae^{i\alpha}$ et $A'e^{i\alpha'}$, ou $\frac{A}{A'}e^{i(\alpha-\alpha')}$.

En d'autres termes, le rapport des amplitudes réelles est le rapport des modules des quantités complexes et la différence de phase est égale à la différence des arguments.

Considérons, par exemple, le problème du pont de Wheatstone (156) et désignons par R_1, R'_1, R_2, R'_2 les résistances des différentes branches qui avaient été appelées précédemment a, a', b, b'.

Pour que le pont soit équilibré, abstraction faite des inductions mutuelles, il faut qu'on ait

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{R'_1}{R'_2}, \quad \text{ou} \quad \frac{r_1+iL_1\omega}{r_2+iL_2\omega}=\frac{r'_1+iL'_1\omega}{r'_2+iL'_2\omega}.$$

Si l'on égale séparément les quantités réelles et les imaginaires, il en résulte

$$r_1r'_2-r_2r'_1=(L_1L'_2-L_2L'_1)\omega^2,$$
$$r_1L'_2-r_2L'_1=r'_1L_2-r'_2L_1.$$

Supposons qu'on ait $L_1=0$ et $L_2=0$, c'est-à-dire que deux branches adjacentes du pont soient sans induction propre; les équations se réduisent à

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{r'_1}{r'_2}=\frac{L'_1}{L'_2}.$$

Il est important de remarquer que ces conditions sont indépendantes de la période. Quand elles sont satisfaites, l'équilibre existe donc, quelle que soit la loi de variation de la force électromotrice dans le circuit extérieur au pont, et aucun courant ne se produira dans la diagonale CC'.

397. Dérivation des courants périodiques. — Supposons qu'un courant périodique, de forme sinusoïdale, se partage entre deux points, sur différents conducteurs dont les résistances complexes sont R_1, R_2, ...

S'il n'existe pas d'induction mutuelle et que V soit la différence de potentiel des deux extrémités du faisceau, on a

$$V=I_1R_1=I_2R_2=\ldots\ldots,$$
$$\frac{I_1}{\frac{1}{R_1}}=\frac{I_2}{\frac{1}{R_2}}=\ldots\ldots=\frac{I}{\sum\frac{1}{R}},$$

c'est-à-dire que la conductance du faisceau est la somme des conductances des différentes branches.

Il résulte de la relation

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{r_1+iL_1\omega}{r_2+iL_2\omega}$$

que le rapport des amplitudes des courants I_1 et I_2, sur deux des branches du faisceau, est égal au rapport inverse des impédances a_2 et a_1 correspondantes. Si l'on pose

$$\operatorname{tang}\alpha_1=\frac{L_1\omega}{r_1}, \qquad \operatorname{tang}\alpha_2=\frac{L_2\omega}{r_2},$$

la perte de phase du courant I_2 sur le courant I_1 est égale à la différence $\alpha_2-\alpha_1$ de ces deux angles.

Lorsque le faisceau ne renferme que deux conducteurs, on a

$$\frac{I_1}{I}=\frac{1}{R_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}=\frac{R_2}{R_1+R_2}=\frac{r_2+L_2\omega i}{r_1+r_2+(L_1+L_2)\omega i}.$$

En posant

$$a^2=(r_1+r_2)^2+(L_1+L_2)^2\omega^2, \qquad \operatorname{tang}\alpha=\frac{L_1+L_2}{r}\omega,$$

le rapport des amplitudes des courants I_1 et I est le rapport des quantités a_2 et a; la perte de phase du courant I_1 sur le courant principal est $\alpha-\alpha_2$.

Si l'on représente le courant principal par $I\sin\omega t$, les courants dérivés sont finalement

$$i_1=I\frac{a_2}{a}\sin(\omega t+\alpha_2-\alpha),$$

$$i_2=I\frac{a_1}{a}\sin(\omega t+\alpha_1-\alpha).$$

Lorsque le faisceau ne renferme que deux conducteurs et qu'il existe entre eux un coefficient d'induction mutuelle M, les équations deviennent

$$V=I_1R_1+i\omega MI_2=I_2R_2+i\omega MI_1,$$

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{R_1-i\omega M}{R_2-i\omega M}=\frac{r_1+(L_1-M)i\omega}{r_2+(L_2-M)i\omega}.$$

Les résultats sont les mêmes que précédemment, avec la seule différence que l'on doit retrancher aux coefficients de self-induction une même quantité M.

Dans le cas d'un nombre quelconque de conducteurs en dérivation, on aurait

$$\begin{aligned} V &= I_1 R_1 + i\omega(M_{2.1} I_2 + M_{3.1} I_3 + \ldots\ldots) \\ &= I_2 R_2 + i\omega(M_{1.2} I_1 + M_{3.2} I_3 + \ldots\ldots), \ldots\ldots \end{aligned}$$

ou, en appelant M_1, M_2, M_3, ... la somme des coefficients d'induction mutuelle de tous les conducteurs sur le premier, le second, le troisième, ...,

$$I_1(R_1 - i\omega M_1) = I_2(R_2 - i\omega M_2) = \ldots\ldots$$

Il suffit encore de retrancher M_1 à L_1, M_2 à L_2, et d'appliquer les mêmes formules.

Enfin, si le courant principal renferme un terme constant I_0 et une partie périodique $I \sin \omega t$, chacun des courants dérivés se composera aussi d'un terme constant, défini par la règle habituelle relative aux courants permanents, et du terme périodique déterminé par le calcul précédent.

398. Décharge de condensateurs. — Un condensateur de capacité C ayant une charge primitive q_0, supposons que l'on réunisse les armatures par un conducteur extérieur de résistance r et de self-induction L.

En désignant par γ l'inverse de la capacité C, la charge du condensateur prend une autre valeur q, au bout du temps t après la fermeture du circuit, et la différence de potentiel des armatures est γq. L'équation différentielle (1) devient alors

$$\gamma q = ir + L\frac{di}{dt}. \tag{10}$$

Comme on a $dq = -i\,dt$ ou $i = -\dfrac{dq}{dt}$, on peut éliminer le courant i de cette équation, qui donne

$$L\frac{d^2 q}{dt^2} + r\frac{dq}{dt} + \gamma q = 0. \tag{11}$$

L'intégrale générale est de la forme

$$(12)\qquad q = Ae^{\rho t} + A'e^{\rho' t}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (11) et égalant à zéro les coefficients des deux exponentielles, on voit que les facteurs ρ et ρ' sont les racines de l'équation du second degré

$$(13)\qquad L\rho^2 + r\rho + \gamma = 0$$

et la valeur du courant est

$$i = -(A\rho e^{\rho t} + A'\rho' e^{\rho' t}).$$

La nature du phénomène est entièrement différente suivant que les racines de l'équation (13) sont réelles ou imaginaires. Dans le premier cas, la décharge est *continue* et s'annule au bout d'un temps infini en théorie; dans le second cas, elle est *oscillante* avec amortissement. Enfin, les constantes A et A' seront déterminées par les conditions initiales.

Quel que soit le mode de décharge, il est clair que l'appareil finit par débiter dans un seul sens la quantité primitive d'électricité q_0 et que la chaleur totale dégagée dans le circuit représente l'énergie primitive du système. Il est facile, en effet, de vérifier que l'on a toujours

$$\int_0^\infty i\,dt = q_0, \qquad r\int_0^\infty i^2\,dt = \frac{q_0^2}{2C}.$$

399. Décharges oscillantes ou continues. — On peut traiter entièrement le problème par l'analyse; nous aurons encore recours à l'interprétation graphique.

Lorsque le phénomène est oscillant, la charge q est alternativement positive ou négative, en s'affaiblissant d'une manière graduelle; on peut la représenter par l'expression

$$(14)\qquad q = q_0 e^{-\lambda t}\cos\omega t,$$

dans laquelle λ est le *décrément logarithmique* et ω le produit de 2π par la fréquence des oscillations. On en déduit

$$\frac{dq}{dt} = -q_0 e^{-\lambda t}(\lambda\cos\omega t + \omega\sin\omega t),$$

ou, en posant

$$(15) \qquad \frac{\lambda}{\cos\alpha} = \frac{\omega}{\sin\alpha} = \sqrt{\lambda^2+\omega^2},$$

$$\frac{dq}{dt} = -q_0 e^{-\lambda t}\sqrt{\lambda^2+\omega^2}\cos(\omega t - \alpha) = q_0 e^{-\lambda t}\sqrt{\lambda^2+\omega^2}\cos(\omega t + \pi - \alpha).$$

Cette dérivée présente, par rapport à la charge elle-même, une avance de phase égale à $\pi - \alpha$ et son amplitude est celle de la charge multipliée par $\sqrt{\lambda^2+\omega^2}$. Il en sera de même pour la seconde dérivée par rapport à la première.

L'équation (11) peut alors se traduire géométriquement; en effet, les différents termes représentent les projections des trois côtés d'un triangle parcouru dans un sens déterminé.

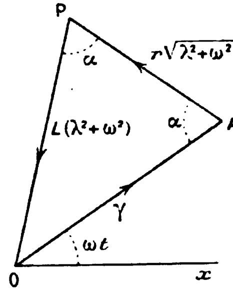


Fig. 96.

On trace d'abord une droite OA (fig. 96) de longueur égale à l'amplitude de γq, c'est-à-dire $\gamma q_0 e^{-\lambda t}$.

La phase de la dérivée étant en avance de $\pi - \alpha$, on prendra sur la direction AP, qui fait l'angle α avec AO, une longueur égale à l'amplitude du second terme, ou $r\sqrt{\lambda^2+\omega^2}\ q_0 e^{-\lambda t}$; le troisième côté PO du triangle est égal à $L(\lambda^2+\omega^2).q_0 e^{-\lambda t}$ et fait le même angle α avec PA. Il en résulte que le triangle OAP est isoscèle.

A part le facteur commun $q_0 e^{-\lambda t}$, ce triangle donne immédiatement les relations

$$\gamma = L(\lambda^2+\omega^2),$$

$$r\sqrt{\lambda^2+\omega^2} = 2\gamma\cos\alpha = \frac{2\gamma\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\omega^2}}.$$

On en déduit

$$(16) \qquad \lambda = \frac{r}{2L},$$

$$(17) \qquad \omega^2 = \frac{\gamma}{L} - \lambda^2 = \frac{1}{4L^2}(4L\gamma - r^2).$$

La valeur du décrément logarithmique λ est indépendante de la nature oscillante ou continue du phénomène; elle est d'autant moindre que la résistance est plus faible et le coefficient de self-induction plus élevé.

Pour que les décharges soient *oscillantes*, il faut que la valeur de ω^2 soit positive, c'est-à-dire

$$r^2 < 4L\gamma \quad \text{ou} \quad r^2 C < 4L.$$

Les conditions les plus favorables à la production des décharges oscillantes seront donc de choisir des valeurs faibles pour la résistance du circuit et la capacité, ou un coefficient de self-induction très élevé.

Les projections des côtés du triangle sur une droite Ox, qui fait l'angle ωt avec OA, représentent respectivement les trois termes de l'équation (11).

En fonction du temps, le point A décrit une spirale logarithmique, car le rayon vecteur $OA = \rho$ peut s'écrire

$$\rho = \gamma q_0 e^{-\lambda t} = \gamma q_0 e^{-\frac{\lambda}{\omega}\omega t}.$$

Sa projection $\rho \cos \omega t$ ou γq représente à chaque instant la différence de potentiel des armatures.

Enfin la période des oscillations est

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{2L}{\sqrt{4L\gamma - r^2}}.$$

La charge passe par un maximum ou un minimum quand sa dérivée est nulle, ou le courant nul, c'est-à-dire aux époques déterminées par la condition

$$\omega t = \alpha + (2n+1)\frac{\pi}{2} = \alpha + \frac{\pi}{2} + n\pi;$$

ces époques sont séparées de celles qui correspondent à la charge nulle par l'intervalle de temps

$$\theta = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{1}{\omega} \operatorname{arc\,tang} \frac{\omega}{\lambda}.$$

L'époque t_1 du premier maximum à partir du début de la décharge et sa valeur q_1, abstraction faite du signe, sont

$$\omega t_1 = \alpha + \frac{\pi}{2},$$

$$q_1 = q_0 e^{-\lambda t_1} \sin\alpha = q_0 e^{-\frac{\lambda}{\omega}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} \sin\alpha.$$

On aura, de même, pour le n^e maximum,

$$q = q_1 e^{-\frac{\lambda}{\omega} n\pi} = q_1 \left(e^{-\pi\frac{\lambda}{\omega}}\right)^n.$$

Les charges successives forment une progression géométrique décroissante. La quantité totale d'électricité mise en mouvement pendant la décharge est donc

$$q_0 + \frac{q_1}{1 - e^{-\pi\frac{\lambda}{\omega}}} = q_0 \left[1 + \frac{e^{-\frac{\lambda}{\omega}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}}{1 - e^{-\pi\frac{\lambda}{\omega}}} \sin\alpha\right].$$

L'intensité du courant est aussi, à un facteur près, égale à la projection de la droite PA ; c'est également la projection du rayon vecteur d'une spirale logarithmique.

Lorsque le décrément logarithmique λ est très petit, la décharge éprouve un nombre considérable d'oscillations presque identiques et la période est sensiblement

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{\gamma}} = 2\pi \sqrt{CL}.$$

Le caractère alternatif que peut présenter la décharge des batteries avait été indiqué par Von Helmholtz [1] comme un

[1] Helmholtz, *Die Erhaltung der Kraft*, p. 141 ; 1847.

résultat des faits observés dans l'aimantation par la décharge ou le dégagement d'un mélange d'hydrogène et d'oxygène à chaque électrode d'un voltamètre. Lord Kelvin [1] en a donné ensuite la raison théorique, et la première vérification expérimentale a été fournie par Feddersen [2].

Lorsque le second membre de l'équation (17) est négatif, la valeur de ω est imaginaire ; on peut alors poser

$$m^2 = \frac{1}{4L^2}(r^2 - 4L\gamma), \qquad \omega = m\sqrt{-1},$$

et l'on aura

$$\cos\omega t = \cos mt\sqrt{-1} = \frac{e^{mt} + e^{-mt}}{2},$$

$$q = q_0 e^{-\lambda t}\frac{e^{mt} + e^{-mt}}{2}.$$

Dans ce cas, le phénomène est *continu* et la charge diminue plus ou moins lentement jusqu'à zéro ; le coefficient λ est en effet plus grand que m, car on a

$$\lambda^2 - m^2 = \frac{\gamma}{L}.$$

Le temps nécessaire pour que la charge soit réduite à la n^e partie de la charge primitive sera donné par l'équation

$$\frac{2}{n}e^{\lambda t} = e^{mt} + e^{-mt}.$$

400. Deux circuits à courants alternatifs. — Supposons que, de deux circuits voisins, le primaire (i, r, L) renferme une force électromotrice sinusoïdale $e = \mathrm{E}\sin\omega t$, tandis que le circuit secondaire (i', r', L') est simplement fermé sur luimême. Les équations différentielles sont alors

$$(18) \qquad \begin{cases} M\dfrac{di'}{dt} + L\dfrac{di}{dt} + ri = \mathrm{E}\sin\omega t, \\ M\dfrac{di}{dt} + L'\dfrac{di'}{dt} + r'i' = 0. \end{cases}$$

[1] Sir W. THOMSON, *Phil. Mag.* [4], t. V, p. 393; 1853.
[2] FEDDERSEN, *Pogg. Ann.*, t. CIII, p. 69; 1858. — *Ann. de Ch. et de Phys.*, [3] t. LIV, p. 435; 1858, et t. LXIX, p. 178; 1863.

Lorsque le régime est établi, les courants sont encore sinusoïdaux de même période et l'on peut écrire

$$(19)\qquad i = \mathrm{I}\sin(\omega t - \alpha),\qquad i' = \mathrm{I}'\sin(\omega t - \alpha').$$

Les constantes I, I′, α, α' seront déterminées par la condition que les équations différentielles (18) soient satisfaites à toute époque.

Si l'on traite le problème par la méthode graphique, la première équation signifie que l'amplitude E est la somme géométrique des amplitudes des trois autres termes, et la seconde équation que les trois termes forment les côtés d'un triangle parcouru dans un sens déterminé.

Commençant par cette dernière opération, on prend une

Fig. 97.

longueur $OA' = r'\,I'$ (fig. 97), à laquelle on élève une perpendiculaire $A'P' = L'\omega I'$; la droite $P'O$ représente $M\omega I$.

Comme ce terme est donné par la dérivée de i, la quantité $r\mathrm{I}$ de la première équation doit être portée dans une direction perpendiculaire OA, vers la droite.

Le terme $M\omega I'$ provient de la dérivée de i'; on portera la longueur correspondante suivant AQ, perpendiculaire à OA′.

Enfin $L\omega I$ sera une droite QP perpendiculaire à OA, et l'amplitude E est représentée par la somme géométrique OP des droites OA, AQ et QP.

Désignant par β' l'angle P′OA′, on a, dans ce triangle,

$$(20)\qquad \frac{r'\mathrm{I}'}{\cos\beta'} = \frac{L'\omega\mathrm{I}'}{\sin\beta'} = M\omega\mathrm{I} = \mathrm{I}'\sqrt{r'^2 + L'^2\omega^2} = \mathrm{I}'a',$$

la quantité a' étant l'impédance du circuit secondaire. Les angles AOP et A'OP, qui sont respectivement les pertes de phase α et α' du courant primaire et du courant secondaire sur la force électromotrice, donnent

$$\alpha' - \alpha = \frac{\pi}{2} + \beta' = \frac{\pi}{2} + \text{arc tang}\,\frac{L'\omega}{r'}. \tag{21}$$

L'angle QAS est aussi égal à β', comme ayant ses côtés perpendiculaires à ceux du premier, et le triangle QAS est rectangle en S. On a donc, en tenant compte de (20),

$$\text{AS} = M\omega \text{I}' \cos\beta' = M\omega \frac{\text{I}' r'}{a'} = \frac{r'}{a'^2} M^2 \omega^2 \text{I},$$

$$\text{QS} = M\omega \text{I}' \sin\beta' = M\omega \frac{\text{I}' L'\omega}{a'} = \frac{L'\omega}{a'^2} M^2 \omega^2 \text{I}.$$

Si l'on pose

$$\frac{\text{OS}}{\text{I}} = \rho = r + \frac{\text{AS}}{\text{I}} = r + r' \frac{M^2 \omega^2}{a'^2},$$

$$\frac{\text{SP}}{\text{I}} = \lambda\omega = L\omega - \frac{\text{QS}}{\text{I}} = L\omega - L'\omega \frac{M^2 \omega^2}{a'^2},$$

on obtient finalement, par le triangle rectangle OSP,

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\rho}{\cos\alpha} = \frac{\lambda\omega}{\sin\alpha} = \frac{\text{E}}{\text{I}}, \\ &\text{E}^2 = (\rho^2 + \lambda^2 \omega^2)\,\text{I}^2. \end{aligned} \right.$$

Le courant primaire est le même que si son circuit avait une résistance ρ et un coefficient de self-induction λ.

Les constantes I et α du courant primaire étant déterminées par les données du problème, les équations (20) et (21) donneront les constantes I' et α' du courant secondaire.

La perte de phase $\alpha' - \alpha$ du courant secondaire sur le primaire ne dépend que du circuit secondaire ; elle est toujours supérieure à 90°, c'est-à-dire que le retard est compris entre un quart et une demi-période.

Le rapport des énergies calorifiques dégagées dans les deux circuits est

$$\frac{W'}{W}=\frac{r'I'^2}{rI^2}=\frac{r'}{r}\cdot\frac{M^2\omega^2}{r'^2+L'^2\omega^2},$$

et l'énergie totale, par unité de temps,

$$W+W'=\frac{EI\cos\alpha}{2}=\frac{I^2\rho}{2}=\frac{E^2}{2}\cdot\frac{\rho}{\rho^2+\lambda^2\omega^2}.$$

Supposons que le circuit primaire renferme un organe producteur de la force électromotrice $E\sin\omega t$, comme serait un cadre tournant dans un champ magnétique uniforme; la *puissance* de la machine, c'est-à-dire le travail par unité de temps nécessaire pour entretenir le courant, est $W+W'$. Si le circuit secondaire renferme deux résistances successives $r'=r_1+r_2$ telles que l'échauffement de la seconde soit un travail utile U, le *rendement* u de la machine est

$$\frac{1}{u}=\frac{W+W'}{U}=\frac{rI^2+r'I'^2}{r_2I'^2}=1+\frac{r_1}{r_2}+\frac{r}{r_2}\cdot\frac{M^2\omega^2}{r'^2+L'^2\omega^2}.$$

La perte de phase α du courant primaire sur la force électromotrice a pour expression

$$\tan g\,\alpha=\omega\frac{La'^2-L'M^2\omega^2}{ra'^2+r'M^2\omega^2}=\omega\frac{Lr'^2+(LL'-M^2)L'\omega^2}{rr'^2+(rL'^2+r'M^2)\omega^2}.$$

Comme on a $LL'>M^2$, à moins que les circuits ne renferment des capacités, l'angle α est positif et inférieur à 90°.

Lorsque les oscillations sont très rapides ou la résistance r' du circuit secondaire assez faible pour qu'on puisse la négliger devant la réactance $L'\omega$, il reste simplement

$$L'I'=MI,\qquad \frac{W'}{W}=\frac{r'}{r}\,\frac{M^2}{L'^2},\qquad \tan g\,\alpha=\omega\frac{LL'-M^2}{rL'}.$$

Dans ce cas, le rendement u de la machine considérée serait simplement

$$\frac{1}{u}=1+\frac{r_1}{r_2}+\frac{r}{r^2}\cdot\frac{M^2}{L'^2}.$$

L'emploi des grandeurs complexes permet encore de traiter le problème plus directement. Les équations (18) deviennent

$$\begin{aligned} E &= RI + iM\omega I', \\ o &= R'I' + iM\omega I. \end{aligned}$$

La dernière donne

$$\frac{I'}{I} = -\frac{iM\omega}{R'} = \frac{-iM\omega}{r' + iL'\omega}.$$

Le rapport des amplitudes des courants est le rapport des modules des deux termes du second membre, ce qui donne, en quantités réelles,

$$\frac{I'^2}{I^2} = \frac{M^2\omega^2}{r'^2 + L'^2\omega^2}.$$

Leur différence de phase est la différence de phase des arguments, c'est-à-dire

$$\alpha' - \alpha = \frac{\pi}{2} + \text{arc tang}\frac{L'\omega}{r'}.$$

On en déduit aussi

$$\frac{E}{I} = R - R'\frac{I'^2}{I^2} = R + \frac{M^2\omega^2}{R'} = \frac{RR' + M^2\omega^2}{R'}.$$

En passant aux quantités réelles, on retrouverait, pour l'amplitude I et la perte de phase α, les mêmes expressions que précédemment.

Ce problème correspond au cas d'une *bobine d'induction* à courant primaire sinusoïdal, dont le circuit secondaire reste fermé, ou mieux aux *transformateurs* employés dans l'industrie pour modifier l'amplitude de la différence de potentiel, ou le voltage des courants alternatifs.

401. Téléphones et microphones. — Pour un circuit placé dans un champ magnétique variable, l'équation différentielle des courants induits est

$$(23) \qquad e = ri + L\frac{di}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Supposons que le circuit renferme une force électromotrice constante E_0 et que le flux d'induction magnétique soit une fonction périodique de la forme

$$\varphi = \Phi_0 + \Phi \cos \omega t.$$

L'influence du champ est la même que si la force électromotrice renfermait une partie périodique $\Phi \omega \sin \omega t = E \sin \omega t$; tel serait le cas, par exemple, d'un électro-aimant devant lequel on ferait osciller un aimant.

Le courant se compose d'un terme constant I_0 produit par la partie constante E_0 de la force électromotrice et d'un courant induit dû à la partie variable $E \sin \omega t$, ce qui donne

$$i = I_0 + I \sin(\omega t - \alpha) = \frac{E_0}{r} + \frac{E}{a} \sin(\omega t - \alpha),$$

en désignant par a l'impédance du circuit pour la période considérée et par α la perte de phase correspondante.

Si E_0 est nul, le courant induit est simplement sinusoïdal. Tel est le cas du *téléphone*, où une lame d'acier aimantée vibre en face d'un électro-aimant.

Les variations du flux d'induction, étant alors provoquées par des vibrations sonores, se composent d'une série d'harmoniques simples et le courant induit est la somme algébrique des courants relatifs aux différents harmoniques.

Comme la perte de phase α croît avec la fréquence, il se produira une *dispersion* des courants harmoniques, qui seront ensuite utilisés pour constituer le son résultant, c'est-à-dire une variation de leurs phases relatives.

En outre, l'amplitude I est

$$I = \frac{E}{a} = \Phi \frac{\omega}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}} = \frac{\Phi}{\sqrt{\frac{r^2}{\omega^2} + L^2}}.$$

Toutes choses égales, l'amplitude du courant induit augmente avec la période, de sorte que les harmoniques les plus élevés sont ceux qui se transmettent le plus facilement et leur importance relative augmente. C'est là sans doute une des

causes principales auxquelles on doit attribuer l'altération du *limbre* dans les transmissions téléphoniques.

Les quantités $e = E_0$, L et φ restant invariables, si la résistance r varie d'une manière périodique,

$$r = r_0 + R \sin \omega t,$$

le courant induit éprouve des variations de même période, compliquées d'harmoniques supérieurs, puisque l'équation différentielle (23) ne reste plus linéaire. En tous cas, l'amplitude des termes variables est évidemment proportionnelle à la force électro-motrice E_0.

Un pareil courant provoquera dans un circuit voisin des courants induits périodiques de même caractère. C'est ce qui a lieu dans le *microphone* où les variations de résistance sont produites par les vibrations de deux corps en contact, tels que des morceaux de charbon ; il en est ainsi encore pour le *photophone* à sélénium, où l'on utilise les variations de résistance qu'un éclairage intermittent produit dans ce corps.

COEFFICIENTS D'INDUCTION

402. Bobines longues. — Les exemples qui précèdent montrent le rôle important que jouent les coefficients M et L dans le calcul des courants variables. Comme il est utile de fixer les idées par des exemples, nous examinerons d'abord quelques cas simples, où ces coefficients sont à peu près indépendants du diamètre des conducteurs.

Considérons une bobine cylindrique assez longue pour qu'on puisse, dans une partie notable de sa longueur, négliger l'action des extrémités.

Si la bobine est couverte d'une seule couche de N fils, comprenant n spires par unité de longueur, le champ intérieur pour l'unité de courant est $G = 4\pi n$ (**354**). En appelant S la section du cylindre, le flux intérieur est $GS = 4\pi n S$.

La presque totalité de ce flux traverse les N spires, de sorte

que le flux total de force émis par le courant dans son propre circuit, ou le coefficient de self-induction, est

$$(1) \qquad L = 4\pi n \mathrm{NS}.$$

Supposons qu'on entoure cette première bobine par une seconde bobine plus courte, ayant n' spires par unité de longueur, un nombre total N′ et une section S′.

Le flux GS traversant les N′ surfaces de la seconde bobine, le flux émis par l'unité de courant du premier circuit dans la surface totale du second, ou le coefficient d'induction mutuelle des deux bobines, est

$$(2) \qquad M = 4\pi n \mathrm{N'S}.$$

Si la seconde bobine est assez longue, on a aussi

$$L' = 4\pi n' \mathrm{N'S'};$$

par suite,

$$LL' = (4\pi)^2 n n' \mathrm{NN'SS'} = M^2 \frac{n' \mathrm{NS'}}{n \mathrm{N'S}}.$$

La relation $LL' = M^2$, qui correspond à la valeur maximum du coefficient d'induction mutuelle (**383**), serait satisfaite pour la condition

$$\frac{n\mathrm{S}}{\mathrm{N}} = \frac{n'\mathrm{S'}}{\mathrm{N'}}.$$

Si l'on désigne par L et L′ les longueurs des deux bobines, on a $\mathrm{N} = n\mathrm{L}$, $\mathrm{N'} = n'\mathrm{L'}$, et

$$\frac{n' \mathrm{NS'}}{n \mathrm{N'S}} = \frac{\mathrm{LS'}}{\mathrm{L'S}}.$$

Ce rapport serait égal à l'unité pour des bobines de même longueur et de même section.

Il importe de remarquer toutefois que les valeurs adoptées pour L et L' sont en réalité trop grandes. En effet, l'induction magnétique dans l'aimant solénoïdal (**250**) qui équivaut à la bobine parcourue par le courant I est la résultante du champ

$4\pi n I$ parallèle à l'axe et du champ produit par les couches terminales de densités uniformes $\pm n I$, lequel est de sens contraire. Dans une section voisine des extrémités, le flux est donc inférieur à $2\pi n S I$, puisque le flux contraire de la face la plus proche est déjà $2\pi n I S$.

403. Bobines à plusieurs couches de fil. — Considérons, de même, une bobine cylindrique, à section circulaire, formée de plusieurs couches à enroulement homogène, qui comprennent n spires par unité de longueur parallèlement à l'axe et m spires par unité d'épaisseur, c'est-à-dire $nm = p$ fils dans l'unité de section faite par un plan méridien.

Si l'on désigne par r le rayon d'une couche d'épaisseur dr, le nombre de spires par unité de longueur est pdr et le nombre de fils relatifs à cette couche $\mathrm{L}pdr$. En désignant par a et b les rayons des faces interne et externe de la couche de fils, le nombre total N des spires est

$$\mathrm{N} = \mathrm{L}p\int dr = \mathrm{L}p(b-a).$$

Pour une seconde bobine extérieure, de même axe et de même longueur, on aura également

$$\mathrm{N}' = \mathrm{L}p'(b'-a').$$

Le champ intérieur de la couche d'épaisseur dr, pour l'unité de courant, est $4\pi p dr$ et le flux correspondant

$$4\pi p\, dr.\pi r^2 = 4\pi^2 p\, r^2\, dr,$$

de sorte que le flux total a pour expression

$$\varphi = 4\pi^2 p\int r^2\, dr = \frac{4}{3}\pi^2 p(b^3-a^3).$$

Ce flux traversant les N′ spires de la seconde bobine, le coefficient d'induction mutuelle est

$$(3) \qquad M = \mathrm{N}'\varphi = \frac{4}{3}\pi^2 \mathrm{L}pp'(b'-a')(b^3-a^3).$$

Lorsque les couches des deux bobines sont en contact, on

peut poser $b = a' = y$. Si l'on veut alors disposer du rayon intermédiaire y de manière que la quantité $(b'-y)(y^3-a^3)$ et, par suite, le coefficient M soit un maximum, on devra satisfaire à la condition

$$3y^2(b'-y) = y^3 - a^3 = (y-a)(y^2+ay+a^2),$$
$$\frac{b'-y}{y-a} = \frac{b'-a'}{b-a} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{a}{b}+\frac{a^2}{b^2}\right).$$

Comme le dernier membre est plus petit que l'unité, il en résulte que l'épaisseur $b'-a'$ de la couche de fils sur la bobine extérieure doit être moindre que l'épaisseur $b-a$ de celle qui forme la bobine intérieure.

Pour obtenir le coefficient de self-induction d'une bobine, au moins d'une manière approximative, on peut supposer que deux bobines identiques sont exactement superposées et déterminer ce que devient alors leur coefficient d'induction mutuelle. En faisant ainsi, dans l'expression (3), $p'=p$, $a'=a$ et $b'=b$, il en résulte

$$(4) \qquad L = \frac{4}{3}\pi^2 \mathrm{L} p^2 (b-a)(b^3-a^3) = \frac{4}{3}\pi^2 \mathrm{N} p (b^3-a^3).$$

404. Bobines armées de fer doux. — La présence de milieux magnétiques complique beaucoup le problème. Les coefficients d'induction augmentent alors dans une large mesure et ils deviennent eux-mêmes des fonctions de la force magnétisante, ou des courants, lorsque la perméabilité magnétique n'est pas constante; on ne peut donc traiter la question simplement que dans des cas particuliers.

Supposons que la bobine intérieure renferme un noyau cylindrique de section S_1, formé de fer doux dont le coefficient d'aimantation est k. Autant que le champ reste dans les limites entre lesquelles l'aimantation est proportionnelle à la force magnétisante, l'induction magnétique dans l'espace occupé par le fer doux (269) est le produit du champ par la perméabilité magnétique $\mu = 1 + 4\pi k$.

Dans le cas d'une bobine à une seule couche de fils, le flux d'induction intérieur, pour l'unité de courant, est

$$\varphi = 4\pi n(S + 4\pi k S_1) = 4\pi n[S + (\mu - 1) S_1].$$

Si la bobine et le fer doux ont des sections circulaires de rayons a et c, on a

$$\varphi = 4\pi^2 n\left[a^2 + (\mu - 1)c^2\right].$$

Lorsque la bobine se compose de plusieurs couches, le flux intérieur devient

$$\varphi = 4\pi^2 p \int \left[r^2 + (\mu - 1)c^2\right] dr = 4\pi^2 p\left[\frac{b^3 - a^3}{3} + (\mu - 1)c^2(b - a)\right].$$

Le coefficient d'induction mutuelle de cette bobine armée sur une seconde bobine de même axe est alors

$$(5) \qquad M = \frac{4}{3}\pi^2 \mathrm{L} pp'(b' - a')\left[b^3 - a^3 + 3(\mu - 1)c^2(b - a)\right].$$

Si le noyau de fer remplit toute la cavité intérieure et que les couches des deux bobines soient en contact, on aura, en posant $b = a' = y, c = a = x$ et $b' = z$,

$$(6) \qquad M = \frac{4}{3}\pi^2 \mathrm{L} pp'(z - y)(y - x)\left[y^2 + xy + x^2 + 3(\mu - 1)x^2\right].$$

Supposons alors que le rayon x soit seul variable, et qu'on veuille en disposer de manière à rendre M maximum ; la dérivée du second membre par rapport à x doit être nulle. On obtient ainsi, en posant $\mathrm{H} = 1 + 3(\mu - 1) = 3\mu - 2$,

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3}\,\frac{\mathrm{H} - 1}{\mathrm{H}} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{H}}\right).$$

Comme la perméabilité μ est toujours très notable, le coefficient H est un nombre très grand et la condition de maximum se réduit à $3x = 2y$.

Le coefficient d'induction mutuelle peut d'ailleurs s'écrire

$$M = \frac{4}{3}\pi^2 \mathrm{L} pp' \mathrm{H}(z - y)(y - x)x^2.$$

Le rayon extérieur z du système étant donné, ainsi que le mode d'enroulement des fils, si l'on veut disposer en même

temps des deux rayons x et y de manière à rendre M maximum, on égalera aussi à zéro la dérivée partielle par rapport à y, ce qui donne $z-y=y-x$, ou, en réunissant les deux conditions,

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}.$$

Enfin, si l'on fait $p'=p$, $a'=a$ et $b'=b$ dans l'équation (5), on en déduira le coefficient de self-induction d'une bobine armée de fer doux :

$$(7) \qquad L=\frac{4}{3}\pi^2 \mathrm{L} p^2 (b-a)^2 [b^2+ab+a^2+3(\mu-1)c^2].$$

Ce problème se présente dans la construction des appareils appelés *bobines d'induction* ou bobines de Ruhmkorff.

405. Bobines annulaires. — Lorsque la bobine est enroulée autour d'un anneau de section constante, elle constitue un ensemble de solenoïdes fermés et les calculs sont rigoureux puisqu'il n'y a plus à tenir compte des extrémités.

Si l'anneau est de révolution, de section S, et que x soit la distance à l'axe de l'élément dS, le flux de force qui traverse cette section pour l'unité de courant, est (356)

$$\varphi=4\pi n\int\frac{d\mathrm{S}}{x}.$$

Supposons qu'un second fil soit enroulé N′ fois, d'une manière quelconque, autour du premier; le coefficient d'induction mutuelle sera

$$(8) \qquad M=\mathrm{N}'\varphi=4\pi n\mathrm{N}'\int\frac{d\mathrm{S}}{x}.$$

Si la première bobine renferme un noyau de fer doux, de révolution autour du même axe et de section S_1, on a

$$\varphi=4\pi n\left[\int\frac{d\mathrm{S}}{x}+(\mu-1)\int\frac{d\mathrm{S}_1}{x}\right].$$

Quand le noyau de fer remplit toute la cavité de la bobine, il reste simplement

$$\varphi=4\pi n\mu\int\frac{d\mathrm{S}}{x}.$$

Dans ce dernier cas, le coefficient d'induction mutuelle sur un fil extérieur de N′ tours a pour expression

$$(9) \qquad M = 4\pi n N' \mu \int \frac{dS}{x},$$

et le coefficient de self-induction de la bobine elle-même, qui renferme $2\pi n$ spires, est

$$(10) \qquad L = 8\pi^2 n^2 \mu \int \frac{dS}{x}.$$

Nous avons vu précédemment quelles sont les valeurs des intégrales dans certains cas particuliers.

Si le fil extérieur est aussi enroulé régulièrement et appliqué sur le premier, on a $N' = 2\pi n'$ et, par suite,

$$M = 8\pi^2 n n' \mu \int \frac{dS}{x}, \qquad L' = 8\pi^2 n'^2 \mu \int \frac{dS}{x}.$$

La relation

$$\frac{M}{nn'} = \frac{L}{n^2} = \frac{L'}{n'^2}$$

montre que les coefficients satisfont alors d'une manière rigoureuse à la condition $LL' = M^2$; c'est le seul cas, en effet, où le flux de force des bobines est nul à l'extérieur et entièrement utilisé d'un circuit dans l'autre.

406. Cadres rectangulaires. — Supposons qu'un conducteur AB (fig. 98) de longueur a, parcouru par l'unité de courant, soit placé en face d'un cadre rectangulaire A′B′C′D′ dont les côtés A′B′ et C′D′ sont égaux et parallèles à AB, ce cadre étant parcouru par un courant dans le sens des flèches, afin de définir le signe de ses faces.

Soient ds et ds' des éléments situés en M et M′, r leur distance MM′, p la perpendiculaire abaissée du point M sur la droite A′B′.

Le flux d'induction émis par l'élément ds dans le cadre est, d'après la formule de Neumann (**328**),

$$(11) \qquad d\varphi = ds \int \frac{ds' \cos\varepsilon}{r}.$$

On remarquera qu'il suffit d'étendre l'intégrale aux côtés A'B' et C'D', pour lesquels $\cos\varepsilon$ est égal à $+1$ et -1, puisque ce cosinus est nul pour les deux autres côtés B'C' et D'A'.

Si l'on désigne par θ' l'angle du rayon vecteur MM' avec la droite A'B', on a

$$ds' \sin\theta' = -r\,d\theta',$$

ce qui donne, pour le côté A'B',

$$\int \frac{ds'}{r} = -\int \frac{d\theta'}{\sin\theta'} = -\left[\mathfrak{L}.\operatorname{tang}\frac{\theta'}{2}\right]_{\pi-\alpha}^{\beta} = -\mathfrak{L}.\left(\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}\right),$$

les angles α et β étant indiqués sur la figure.

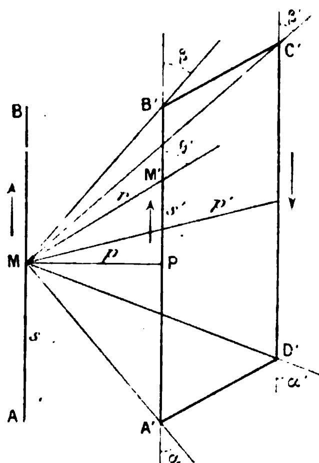


Fig. 98.

L'intégrale relative au côté C'D' a la même valeur en fonction des angles α' et β' et doit être prise en signe contraire. Il en résulte

$$(12) \qquad d\varphi = ds\,\mathfrak{L}.\frac{\operatorname{tang}\frac{\alpha'}{2}\operatorname{tang}\frac{\beta'}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}}.$$

Si les distances p et p' du point M aux côtés opposés A'B' et

C'D' sont très petites par rapport à leur longueur a et le point M très éloigné des extrémités, les tangentes des angles α et α', β et β' sont respectivement proportionnelles aux perpendiculaires p et p', ce qui donne

$$d\varphi = ds\,\mathfrak{L}.\frac{p'^2}{p^2} = 2\,ds\,\mathfrak{L}.\frac{p'}{p}.$$

On aurait ainsi le flux d'induction émis par un élément de courant dans l'intervalle compris entre deux courants parallèles et de sens contraires.

Pour obtenir le flux du courant AB dans le cadre, il faut intégrer l'équation (12) entre les limites $s=o$ et $s=a$, en exprimant les tangentes en fonction de la variable s.

En comptant l'arc s' à partir du point P, on a d'ailleurs

$$\int \frac{ds'}{r} = \int \frac{ds'}{\sqrt{p^2+s'^2}} = \mathfrak{L}.\left(s' + \sqrt{p^2+s'^2}\right),$$

et cette intégrale doit être prise entre les limites $-$PA' et $+$PB' pour la variable s'.

Si les conducteurs AB et A'B' sont placés comme les côtés opposés d'un rectangle et que l'on compte l'arc s à partir du point A, les limites sont $-s$ et $a-s$, ce qui donne

$$\int \frac{ds'}{r} = \mathfrak{L}.\frac{a-s+\sqrt{p^2+(a-s)^2}}{-s+\sqrt{p^2+s^2}}.$$

Pour intégrer le produit de cette expression par ds, on utilisera la relation

$$\int \mathfrak{L}.\left(-u+\sqrt{p^2+u^2}\right)du = u\,\mathfrak{L}.\left(-u+\sqrt{p^2+u^2}\right) + \sqrt{p^2+u^2},$$

dans laquelle on fera successivement $u=s-a$ et $u=s$. La valeur de l'intégrale relative aux courants AB et A'B' est alors, toutes réductions faites,

$$(13)\qquad 2\left[a\,\mathfrak{L}.\frac{a+\sqrt{p^2+a^2}}{p} - \sqrt{p^2+a^2} + p\right] = 2f(a,p).$$

L'intégrale relative aux courants AB et C'D' aura la même expression en fonction de p' et de a, et on doit la prendre en

signe contraire. Le flux d'induction φ_a émis par le courant AB dans le cadre A'C' est donc $2[f(a,p)-f(a,p')]$, c'est-à-dire

$$\varphi_a = 2\left[a\,\mathfrak{L}.\frac{p'}{p}.\frac{a+\sqrt{p^2+a^2}}{a+\sqrt{p'^2+a^2}}+\sqrt{p'^2+a^2}-\sqrt{p^2+a^2}+p-p'\right].$$

Considérons maintenant deux cadres rectangulaires AC, A'C' (fig. 99), formant les faces opposées d'un parallélipipède

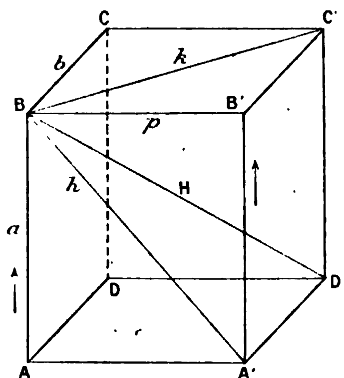


Fig. 99.

rectangle dont les côtés sont a et b. Soit p leur distance BB', $h=\sqrt{p^2+a^2}$ la diagonale BA', $k=\sqrt{p^2+b^2}$ la diagonale BC' et $H=\sqrt{p^2+a^2+b^2}$ la diagonale BD'.

Le flux d'induction des côtés AB et CD dans le cadre A'C' est $2\varphi_a=4[f(a,p)-f(a,k)]$ et celui des côtés BC et CD $4[f(b,p)-f(b,h)]$. Le flux total émis par le cadre AC dans le cadre A'C', ou le coefficient d'induction mutuelle, est donc

$$M=4[f(a,p)-f(a,k)+f(b,p)-f(b,h)].$$

$$(14)\quad M=4\left[a\,\mathfrak{L}.\frac{k}{p}\frac{a+h}{a+H}+b\,\mathfrak{L}.\frac{h}{p}.\frac{b+k}{b+H}+2(H-h-k+p)\right].$$

Remarquons aussi que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial p}f(a,p)=1-\frac{\sqrt{a^2+p^2}}{p}=1-\frac{h}{p},$$

$$\frac{\partial}{\partial p}f(a,k)=\left(1-\frac{\sqrt{a^2+k^2}}{p}\right)\frac{p}{k}=\frac{p-H}{k}=-\frac{H-p}{k}.$$

Faisant le même calcul pour les deux autres termes, on obtient finalement

$$\frac{1}{4}\frac{\partial M}{\partial p}=2-\frac{h+k}{p}+(\mathrm{H}-p)\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{k}\right).$$

Si les courants dans les deux cadres sont I et I', l'énergie relative est

$$\mathrm{W}=-M\mathrm{I}\mathrm{I}'.$$

En désignant par X l'attraction qui s'exerce entre les circuits, on a $-Xdp+d\mathrm{W}=0$ et, par suite,

$$X=\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial p}=-\mathrm{I}\mathrm{I}'\frac{\partial M}{\partial p},$$

$$(15)\qquad X=4\mathrm{I}\mathrm{I}'\left[\frac{h+k}{p}-(\mathrm{H}-p)\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{k}\right)-2\right].$$

Lorsque la distance p est très petite par rapport aux dimensions des cadres, on peut remplacer approximativement h et k par les côtés a et b, ce qui donne

$$(14)'\quad M=4\left[a\,\mathcal{L}.\frac{2ab}{p(a+\mathrm{H})}+b\,\mathcal{L}.\frac{2ab}{p(b+\mathrm{H})}+2(\mathrm{H}-a-b+p)\right],$$

$$(15)'\qquad X=4\mathrm{I}\mathrm{I}'\left[\frac{a+b}{p}-\frac{a+b}{ab}\sqrt{a^2+b^2}-2\right].$$

Comme le premier terme est le plus important dans l'expression de la force, l'attraction des cadres est à peu près en raison inverse de leur distance. Cette disposition pourrait être utilisée comme électrodynamomètre (364).

407. Cadres circulaires concentriques. — Considérons deux cadres circulaires de même centre O (fig. 100) dont les rayons sont a et $a+c$; nous emploierons ici un autre mode de raisonnement, pour varier les points de vue.

Si l'on considère en P un élément ds du circuit extérieur dont la tangente est PQ, son champ au point M à la distance r, pour l'unité de courant, est égal à $\frac{ds\sin\theta}{r^2}$ et perpendiculaire au plan

de la figure. Sur un élément de surface $r\,dr\,d\theta$, le flux de force est $ds\dfrac{\sin\theta\,d\theta\,dr}{r}$, de sorte que le flux d'induction émis par l'élément ds dans le cercle intérieur est

$$d\varphi = ds\int \sin\theta\,d\theta\int\frac{dr}{r}.$$

En désignant par r_1 et r_2 les distances PM_1 et PM_2 aux-

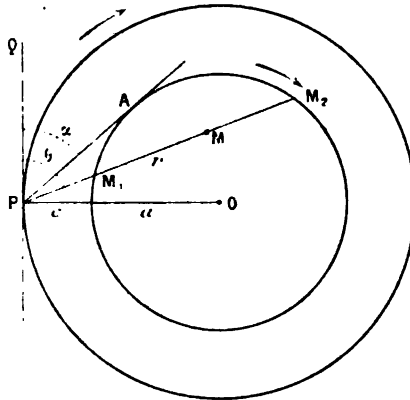


Fig. 100.

quelles le rayon vecteur relatif à l'angle θ coupe la circonférence intérieure, l'intégration par rapport à r donne

$$d\varphi = ds\int \mathcal{L}.\frac{r_2}{r_1}\sin\theta\,d\theta.$$

Cette intégrale est une fonction elliptique, mais elle peut être simplifiée dans un cas particulier. Si l'on mène la tangente PA à la circonférence intérieure, on a

$$r_1 r_2 = \overline{PA}^2 = (a+c)^2 - a^2 = c(2a+c).$$

Lorsque la distance c est très petite par rapport au rayon a, on peut écrire

$$r_1 r_2 = 2ca, \qquad r_1 = \frac{c}{\sin\theta},$$

et, par suite,

$$r_2 = 2a\sin\theta, \qquad \frac{r_2}{r_1} = \frac{2a}{c}\sin^2\theta.$$

La valeur de $d\varphi$ devient alors

$$d\varphi = ds\int_\alpha^{\pi-\alpha}\left(\mathcal{L}.\frac{2a}{c}\sin^2\theta\right)\sin\theta\,d\theta = 2ds\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\left(\mathcal{L}.\frac{2a}{c}\sin^2\theta\right)\sin\theta\,d\theta.$$

L'intégration par parties donne

$$\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\left(\mathcal{L}.\frac{2a}{c}\sin^2\theta\right)\sin\theta\,d\theta = \left[\cos\theta\left(2 - \mathcal{L}.\frac{2a}{c}\sin^2\theta\right) + 2\mathcal{L}.\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \cos\alpha\left(\mathcal{L}.\frac{2a}{c}\sin^2\alpha - 2\right) - \mathcal{L}.\operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Comme l'angle α est très petit, cette expression se réduit à

$$d\varphi = 2ds\left[\mathcal{L}.\frac{2a}{c}\frac{\sin^2\alpha}{\operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2}} - 2\right] = 2ds\left[\mathcal{L}.\frac{8a}{c} - 2\right].$$

Intégrant ensuite par rapport à s, il en résulte, pour le coefficient d'induction mutuelle,

$$M = 4\pi(a+c)\left(\mathcal{L}.\frac{8a}{c} - 2\right) = 4\pi a\left(\mathcal{L}.\frac{8a}{c} - 2\right).$$

408. Cas des courants superficiels. — La forme de Neumann ne permet pas de calculer sans précautions particulières le coefficient de self-induction d'un circuit, parce que les éléments voisins donnent des termes infinis dans l'intégrale, quand on suppose les conducteurs linéaires. Il est alors nécessaire de faire intervenir le mode de distribution des courants dans la section même des conducteurs. Nous aurons recours à des considérations plus directes.

Lorsque le diamètre des conducteurs est très petit par rapport à leur rayon de courbure, l'action d'un élément du courant sur les points très voisins est sensiblement la même que s'il appartenait à un conducteur rectiligne indéfini.

Si les courants sont uniquement distribués sur la surface, ce qui a lieu pour les courants alternatifs à grande fréquence, l'action intérieure de chaque partie est nulle (317).

Pour les conducteurs à section circulaire, la distribution superficielle est homogène, par raison de symétrie, et l'action extérieure d'un élément est la même que si le courant était concentré sur l'axe du conducteur.

Quand on veut déterminer le coefficient de self-induction d'un circuit, on devra ainsi calculer, pour chaque élément ds, le flux de force qu'il émet dans une surface limitée au contour intérieur, pour les portions voisines, et à l'axe même du conducteur pour les parties éloignées. L'intégrale ne renferme plus alors de termes infinis.

409. Self-induction d'un cadre rectangulaire ou circulaire. — Supposons que le cadre ABCD (fig. 99) soit formé par un conducteur à section circulaire de rayon ρ. Le flux relatif au côté AB est le même que celui qu'émettrait le courant AB dans un cadre A'C' pour lequel on aurait $p=\rho$, $p'=b$.

Le flux relatif au côté CD ayant la même valeur, on aurait ainsi, pour ces deux côtés, en posant $m^2=a^2+b^2$,

$$L_a=4\left[a\mathfrak{L}.\frac{b}{\rho}\frac{a+\sqrt{a^2+\rho^2}}{a+m}+m-\sqrt{a^2+\rho^2}+\rho-b\right].$$

Les côtés BC et DA donneront, de même,

$$L_b=4\left[b\mathfrak{L}.\frac{a}{\rho}\frac{b+\sqrt{b^2+\rho^2}}{b+m}+m-\sqrt{b^2+\rho^2}+\rho-a\right],$$

et le coefficient de self-induction est $L=L_a+L_b$.

Lorsque les rapports du rayon ρ aux côtés a et b du cadre sont assez petits pour que leurs carrés soient négligeables devant l'unité, on peut écrire

$$L=4\left[a\mathfrak{L}.\frac{2ab}{\rho(a+m)}+b\mathfrak{L}.\frac{2ab}{\rho(b+m)}+2(m-a-b+\rho)\right].$$

Si l'on tient compte du carré de ces rapports, on écrira

$$\sqrt{a^2+\rho^2}=a+\frac{\rho^2}{2a},\quad \sqrt{b^2+\rho^2}=b+\frac{\rho^2}{2b}.$$

On doit alors ajouter à la valeur précédente du coefficient L le terme complémentaire

$$\lambda = 4\left[a\,\mathfrak{L}.\left(1+\frac{\rho^2}{4a^2}\right)+b\,\mathfrak{L}.\left(1+\frac{\rho^2}{4b^2}\right)-\frac{\rho^2}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right],$$

$$\lambda = 4\left[\frac{\rho^2}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\frac{\rho^2}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right] = -\rho^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Par la même raison, le coefficient de self-induction d'un cadre circulaire de rayon a, dont le conducteur a une section circulaire de rayon ρ, s'obtiendra d'une manière très approchée en faisant $c = \rho$ dans la valeur du coefficient d'induction mutuelle de deux cadres circulaires concentriques (407), ce qui donne

$$L = 4\pi a\left(\mathfrak{L}.\frac{8a}{\rho} - 2\right).$$

410. Système de courants parallèles. — Supposons encore que le courant traverse un certain nombre de conducteurs rectilignes parallèles, les uns dans un sens, les autres en sens contraire, et que ces courants soient astreints à la condition de produire un champ magnétique nul dans tous les conducteurs. Ce système correspond (317) à un ensemble de conducteurs cylindriques indéfinis, chargés d'électricité positive au même potentiel, en présence d'autres conducteurs qui ont la même charge totale d'électricité négative, puisque le courant d'aller est égal au courant de retour. En un point P (fig. 101) extérieur aux conducteurs, le champ magnétique F dans le premier problème est égal et perpendiculaire au champ électrique F′ dans le second.

Supposons qu'il n'y ait que deux conducteurs parallèles, l'un A pour le courant d'aller et l'autre B pour le courant de retour; soient V_1 et V_2 leurs potentiels électrostatiques, et s une ligne de force entre ces deux conducteurs.

Le flux φ d'induction magnétique qui traverse cette ligne de force, pour l'unité de longueur des cylindres, est égal à $\int F\,ds$ ou à $\int F'\,ds$.

Dans le problème électrostatique cette dernière expression n'est autre chose que la différence de potentiel $V_1 - V_2$ des conducteurs; il en résulte $\varphi = V_1 - V_2$.

Pour que les charges électriques soient égales et de signes contraires sur les conducteurs A et B, il faut que le second entoure le premier. Le courant total et la charge électrostatique correspondante étant I, si l est le coefficient de self-induction des deux conducteurs par unité de longueur et c la capacité électrostatique du système correspondant, on a

$$\varphi = lI = V_1 - V_2 = \frac{I}{c}.$$

Il en résulte $lc = 1$, c'est-à-dire que le coefficient de self-induction par unité de longueur est l'inverse de la capacité électrostatique correspondante (1).

On connaît ainsi, par les problèmes qui précèdent, le coef-

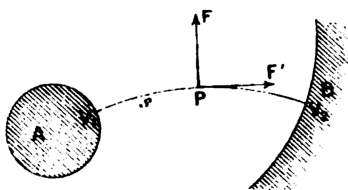


Fig. 101.

ficient de self-induction de deux cylindres circulaires concentriques (**57**) ou excentriques (**122**), ou celui d'un conducteur situé en face d'un plan parallèle (**121**).

411. Courants homogènes. — Lorsque le courant est réparti uniformément dans la section du conducteur, le coefficient de self-induction, obtenu pour les courants superficiels, doit être complété en y ajoutant la valeur moyenne du flux de force produit par le champ intérieur sur la surface qui correspond au rayon du conducteur.

Pour un courant de densité σ, le champ F produit en un point P du conducteur (fig. 102) à la distance r de l'axe, par les parties voisines du courant, est $2\pi\sigma r$; sur la surface d'un

(1) A. Potier, *C. R. de l'Acad. des sciences*, t. CXVIII, p. 166; 1894.

rectangle ayant l'unité de hauteur et pour base PC, le flux total de force est

$$\int F\,dr = \int_r^\rho 2\pi\sigma r\,dr = \pi\sigma(\rho^2 - r^2).$$

La valeur moyenne de r^2 étant

$$\frac{1}{\rho^2}\int_0^\rho r^2 d(r^2) = \frac{1}{\rho^2}\frac{(\rho^2)^2}{2} = \frac{\rho^2}{2},$$

le flux moyen relatif au rayon OC est $\frac{\pi\sigma\rho^2}{2} = \frac{I}{2}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$ pour l'unité de courant et l'unité de longueur du circuit.

Le coefficient de self-induction d'un circuit, pour les courants homogènes, s'obtiendra donc simplement en ajoutant la moitié de la longueur du circuit au coefficient de self-induction calculé par les courants superficiels.

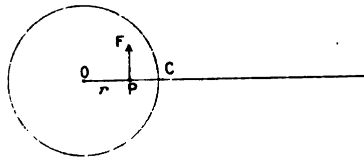


Fig. 102.

Le coefficient de self-induction d'un cadre rectangulaire est ainsi, aux petits termes près,

$$L = 4\left[a\,\mathfrak{L}.\frac{2ab}{\rho(a+m)} + b\,\mathfrak{L}.\frac{2ab}{\rho(b+m)} + 2m - \frac{7}{4}(a+b)\right],$$

et celui d'un cadre circulaire

$$L = 4\pi a\left[\mathfrak{L}.\frac{8a}{\rho} - 1{,}75\right].$$

CHAPITRE SIXIÈME

UNITÉS DE MESURE

412. Unités fondamentales. — Unités dérivées. — Toute loi expérimentale se traduit par une relation analytique, ou une équation, entre les différentes grandeurs qui interviennent dans un phénomène. On peut évidemment rapporter chacune de ces grandeurs à une unité arbitraire, mais il est alors nécessaire de recourir à l'emploi de coefficients particuliers pour maintenir l'homogénéité des formules. La nature et la valeur des coefficients sont définies par le choix des unités.

Cette méthode n'apporterait pas de gêne sérieuse dans la discussion des propriétés mathématiques, mais elle présente le grave inconvénient, alors même que les unités ont été suffisamment définies, de rendre difficile la comparaison des résultats obtenus par différents observateurs et surtout de masquer les relations qui peuvent exister entre certains ordres de phénomènes. Il y a donc tout avantage à réduire autant que possible les coefficients, par un choix commun d'unités présentant entre elles ce caractère de coordination qui fait la supériorité du système métrique.

La nature des grandeurs étant définie par l'expression des lois, il arrive alors que la suppression des coefficients dans certaines formules entraîne leur conservation dans d'autres formules et que des grandeurs que l'on continue de désigner par les mêmes expressions du langage ne sont plus de même nature. C'est ainsi que, dans le système de mesures dit *électrostatique*, où l'unité d'électricité est définie par la loi de Coulomb relative aux actions réciproques des corps électrisés, la résistance d'un conducteur est l'inverse d'une vi-

tesse (154), tandis que dans le système *électro-magnétique*, où l'unité de magnétisme est définie par l'action réciproque des aimants, la résistance du même conducteur devient finalement une vitesse (377). La confusion n'est pas dans les idées, mais seulement dans les mots, parce qu'on a donné le même nom à des grandeurs qui ne sont pas homogènes.

Des confusions analogues se produisent souvent dans le langage ordinaire. Le poids d'un corps est une force; c'est la pression qu'il exercerait sur un plan horizontal ou la tension du cordon qui le porterait en équilibre. Les poids de deux corps sont en un même lieu dans le rapport de leurs masses, mais le poids d'un corps déterminé, si on l'évalue par un dynamomètre, dépend de la gravité au point d'observation, quoique sa masse ne change pas. Le kilogramme des Archives est un étalon de masse, non de poids. Quand on définit la quantité d'une substance par son poids, on fait une erreur de langage, car c'est la masse seulement qui est définie.

Les *unités irréductibles*, ou *fondamentales*, sont choisies arbitrairement et l'on doit les réduire au nombre minimum. En géométrie, par exemple, les unités de surface et de volume peuvent se déduire de l'unité de *longueur*. En cinématique s'introduit la notion du *temps*. La dynamique amène une troisième unité, indépendante des deux premières, celle de la *force* ou de la *masse*. Toutes les grandeurs mécaniques peuvent ainsi être évaluées en fonction des trois unités de longueur, de temps et de masse, ou de longueur, de temps et de force. Dans un système coordonné, les unités de toutes les grandeurs qui s'expriment au moyen des unités fondamentales sont désignées sous le nom d'*unités dérivées*.

Les phénomènes d'électricité et de magnétisme se traduisent finalement par leurs propriétés mécaniques ; ils peuvent donc être définis et mesurés, comme les quantités mécaniques elles-mêmes, en fonction des trois unités fondamentales de longueur, de temps et de masse.

Un système de mesures fondé sur ce genre de coordination est appelé *absolu*, le mot absolu étant employé par opposition au mot *relatif*, qui caractériserait un système de mesures où les unités des différentes grandeurs seraient indépendantes les unes des autres.

413. Dimensions d'une unité dérivée. — Soient n l'expression numérique d'une quantité, c'est-à-dire le nombre d'unités qu'elle renferme, et A la grandeur de l'unité de comparaison; si l'on donne à cette unité une valeur différente A′, la grandeur sera mesurée par un autre nombre n' et l'on aura

$$nA = n'A' \quad \text{ou} \quad \frac{n'}{n} = \frac{A}{A'}.$$

Il résulte de cette relation évidente que *le rapport des valeurs numériques d'une grandeur est égal au rapport inverse des unités qui lui ont servi de mesure.*

Quand l'unité est dérivée, elle varie par suite d'un changement dans les unités fondamentales; pour connaître le rapport des valeurs correspondantes A et A′, il faut savoir de quelle manière l'unité dérivée dépend des unités fondamentales, en d'autres termes quelles sont ses *dimensions* en fonction des unités fondamentales.

Nous représenterons par les symboles [L], [M], et [T] les unités fondamentales de longueur, de masse et de temps, et par un symbole analogue $[x]$ la grandeur d'une unité dérivée. Ainsi, les dimensions de l'unité de surface seront représentées par $[L^2]$ et celles de l'unité de volume par $[L^3]$; cela signifie que l'unité de surface varie comme le carré, et l'unité de volume comme le cube de l'unité de longueur.

Plus généralement, si les dimensions d'une unité dérivée sont exprimées par le symbole $[L^pM^qT^r]$, c'est-à-dire si elle est respectivement proportionnelle aux puissances p, q et r des unités fondamentales de longueur, de masse et de temps, et qu'on prenne successivement, pour ces dernières, des valeurs L, M, T et L′, M′, T′, le rapport des valeurs A′ et A de l'unité dérivée dans le second et le premier système sera

$$\frac{A'}{A} = \frac{L'^pM'^qT'^r}{L^pM^qT^r} = \left(\frac{L'}{L}\right)^p\left(\frac{M'}{M}\right)^q\left(\frac{T'}{T}\right)^r.$$

414. Unités dérivées mécaniques. — Les principales grandeurs dérivées en mécanique sont la *vitesse*, l'*accélération*, la *force*, le *travail* ou l'*énergie* et la *puissance*.

Vitesse. — La vitesse est le chemin parcouru par un mobile dans l'unité de temps ou, plus généralement, la limite du

rapport de l'accroissement d'espace parcouru à la variation de temps correspondante; c'est le quotient d'une longueur par un temps. Les dimensions de l'unité sont donc $[LT^{-1}]$.

Accélération. — L'accélération est le rapport de l'accroissement de la vitesse à l'accroissement du temps; par suite, le quotient d'une vitesse par un temps, ce qui donne, pour les dimensions de l'unité $[LT^{-2}]$.

Force. — Comme la force est le produit d'une masse par une accélération, les dimensions de l'unité sont $[LMT^{-2}]$.

Travail, Énergie. — Le travail ou l'énergie W est le produit d'une force par une longueur; c'est aussi la valeur du moment d'un couple. La force vive, qui est une quantité de même espèce que le travail, est le produit d'une masse par le carré d'une vitesse. Dans les deux cas, les dimensions de l'unité sont $[L^2MT^{-2}]$.

Puissance. — La puissance d'une machine régulière est le travail qu'elle produit pendant l'unité de temps; c'est le quotient d'un travail par un temps. Les dimensions de l'unité de puissance sont $[L^2MT^{-3}]$.

L'unité de force est celle qui, agissant sur l'unité de masse, lui communique pendant l'unité de temps une accélération égale à l'unité.

L'unité de travail est le travail produit par l'unité de force, quand son point d'application se déplace de l'unité de longueur dans sa propre direction.

415. Unités dérivées électriques et magnétiques. — Les grandeurs électriques les plus importantes sont la *quantité d'électricité*, le *champ électrique*, le *potentiel* ou la *force électromotrice*, la *capacité*, l'*intensité du courant*, la *résistance*, etc. On aura, de même, pour les grandeurs magnétiques, la *quantité de magnétisme*, le *champ magnétique*, la *puissance magnétique d'un feuillet*, etc. Toutes ces grandeurs sont reliées entre elles par les relations qui les définissent; si l'une est donnée, toutes les autres s'en déduisent.

Pour constituer un système absolu, il faut que la quantité qui sert de point de départ puisse être évaluée directement en unités mécaniques. On peut ainsi rapporter les mesures aux unités *électrostatiques*, *électromagnétiques* ou *électrody-*

namiques, suivant le choix de la formule primitive. De là, trois *systèmes* de mesures absolues, indépendants et incompatibles, dans lesquels les diverses unités sont liées d'une manière différente aux unités fondamentales.

Il n'y a aucune raison théorique pour préférer l'un de ces systèmes aux autres; deux cependant ont une plus grande importance pratique, ce sont les systèmes électrostatique et électromagnétique. Les unités du système électrodynamique ne diffèrent d'ailleurs que par un facteur numérique des unités électromagnétiques correspondantes, et elles se présentent d'une manière moins simple dans les applications; nous considérerons seulement les deux premières.

416. Unités électrostatiques. — *Quantité d'électricité* $[q]$. — D'après la loi de Coulomb, la répulsion ou la force mécanique f qui s'exerce entre deux masses électriques égales à q, séparées par la distance d, donne

$$f = \frac{q^2}{d}, \quad \text{ou} \quad q = d\sqrt{f}.$$

On en déduit, pour les dimensions de l'unité d'électricité,

$$[q] = [d]\,[f^{\frac{1}{2}}] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Densité superficielle. Déplacement électrique $[\sigma]$. — La densité est la quantité d'électricité par unité de surface (**13**); le déplacement aussi est la quantité d'électricité qui a traversé l'unité de surface (**98**); on aura donc

$$[\sigma] = [q]\,[L^{-2}] = [L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Champ électrique $[h]$. — L'intensité h d'un champ électrique est l'action qu'il exerce sur l'unité d'électricité, ou le quotient d'une force mécanique par une quantité d'électricité, ce qui donne, pour les dimensions de l'unité,

$$[h] = [f]\,[q^{-1}] = [L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}];$$

elles sont les mêmes que celles de la densité, comme on pouvait le prévoir par le théorème de Coulomb (**31**).

Le *flux de force électrique* est le produit de l'intensité du champ par une surface ; il en résulte que les dimensions de l'unité de flux de force sont les mêmes que celles d'une masse électrique, c'est-à-dire $[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$.

Pouvoir inducteur spécifique. — Dans le cas actuel, le pouvoir inducteur spécifique est un nombre.

Force électromotrice ou *potentiel électrostatique* $[e]$. — Le potentiel d'une masse électrique à une distance d est le quotient de la masse par cette distance ; on a donc

$$[e]=[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}].$$

Un potentiel est la racine carrée d'une force mécanique.

Capacité électrostatique $[c]$. La capacité d'un condensateur est le quotient de sa charge par la différence de potentiel des armatures, et l'on a

$$c=\frac{q}{e}, \qquad [c]=[L].$$

La capacité électrostatique est donc une longueur, comme on l'a déjà vu (50).

Intensité du courant $[i]$. — L'intensité d'un courant est la quantité d'électricité qui traverse la section d'un fil dans l'unité de temps, ou le quotient d'une quantité q par un temps t ; on a ainsi

$$i=\frac{q}{t}, \qquad [i]=[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}].$$

Résistance $[r]$. — La résistance d'un conducteur, définie par la loi d'Ohm, est le quotient de la force électromotrice entre deux points par l'intensité du courant, ce qui donne

$$r=\frac{e}{i}, \qquad [r]=[L^{-1}T].$$

La résistance électrostatique est donc l'inverse d'une vitesse, comme nous l'avons déjà démontré (**154**).

La *résistivité* est la résistance d'un conducteur pour l'unité de longueur et l'unité de section. La résistivité d'une sub-

stance est donc le produit d'une résistance par une longueur; ses dimensions sont simplement [T].

Quantité de magnétisme $[m]$. — La quantité de magnétisme sera définie par la condition que l'action mécanique f d'un pôle magnétique de masse m sur une portion de courant d'intensité i et de longueur l très petite, située à la distance d du pôle et dans une direction perpendiculaire à la droite qui joint son milieu au pôle, soit exprimée par la loi de Laplace (**316**)

$$f = \frac{ilm}{d^2}, \quad \text{ou} \quad m = \frac{fd^2}{il};$$

on en déduit

$$[m] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}].$$

Le *moment magnétique* étant le produit d'une masse magnétique par une longueur, les dimensions de l'unité seraient alors $[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$.

Densité magnétique. — La densité magnétique superficielle est la quantité de magnétisme par unité de surface; l'unité de densité a pour dimensions $[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$.

Champ magnétique. — L'intensité du champ magnétique est l'action qu'il exerce sur l'unité de masse magnétique; les dimensions de l'unité de champ sont

$$[f]\,[m^{-1}] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}].$$

Potentiel magnétique. — Le travail d'un champ magnétique sur la masse magnétique m qui se déplace entre deux points est le produit de cette masse par la différence des potentiels aux deux points; le potentiel magnétique est donc le quotient d'une énergie par une masse magnétique; les dimensions de l'unité de potentiel sont

$$[W]\,[m^{-1}] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}].$$

Puissance magnétique. — La puissance magnétique d'un feuillet est le produit de la densité superficielle par l'épaisseur du feuillet; les dimensions de l'unité sont alors $[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$.

417. Unités électromagnétiques. — Dans le système de mesures électromagnétiques, la quantité de magnétisme est définie comme l'était précédemment la quantité d'électricité ; les dimensions des unités de masse magnétique, de densité superficielle, de champ et de potentiel, sont les mêmes que pour les grandeurs électriques correspondantes en mesures électrostatiques.

Puissance magnétique. Intensité du courant. — La puissance magnétique d'un feuillet étant le produit de la densité superficielle par l'épaisseur, on a

$$[U] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Dans le système électromagnétique, les dimensions de l'unité de puissance magnétique sont les mêmes que celles du potentiel magnétique, résultat qui était évident (**246**). On voit aussi que la puissance magnétique d'un feuillet est la racine carrée d'une force mécanique.

L'intensité du courant I a la même valeur que la puissance magnétique d'un feuillet (**321**).

Quantité d'électricité. — La quantité d'électricité étant le produit d'une intensité de courant par un temps, les dimensions de l'unité nouvelle [Q] sont

$$[Q] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}].$$

Ces dimensions sont les mêmes que celles de la quantité de magnétisme en unités électrostatiques ; par conséquent, dans le système électromagnétique, la *densité superficielle*, le *champ* et le *potentiel* ou *force électromotrice* [E] auront les mêmes dimensions que les quantités magnétiques correspondantes dans le système électrostatique. On aura, en particulier, pour la force électromotrice,

$$[E] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}].$$

Pouvoir inducteur spécifique [K]. — Le pouvoir inducteur spécifique (**98**) est en raison inverse du coefficient d'élas-

ticité électrique du milieu, c'est-à-dire proportionnel au rapport du déplacement à la valeur du champ, ce qui donne

$$[K]=[L^{-2}T^{2}].$$

Le pouvoir inducteur spécifique, en unités électromagnétiques, est l'inverse du carré d'une vitesse.

Résistance [R]. — La résistance d'un conducteur est le quotient de la force électromotrice par l'intensité du courant; les dimensions de l'unité de résistance sont

$$[R]=[LT^{-1}].$$

La résistance d'un conducteur en unités électromagnétiques est donc une vitesse. Dans ce cas, la *résistivité* a pour dimensions $[L^2 T^{-1}]$.

Capacité [C]. — La capacité est le rapport de la charge électrique Q d'un condensateur à la différence de potentiel des deux armatures; on a alors

$$C=\frac{Q}{E}, \quad \text{ou} \quad [C]=[L^{-1}T^{2}].$$

418. Dimensions des principales unités. — On déterminerait de la même manière les dimensions des autres grandeurs que nous n'avons pas examinées. Nous résumerons dans les tableaux suivants les résultats relatifs aux plus importantes.

UNITÉS FONDAMENTALES

Longueur	$[L]$,
Masse	$[M]$,
Temps	$[T]$,

UNITÉS DÉRIVÉES MÉCANIQUES

Vitesse	$[LT^{-1}]$,
Accélération	$[LT^{-2}]$,
Force	$[LMT^{-2}]$,
Énergie	$[L^2MT^{-2}]$,
Puissance	$[L^2MT^{-3}]$.

UNITÉS DÉRIVÉES ÉLECTRIQUES

	Système électrostatique.	Système électromagnétique.
Quantité d'électricité	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$
Densité électrique superficielle..	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$
Champ électrique	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$
Flux de force électrique	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$
Pouvoir inducteur spécifique....	1	$[L^{-2} T^{2}]$
Potentiel électrostatique	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$
Capacité électrostatique	$[L]$	$[L^{-1} T^{2}]$
Intensité de courant	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Résistance	$[L^{-1} T]$	$[L T^{-1}]$
Résistivité	$[T]$	$[L^{2} T^{-1}]$

UNITÉS DÉRIVÉES MAGNÉTIQUES

Quantité de magnétisme	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Densité superficielle	$[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Champ magnétique	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Flux de force magnétique	$[L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Potentiel magnétique	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Puissance magnétique	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Moment magnétique	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Intensité d'aimantation	$[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Coefficient d'aimantation .... / Perméabilité magnétique.........	$[L^{-2} T^{2}]$	1
Coefficients d'induction	$[L^{-1} T^{2}]$	$[L]$

419. Relations entre les deux espèces d'unités. — Pour établir les relations qui existent entre les unités correspondantes des deux systèmes, il suffit de comparer leurs dimensions respectives. On y arrive plus directement en égalant les valeurs d'une même grandeur mécanique estimée par les deux méthodes. Une quantité déterminée d'énergie W, par exemple, s'exprimera par la chaleur que fournit un courant, par la décharge d'une capacité à force électromotrice constante, par l'énergie relative MI^2 de deux courants égaux, par le travail HQx que subit une masse électrique Q parcourant le chemin x dans la direction d'un champ H, etc. On aura ainsi, en représentant par des majuscules les mesures en unités électromagnétiques et par les mêmes lettres minuscules les mesures en unités électrostatiques,

$$(1)\quad \begin{cases} W = I^2Rt = EIt = EQ = E^2C = MI^2 = HQx = \ldots\ldots, \\ W = i^2rt = eit = eq = e^2c = mi^2 = hqx = \ldots\ldots; \end{cases}$$

il en résulte

$$(2)\qquad 1 = \frac{I^2R}{i^2r} = \frac{EI}{ei} = \frac{EQ}{eq} = \frac{E^2C}{e^2c} = \frac{MI^2}{mi^2} = \frac{HQ}{hq} = \ldots\ldots$$

On a donc, en désignant par $\mathbf{v}$ une constante,

$$(3)\qquad \mathbf{v}^2 = \frac{R}{r} = \frac{i^2}{I^2} = \frac{E^2}{e^2} = \frac{q^2}{Q^2} = \frac{c}{C} = \frac{M}{m} = \frac{H^2}{h^2} = \ldots\ldots$$

Les rapports inverses existent entre les unités correspondantes, ce qui donne, en particulier,

$$(4)\qquad \mathbf{v} = \frac{[Q]}{[q]}.$$

La constante $\mathbf{v}$ désigne ainsi le nombre d'unités électrostatiques d'électricité $[q]$ qui existent dans une unité d'électricité $[Q]$ en mesures électromagnétiques.

De même, si Q est la charge électrique de l'élément de surface dS d'un conducteur, le déplacement électrique (**98**)

correspondant est $4\pi Q = KHdS$, ce qui donne aussi, dans les deux systèmes,

$$\frac{Q}{q} = \frac{KH}{kh}, \quad \frac{K}{k} = \frac{Q}{q} \cdot \frac{h}{H} = \frac{1}{\mathbf{v}^2}.$$

Dans un système déterminé, le potentiel électrostatique en un point P, évalué par la somme des quotients des masses par les distances, est proportionnel à la masse q et peut s'écrire $e = Aq = \mathbf{v}AQ$. Le même potentiel en unités électromagnétiques est $E = \mathbf{v}e = \mathbf{v}^2AQ$, c'est-à-dire le produit par $\mathbf{v}^2$ de la somme des quotients des rapports des masses électromagnétiques aux distances correspondantes.

Puisque la résistance électromagnétique R est une vitesse et la résistance électrostatique r l'inverse d'une vitesse, le rapport de la première à la seconde est le carré d'une vitesse; la constante $\mathbf{v}$ est donc elle-même une vitesse.

Un grand nombre d'expériences ont été faites pour déterminer la valeur de cette constante. Il se présente évidemment autant de méthodes qu'il y a de quantités pouvant être mesurées à la fois directement en unités électrostatiques et en unités électromagnétiques. Tous les résultats obtenus sont voisins du nombre qui exprime la vitesse de la lumière dans le vide, et semblent s'en rapprocher d'autant plus que la précision des mesures s'améliore davantage. Il est naturel d'en conclure qu'une coïncidence aussi extraordinaire ne peut être fortuite et que l'égalité des deux nombres obtenus par l'expérience tient à une corrélation dans la nature des phénomènes. La vitesse de la lumière est très approximativement de 300 000 kilomètres par seconde. C'est ce nombre que nous adopterons pour la valeur du rapport $\mathbf{v}$, en l'exprimant en fonction de la longueur qui aura été choisie comme unité fondamentale.

420. Système C. G. S. — Sur la proposition de Lord Kelvin, l'*Association Britannique* a choisi comme unités fondamentales le *centimètre*, la *masse du gramme* et la *seconde* sexagésimale de temps moyen. Ces unités ont été adoptées définitivement pour les mesures électriques et magnétiques, par le Congrès international des Électriciens réuni à Paris en 1881;

elles tendent à se généraliser pour l'expression des autres quantités physiques.

Il est convenu que les mesures rapportées à ce système sont désignées, en cas de doute, par le symbole C. G. S., sans qu'il soit nécessaire d'attribuer un nom spécial aux unités dérivées correspondantes; la pratique paraît cependant avoir consacré deux exceptions : pour la *dyne*, ou l'unité de force, et pour l'*erg*, ou l'unité de travail (17).

Dans le système C. G. S., la valeur de la constante **v** est $300\,000.10^5$ ou 3.10^{10}.

Lorsque les grandeurs que l'on évalue sont très grandes ou très petites par rapport aux unités correspondantes, on abrège l'écriture en les exprimant ainsi par un nombre simple, renfermant tous les chiffres que comporte l'approximation des expériences, sauf à le multiplier par une puissance convenable de 10, positive ou négative. Dans le système C. G. S., la force électromotrice d'un couple Daniell, par exemple, vaut environ $\frac{1}{300}$ ou $\frac{1}{3}\,10^{-2}$ en unités électrostatiques, et 10^8 en unités électromagnétiques. De même, la résistance d'un fil de cuivre d'un millimètre de diamètre et d'un mètre de longueur est voisine de $\frac{2}{3}\cdot 10^{-13}$ en unités électrostatiques et de 2.10^7 en unités électromagnétiques.

421. Sytème pratique. — Dans les recherches purement scientifiques, il est à peu près indifférent de rapporter les mesures aux unités électrostatiques ou aux unités électromagnétiques ; le choix entre les deux systèmes dépend beaucoup de la nature des phénomènes observés et, quel que soit l'ordre de grandeur des quantités, l'emploi des puissances dé 10 ne laisse aucun inconvénient sérieux.

Il n'en est pas de même pour les applications pratiques de l'électricité, devenues si importantes dans l'industrie. L'usage courant exige alors que les grandeurs soient évaluées par des nombres faciles à concevoir et même que l'unité de chaque espèce ait un nom particulier, afin de traduire les mesures par des expressions plus concrètes. Ce sont ces motifs qui ont conduit le Comité de l'Association Britannique, institué en 1861 pour l'établissement d'un système rationnel de me-

sures électriques, à choisir des unités plus conformes aux nécessités de la pratique et à faciliter leur extension en donnant aux principales des noms spéciaux, empruntés aux illustrations de la science.

Les résolutions primitives de l'Association Britannique ont subi quelques modifications au Congrès de Paris en 1881; elles ont été ensuite complétées par le Congrès de Paris en 1889 et par la Chambre des Délégués de Chicago en 1893.

Les Électriciens sont maintenant unanimes pour adopter les définitions suivantes des *unités pratiques*, basées sur les mesures en unités électromagnétiques :

1° L'unité de résistance s'appelle *Ohm;* un ohm vaut 10^9 unités C. G. S.

2° Le *Volt* est l'unité de force électromotrice ou de différence de potentiel ; un volt vaut 10^8 unités C. G. S.

3° L'*Ampère* est l'unité de courant ; c'est l'intensité du courant produit par la force électromotrice d'un volt dans un circuit dont la résistance est un ohm ; l'ampère vaut 10^{-1} ou un dixième d'unité C. G. S.

4° Le *Coulomb* est l'unité d'électricité ; c'est la quantité d'électricité que débite le courant d'un ampère pendant une seconde ; le coulomb vaut également 10^{-1} d'unité C. G. S.

5° Le *Farad* est l'unité de capacité ; c'est la capacité d'un condensateur dont les armatures prennent une différence de potentiel d'un volt quand la charge est d'un coulomb ; le farad vaut 10^{-9} d'unité C. G. S.

6° Le *Joule* est l'unité de travail ; c'est l'énergie calorifique dégagée dans un conducteur dont les extrémités présentent la différence de potentiel d'un volt pendant le passage d'un coulomb, ou encore celle qui correspond au passage d'un ampère dans un ohm pendant une seconde ; le *Joule* vaut 10^7 unités C. G. S. de travail ou 10^7 ergs.

7° Le *Watt* est l'unité de puissance ; c'est la puissance d'un électromoteur capable de produire un joule par seconde ; le watt vaut aussi 10^7 unités de puissance C. G. S.

8° Le *Henry* est l'unité de coefficient d'induction ; c'est le coefficient d'induction mutuelle de deux circuits tels que si le courant dans le premier varie d'un ampère par seconde, et que la résistance du second soit d'un ohm, la force électro-

motrice induite dans ce dernier sera constante et égale à un volt ; un Henry vaut 10^9 centimètres, c'est-à-dire 10^7 mètres ou le quart du méridien terrestre.

Lorsque les quantités à mesurer sont d'un ordre de grandeur très grand ou très petit par rapport aux unités, on emploie des unités nouvelles qui sont des multiples ou des sous-multiples par un million de l'unité pratique correspondante, et on les distingue par le préfixe *mega* ou *micro*.

Ainsi le *megohm* vaut 10^6 ohms et le *microhm* 10^{-6} ohm. De même, le millionième de farad, ou *microfarad*, vaut 10^{-6} farad, c'est-à-dire 10^{-15} unités électromagnétiques C. G. S.

Le microfarad est en réalité l'unité pratique, parce que le farad est beaucoup trop grand. Ainsi, la capacité électrostatique de la Terre est égale à son rayon *a* ; sa capacité électromagnétique C est le quotient du rayon par le carré de **v**, ce qui donne

$$\frac{a}{3^2.10^{20}} = \frac{2.10^9}{\pi} \cdot \frac{1}{3^2.10^{20}} = 708.10^{-15},$$

c'est-à-dire 708 microfarads. Ce résultat fait prévoir que la capacité des condensateurs réalisables, quel que soit le mode de construction, doit s'exprimer par un petit nombre et même par des fractions de microfarads.

Comme toutes les unités pratiques sont dérivées de l'*ohm* et du *volt* et que la *seconde* a été conservée comme unité de temps, ces unités constituent un système cohérent et le choix de deux d'entre elles équivaut à la détermination des deux autres unités mécaniques fondamentales, c'est-à-dire celles de longueur et de masse. On vérifie aisément que le système pratique correspond aux unités fondamentales :

$[L] = 10^9$ centimètres ou le quart du méridien,
$[M] = 10^{-11}$ de la masse du gramme,
$[T] =$ une seconde.

Une autre remarque utile à signaler est que le Joule vaut $\frac{1}{9,81} = 0,102$ kilogrammètres ; la valeur d'un travail en kilo-

grammètres est donc sensiblement le dixième de sa valeur exprimée en joules.

Il en est de même pour le watt. Un électromoteur d'un kilowatt est capable de produire mille watts par seconde ou 102 kilogrammètres ; le watt vaut donc 1,37 cheval-vapeur de 75 kilogrammètres. En d'autres termes, un cheval-vapeur équivaut à 736 watts.

Toutefois, ces définitions présentent encore un caractère théorique et il est nécessaire dans les applications d'avoir des étalons matériels ou des moyens pratiques simples qui permettent de comparer les mesures aux unités.

Le comité de l'Association Britannique avait institué des expériences pour déterminer les dimensions d'un corps facile à reproduire, dont la résistance fût un ohm, et le mode de construction d'un couple à force électromotrice constante qui fût dans un rapport connu avec le volt.

Pour la résistance, les premières recherches indiquaient que l'ohm est représenté sensiblement par une colonne de mercure à la température de la glace fondante, ayant un millimètre carré de section et 104 centimètres de longueur.

Cette longueur ayant été reconnue trop faible, la Commission Internationale réunie à Paris en 1884, sur la proposition du congrès de 1881, adoptait à titre provisoire la longueur de 106 centimètres. Les nombreuses déterminations faites depuis cette époque ont démontré que la valeur $106^c,30$ est exacte avec une erreur moindre que 2 unités sur le cinquième chiffre. En outre, la mesure de la section d'un tube ne peut se faire que par le poids de mercure qu'il renferme, de sorte que la définition exige encore la connaissance d'une quantité intermédiaire qui est la densité du mercure.

Afin d'éviter toute confusion, la Chambre des Délégués de Chicago, confirmant une proposition faite par l'Association Britannique dans sa session d'Édimbourg en 1892, définit l'ohm par la masse du mercure que renferme une colonne de 106,3 centimètres de longueur et de section uniforme.

Si l'on y ajoute la définition matérielle d'une seconde unité qui n'ait pas les mêmes dimensions que la première au point de vue de la masse et de la longueur, le système sera complet; il équivaut alors au choix de deux unités principales de

longueur et de masse, lesquelles ne seront plus exactement 10^9 centimètres et 10^{-11} de la masse du gramme.

Les valeurs ainsi choisies n'étant pas conformes, en toute rigueur, aux définitions théoriques, on les distinguera par le nom d'*unités internationales*.

L'*ohm international* est la résistance électromagnétique d'une colonne de mercure, à la température de la glace fondante, de section constante et de $106^c,3$ de longueur, renfermant 14,4521 grammes de mercure.

L'*ampère international* est représenté d'une manière suffisamment exacte par l'intensité du courant uniforme qui dépose 0,001118 gramme d'argent par seconde dans une solution aqueuse de nitrate d'argent ([1]).

Le *volt international* est sensiblement les $\frac{1000}{1434}$ de la force électromotrice que présente à la température de 15° centigrades, un couple Latimer-Clark (zinc, sulfate de zinc, sulfate de mercure et mercure) construit dans des conditions bien spécifiées.

Si l'on conserve comme unité de temps la seconde sexagésimale de temps moyen et qu'on accepte comme points de départ les valeurs internationales de l'ohm et de l'ampère, toutes les autres grandeurs s'en déduisent et les unités fondamentales sont définies.

Dans ce cas, les indications données pour le volt international sont un simple renseignement pratique.

422. Comparaison des différents systèmes. — La manière la plus simple de rendre comparatives des mesures faites dans deux systèmes différents est de déterminer dans chaque cas les valeurs des unités fondamentales de longueur, de masse et de temps, et, pour chaque espèce de grandeur, d'évaluer le rapport des unités par leurs dimensions (**413**).

Des expériences faites avec le gramme comme unité de poids, par exemple, supposent que l'on a pris comme unité la masse de g grammes ou de 981 grammes.

([1]) La liqueur est neutre et renferme 15 grammes de nitrate pour 85 grammes d'eau. La cathode est une lame courbée de platine. Si le courant est voisin d'un ampère, l'anode est une plaque d'argent pur, de 30 centimètres carrés de surface environ, de 2 à 3 millimètres d'épaisseur, plongée horizontalement dans le liquide.

En outre, comme les unités de Gauss, millimètre et masse du milligramme, ont été employées dans les recherches de magnétisme terrestre, il est commode de réunir dans un Tableau quelques valeurs exprimées en unités électromagnétiques C. G. S., qui rendront les réductions plus faciles.

VALEURS EN UNITÉS C. G. S.

UNITÉS FONDAMENTALES.	SYSTÈME PRATIQUE.		SYSTÈME DE GAUSS.	MESURES EN POIDS.
Longueur	10^9 centimètres		Millimètre	Centimètre
Masse	10^{-11} gramme		Milligramme	g grammes
Temps	Seconde		Seconde	Seconde
UNITÉS DÉRIVÉES.				
Force		10^{-2}	10^{-4}	g
Travail	Joule	10^7	10^{-5}	g
Résistance	Ohm	10^9	10^{-1}	1
Force électromotrice	Volt	10^8	10^{-3}	$\sqrt{g}$
Courant	Ampère	10^{-1}	10^{-2}	$\sqrt{g}$
Capacité	Farad	10^{-9}	10	1
Champ magnétique		10^{-10}	10^{-1}	$\sqrt{g}$

Ainsi, l'intensité du champ magnétique, dans les expériences de Gauss, étant rapportée au millimètre et à la masse du milligramme, l'unité de champ est 10 fois moindre. Il suffira donc de diviser par 10 les résultats obtenus avec ce mode de calcul, ou de les multiplier par 10^{-1}, pour obtenir les valeurs correspondantes en unités C. G. S.

423. Conception physique de la vitesse v. — On peut donner une représentation physique de la vitesse qui exprime le rapport des unités d'électricité dans les deux systèmes.

Supposons, par exemple, qu'un condensateur de capacité a, c'est-à-dire équivalent à une sphère isolée de rayon a, étant chargé de manière que la différence de potentiel des armatures en mesures électrostatiques soit égale à l'unité, on le décharge par un conducteur, en répétant la même opération n fois

pendant le temps t ; l'intensité moyenne du courant en unités électrostatiques sera $\frac{na}{t}$. Si l'on détermine n de manière que l'intensité de ce courant soit égale à l'unité électromagnétique, l'expression $\frac{na}{t}$ représentera le nombre d'unités électrostatiques d'électricité qui existent dans une unité électromagnétique, et cette grandeur est manifestement une vitesse.

Maxwell indique un autre mode de représentation, fondé sur l'hypothèse que l'action extérieure d'une masse électrique en mouvement équivaut à celle d'un courant.

Considérons un plan recouvert d'une charge uniforme de densité électrostatique σ, et se déplaçant d'un mouvement uniforme suivant sa propre surface avec une vitesse u.

Chaque bande de largeur égale à l'unité et parallèle à la direction du mouvement est l'équivalent d'un courant dont l'intensité est σu en mesures électrostatiques et $\mathbf{v}$ fois moindre en mesures électromagnétiques. Supposons qu'un second plan de densité σ', parallèle au premier et à une distance a, se meuve de la même manière et dans la même direction avec une vitesse u'. Deux espèces d'actions vont se produire entre ces plans : une répulsion électrostatique, en vertu de leurs charges de même signe, et une attraction électrodynamique due aux courants parallèles et de même sens.

Prenons dans le second plan une bande de longueur l et de largeur infiniment petite b, et dans le premier plan une bande parallèle indéfinie de largeur dx, située à une distance x de la projection de la bande bl. L'action électromagnétique exercée par cette bande indéfinie sur la première, située à la distance $\sqrt{a^2+x^2}$, a pour valeur (342).

$$2\frac{\sigma u}{\mathbf{v}}dx\frac{\sigma' u'}{\mathbf{v}}b\frac{l}{\sqrt{a^2+x^2}} = 2\frac{\sigma\sigma' u u'}{\mathbf{v}^2}bl\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

et sa composante df suivant la normale aux plans est

$$df = 2\frac{\sigma\sigma' u u'}{\mathbf{v}^2}bl\frac{a\,dx}{a^2+x^2}.$$

Pour avoir l'action totale du premier plan mobile sur la

portion considérée bl du second, il faut intégrer cette expression depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = +\infty$, ce qui donne

$$f = 2\frac{\sigma\sigma' uu'}{\mathrm{v}^2} bl \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\,dx}{a^2 + x^2} = 2\frac{\sigma\sigma' uu'}{\mathrm{v}^2} bl \left[\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\delta}\right]_{\infty}^{+\infty},$$

$$f = 2\pi \frac{\sigma\sigma' uu'}{\mathrm{v}^2} bl.$$

D'autre part, la charge électrostatique de cette surface est $bl\sigma'$. Comme l'action du premier plan indéfini sur l'unité de masse est égale à $2\pi\sigma$, la répulsion exercée sur cette surface est normale et a pour valeur $2\pi\sigma\sigma' bl$.

Si ces deux actions sont égales, il en sera de même pour toutes les autres portions du second plan, et l'équilibre existera entre eux. Il faut, pour cela, qu'on ait $uu' = \mathrm{v}^2$, ou, si les vitesses u et u' sont égales, $u = \mathrm{v}$.

La constante v est donc la vitesse qu'il faudrait donner à deux plans parallèles indéfinis, uniformément électrisés et se mouvant dans la même direction, pour que leur attraction électrodynamique soit égale à leur répulsion électrostatique. Il est clair que cette expérience est irréalisable.

Pour évaluer l'ordre de grandeur des effets qu'on peut obtenir, remarquons qu'une bande indéfinie de largeur b et de densité σ mobile dans sa direction avec une vitesse u équivaut à un courant dont l'intensité électromagnétique est $\frac{u\sigma}{\mathrm{v}} b$. Si on la suppose placée à la distance e d'une autre bande semblable, et qu'on charge le condensateur ainsi formé à un potentiel électrostatique V, on aura $\sigma = \frac{V}{4\pi e}$.

Or, on peut obtenir avec les machines électriques des potentiels équivalents à 100 000 couples Daniell, c'est-à-dire environ 10^5 volts ou $10^5.10^8$ unités C. G. S. Avec de pareilles machines, on aura donc, en unités électrostatiques,

$$V = \frac{10^5.10^8}{\mathrm{v}} = \frac{10^{13}}{3.10^{10}} = 333,$$

ce qui donne sensiblement $\sigma = \frac{30}{e}$.

Si l'on suppose $b = 10$ et $e = 1$, l'intensité électromagnétique du courant sera

$$I = \frac{u.300}{3.10^{10}} = \frac{u}{10^8} \text{ en unités C. G. S.}$$

Comme un volt dans un circuit de n ohms donne un courant d'intensité $\frac{1}{10n}$, on voit que la vitesse qu'il faudra donner à la bande, pour obtenir le même courant, sera

$$u = \frac{10^7}{n} = \frac{100\,000}{n} \text{ mètres.}$$

Il faut remarquer que le courant I, produit par le mouvement d'un corps électrisé, est beaucoup plus difficile à constater que celui d'un couple électrique ordinaire, parce qu'il faudra le faire agir directement sur l'aiguille et sans effet de multiplication.

M. Rowland (1) a vérifié, par expérience, que la rotation d'un disque électrisé produit un effet sensible sur une aiguille aimantée, et que l'action est de l'ordre qui serait indiqué par les considérations qui précèdent.

(1) Rowland, *Berichte der Berliner Acad.*, 1876, p. 211.

CHAPITRE SEPTIÈME

THÉORIES GÉNÉRALES

DIVERSES HYPOTHÈSES

424. Idées d'Ampère. — Pour établir l'expression élementaire des actions électrodynamiques, Ampère s'est appuyé seulement sur l'hypothèse des forces centrales et sur certains faits d'expérience, sans faire intervenir aucune vue particulière sur la nature même des courants électriques. Toutefois, dès l'année 1822, il « cherchait à rendre raison de la « force qui a lieu entre deux éléments de fils conducteurs « par la réaction du fluide répandu dans l'espace et dont les « vibrations produisent les phénomènes de la lumière. » Ampère indique encore une autre manière de concevoir les phénomènes : « Quand on suppose que les molécules électri- « ques, mises en mouvement dans les fils conducteurs par « l'action de la pile, y changent continuellement de lieu, s'y « réunissent à chaque instant en un fluide neutre, se séparent « de nouveau, et vont aussitôt se réunir à d'autres molécules « du fluide de nature opposée, il n'est plus contradictoire « d'admettre que des actions en raison inverse des carrés des « distances qu'exerce chaque molécule, il puisse résulter « entre deux éléments de fils conducteurs une force qui dé- « pende non seulement de leur distance, mais encore des « directions des deux éléments suivant lesquels les molécules « électriques se meuvent, se réunissent à des molécules de « l'espèce opposée, et s'en séparent l'instant suivant pour « aller s'unir à d'autres. » (*Mémoires de l'Institut* pour 1823,

p. 294 et 299). Ampère n'a pas poursuivi le développement de ces idées; il ne pensait pas que le moment fût encore venu de le faire utilement.

425. Transformations de la formule d'Ampère. — Sur les circuits C et C′ (fig. 103) que suivent deux courants, considérons deux éléments ds et ds' situés au points P et P′ à la distance r; cette distance r, évaluée suivant la direction PP′,

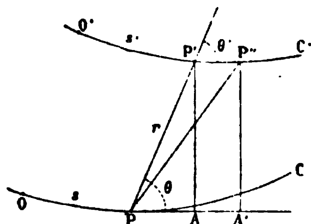


Fig. 103.

est une fonction des arcs s et s' des deux courbes, comptés respectivement à partir de points fixes O et O′, et l'on a

$$\cos\theta = -\frac{\partial r}{\partial s}, \qquad \cos\theta' = \frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Si l'on projette l'arc $P'P'' = ds'$ en AA′ sur la tangente à la courbe C au point P, en appelant ε l'angle des deux éléments ds et ds', la figure donne

$$PA = r\cos\theta,$$

$$AA' = \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial s'}ds' = ds'\cos\varepsilon;$$

$$\cos\varepsilon = \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial s'} = -\frac{\partial}{\partial s'}\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right) = -\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}.$$

Par substitution de ces valeurs, la formule d'Ampère (**333**), en considérant l'action comme répulsive, devient

$$(3) \qquad \psi = 2II'\frac{ds\,ds'}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right).$$

On a d'ailleurs

$$\frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} - \frac{1}{4r\sqrt{r}}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} = \frac{1}{2r\sqrt{r}}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right),$$

et l'on peut écrire aussi

$$(4) \qquad \psi = 4\mathrm{II}'\frac{ds\,ds'}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}.$$

426. Formules de Gauss et de Weber. — Si l'on fait intervenir les actions réciproques des masses électriques qui circulent dans les conducteurs, il est nécessaire que l'action de deux masses électriques q et q' soit une fonction, non seulement de leur distance r, mais aussi de leur mouvement relatif, et le problème ainsi posé paraît indéterminé. Une des hypothèses consiste à admettre que cette action, tout en restant dirigée suivant la droite qui les joint, et proportionnelle au produit des masses et en raison inverse du carré de la distance, comprend un terme proportionnel à une puissance de la vitesse relative u des deux masses et un autre terme proportionnel à une puissance de leur vitesse relative $\frac{dr}{dt}$ parallèlement à leur distance. Ces puissances doivent être paires, si l'on veut que l'action ne soit pas modifiée quand on change à la fois le sens des deux mouvements, comme pour les courants eux-mêmes, et on satisfait au problème en les prenant égales à 2, ce qui donne la loi élémentaire

$$(5) \qquad f = \frac{qq'}{r^2}\left[1 + \alpha u^2 + \beta\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

Weber a examiné d'abord les cas simples de deux éléments situés sur le prolongement l'un de l'autre ou perpendiculaires à une même droite. Dans le premier cas, il faut admettre que l'action de deux masses renferme un terme qui dépend de leur vitesse relative, et il a supposé que ce terme était proportionnel au carré de la vitesse. Le second cas conduisit Weber à faire intervenir l'accélération suivant la même droite; l'hypothèse la plus simple était alors d'admettre que

ce nouveau terme est proportionnel à l'accélération, ce qui donne une autre loi

$$(6) \qquad f = \frac{qq'}{r^2}\left[1 + \alpha'\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \beta'\frac{d^2 r}{dt^2}\right].$$

427. Détermination des constantes. — La comparaison des résultats ainsi obtenus avec la formule d'Ampère permettra de déterminer les coefficients α, β, α' et β' qui entrent dans ces deux expressions (5) et (6).

Supposons d'abord que les circuits C et C' (fig. 103) soient parcourus respectivement par des mobiles avec des vitesses constantes v et v' qui se trouvent, à la même époque t, aux points P et P'; on a

$$u^2 = v^2 - 2vv'\cos\varepsilon + v'^2,$$

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad \text{et} \qquad v' = \frac{ds'}{dt}.$$

Il en résulte

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial r}{\partial s'}\frac{ds'}{dt} = v\frac{\partial r}{\partial s} + v'\frac{\partial r}{\partial s'},$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = v^2\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} + 2vv'\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} + v'^2\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2}.$$

Admettons maintenant que l'élément ds contient une charge électrique composée de deux parties q et q_1, animées respectivement des vitesses v et v_1, et que la charge de l'élément ds' renferme également deux parties q' et q'_1 avec les vitesses v et v'. Si on évalue les quatre actions des masses q et q_1 sur les masses q' et q'_1 par les formules (5) ou (6), la résultante devra reproduire la loi d'Ampère (3) et, par suite, ne comprendre que des termes renfermant les produits des vitesses.

On voit aisément que les carrés des vitesses entrent dans des termes qui ont pour facteurs

$$(qv^2 + q_1 v_1^2)(q' + q'_1) \qquad \text{et} \qquad (q'v'^2 + q'_1 v_1'^2)(q + q_1).$$

Pour que ces termes s'annulent, il faut qu'on ait

$$(7)\qquad qv^2+q_1v_1^2=0, \quad \text{ou} \quad q'+q'_1=0.$$

Ces deux conditions sont réalisées à la fois, si l'on admet, avec Weber, qu'un courant électrique d'intensité I est formé de deux courants d'électricités contraires, marchant avec la même vitesse v en sens opposés, et ayant chacun une intensité moitié moindre. Il est même nécessaire d'admettre que la somme algébrique des masses électriques qui existent dans chaque élément de courant pour l'état permanent est nulle, si l'on veut satisfaire à la condition (**151**) que la densité dans le conducteur soit nulle; mais, sans rien préciser sur le rapport des masses électriques de signes contraires, il suffirait que la somme $qv^2+q_1v_1^2$ fût nulle dans chaque élément, c'est-à-dire qu'il s'y trouvât des masses électriques de signes contraires ayant la même force vive.

La quantité d'électricité qui traverse la section du premier conducteur pendant l'unité de temps est $mv+m_1v_1$; si l'on désigne encore par $\mathbf{v}$ le nombre d'unités électrostatiques que renferme l'unité électromagnétique, on a

$$(8)\qquad \begin{aligned} qv+q_1v_1 &= \mathbf{v}\,\mathrm{I}\,ds, \\ q'v'+q'_1v'_1 &= \mathbf{v}\,\mathrm{I}'\,ds'. \end{aligned}$$

En admettant l'existence de courants égaux et opposés, ces équations deviendraient

$$(9)\qquad \begin{aligned} 2qv &= \mathbf{v}\,\mathrm{I}\,ds, \\ 2q'v' &= \mathbf{v}\,\mathrm{I}'\,ds'. \end{aligned}$$

Quand on évalue l'action des masses q et q_1, sur les masses q' et q'_1, les termes qui dépendent du produit des vitesses sont, avec la première formule (5),

$$\frac{2}{r^2}\left(\beta\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}-\alpha\cos\varepsilon\right)(qv+q_1v_1)(q'v'+q'_1v'_1),$$

c'est-à-dire

$$2\mathrm{I}\mathrm{I}'\frac{ds\,ds'}{r^2}\mathbf{v}^2\left[(\beta+\alpha\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}+\alpha r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right].$$

Avec la formule (6) de Weber, ces termes deviennent

$$2\frac{(qv+q_1v_1)(q'v'+q'_1v'_1)}{r^2}\left[\alpha'\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}+\beta'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right],$$

expression qui équivaut à la suivante :

$$2\mathrm{II}'\frac{ds\,ds'}{r^2}\mathbf{v}^2\left(\beta'\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}+\alpha'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right).$$

Quant au terme indépendant du mouvement relatif, il est dans les deux cas égal à $\frac{(q+q_1)(q'+q'_1)}{r^2}$. Ce terme doit être nul si le conducteur est parcouru par deux courants égaux et de sens contraires; sinon, il représenterait une action électrostatique entre les conducteurs, phénomène que l'expérience n'a pas constaté jusqu'à présent.

Pour satisfaire à la loi d'Ampère, il faut donc qu'on ait, dans le premier cas,

$$\mathbf{v}^2\alpha = 1, \qquad \mathbf{v}^2\beta = -\frac{3}{2},$$

et, dans le second,

$$\mathbf{v}^2\beta' = r, \qquad \mathbf{v}^2\alpha' = -\frac{1}{2}.$$

Les expressions (5) et (6), qui donnent l'action élémentaire de deux masses électriques, deviennent alors

$$(5)' \qquad f=\frac{qq'}{r^2}\left[1+\frac{u^2}{\mathbf{v}^2}-\frac{3}{2\mathbf{v}^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right],$$

$$(6)' \quad f=\frac{qq'}{r^2\mathbf{v}^2}\left[\mathbf{v}^2-\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r\frac{d^2r}{dt^2}\right]=\frac{qq'}{\mathbf{v}^2}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{r^2}+\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}\right).$$

La première expression (5)', trouvée dans les manuscrits de Gauss, est incompatible avec le principe de la conservation de l'énergie, car elle conduirait à cette conséquence qu'un système physique limité peut produire une quantité d'énergie indéfiniment croissante.

La formule de Weber, au contraire, est compatible avec ce principe. En effet, l'expression de la force (6)′ peut être considérée comme la dérivée par rapport à r, prise en signe contraire, de la fonction

$$U = \frac{qq'}{r}\left[1 + \frac{1}{2v^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

Le travail produit par la répulsion d'une masse fixe sur une masse mobile est égal à la différence $U_0 - U_1$ des valeurs de la fonction U relative à ces deux masses pour la position initiale et la position finale. La fonction U peut ainsi être considérée comme représentant l'énergie potentielle du système des deux masses. Cette fonction ne dépend que de la distance des masses considérées et de leur vitesse relative suivant la direction de la droite r; elle reprend la même valeur lorsque l'une des masses décrit par rapport à l'autre un chemin fermé avec les mêmes vitesses initiale et finale.

428. Énergie relative de deux courants. — L'énergie potentielle relative de deux courants fermés peut se déduire de la formule de Weber. En effet, si on remplace la dérivée $\frac{dr}{dt}$ par sa valeur en fonction des vitesses des masses électriques, on trouve que le potentiel d'un des éléments sur l'autre se réduit à l'expression $-II'ds\,ds'\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial s}\,\frac{\partial r}{\partial s'}$. L'énergie potentielle des deux circuits est donc

$$W = -II'\iint \frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial s}\,\frac{\partial r}{\partial s'}\,ds\,ds' = II'\iint \frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds'.$$

C'est la valeur donnée par Neumann (**328**).

Lorsque les courants sont constants et parcourent des circuits de forme invariable, la résultante des actions exercées par l'un des courants sur une masse quelconque q' de l'autre est normale à sa trajectoire.

429. Phénomènes d'induction. — Puisque l'induction est une conséquence de la loi d'Ampère et du principe de la conservation de l'énergie, la formule de Weber, qui satisfait

également à ces deux conditions, doit donner les courants induits dans les conducteurs fixes.

Supposons maintenant que les circuits se déplacent et que les intensités soient variables. La distance r, au lieu d'être fonction seulement de deux variables indépendantes s et s', est en outre variable avec le temps. Pour une valeur donnée de t, la valeur de r représente la distance de deux éléments du circuit; si l'on considère s et s' comme des fonctions de t, la valeur de r représente la distance de deux masses électriques en mouvement sur les conducteurs mobiles. Quant aux vitesses v et v', si le conducteur a une section constante, elles ne dépendent point de s et de s', en tant que variables indépendantes, puisque à chaque instant l'intensité est la même en tous les points du circuit. On aura donc, pour la vitesse relative des deux masses,

$$\frac{\partial r}{\partial t} = v\frac{\partial r}{\partial s} + v'\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial r}{\partial t}.$$

En considérant les dérivées $\frac{\partial r}{\partial s}$ et $\frac{\partial r}{\partial s'}$ comme des fonctions de s et s' seulement, l'accélération relative sera

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = v^2\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} + 2vv'\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} + v'^2\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial v'}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s'} + v\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s}$$
$$+ v'\frac{\partial v'}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}.$$

La vitesse $\frac{dr}{dt}$ et l'accélération $\frac{d^2 r}{dt^2}$ se rapportent aux masses électriques, tandis que les termes $\frac{\partial r}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$ du second membre correspondent aux distances de deux éléments.

L'action mécanique de ds sur ds' s'obtiendra, comme plus haut, en faisant la *somme* des actions que les masses de l'élément ds exercent sur celles de l'élément ds'. Avec la formule et l'hypothèse de Weber, on reconnaît aisément qu'il ne reste dans cette somme, comme précédemment, que les termes en vv', et avec les coefficients déjà trouvés. Il en résulte que,

dans l'état variable, l'action mécanique est à chaque instant conforme à celle que donnerait la formule d'Ampère.

La force électromotrice qui agit sur l'élément ds' tend à séparer les masses égales et de signes contraires contenues dans cet élément, et à les entraîner en sens opposés. On en obtiendra la valeur en prenant la *différence* des actions exercées dans la direction de l'élément ds', sur chacune des masses qu'il contient, par les deux masses de l'élément ds.

Or, quand on fait la somme des actions des deux masses $+q$ et $-q$ de l'élément ds sur l'une des masses q' de l'élément ds', les termes qui subsistent sont ceux qui ont en facteur v, vv' ou $\frac{dv}{dt}$, lesquels changent de signe en même temps que q. Parmi ces derniers, les seuls qui resteront dans la différence finale sont ceux qui changent de signe avec la vitesse v, quel que soit d'ailleurs le signe de v'. Ces termes se réduisent à deux, l'un $2v\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial t}$ provenant de $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$, l'autre $\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s}$ qui provient de $\frac{d^2 r}{dt^2}$.

La différence ainsi calculée est égale à

$$\frac{4qq'}{\mathrm{v}^2 r^2}\left[r\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s} - v\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial t}\right] = \frac{1}{r^2}\left[r\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s} - \mathrm{I}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial t}\right] ds\,ds',$$

en tenant compte des équations (8) et supposant l'intensité égale à l'unité dans l'élément ds'.

On doit maintenant prendre la composante de cette action suivant la direction de ds' et, par suite, multiplier l'expression précédente par $\frac{\partial r}{\partial s'}$; en remarquant que l'on a

$$r\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial t} - \mathrm{I}\frac{\partial r}{\partial t} = r^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathrm{I}}{r}\right),$$

la force électromotrice élémentaire devient

$$d^2 e = \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathrm{I}}{r}\right) ds\,ds'.$$

La force électromotrice totale produite dans le circuit s' par le circuit s s'obtiendra en intégrant cette expression par rapport à s et à s'. Comme l'intensité I est seulement une fonction du temps, et que les limites de l'intégrale sont elles-mêmes indépendantes du temps, on peut écrire

$$(10)\quad e = \frac{d}{dt} \mathrm{I} \iint \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'}\, ds\, ds' = -\frac{d}{dt} \mathrm{I} \iint \frac{\cos\theta \cos\theta'}{r}\, ds\, ds'.$$

La transformation utilisée déja (**328**) donne enfin

$$(11)\qquad e = -\frac{d}{dt} \mathrm{I} \iint \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds' = -\frac{d}{dt}(M\mathrm{I}).$$

C'est l'expression générale (**373**) de la force électromotrice produite dans un circuit par un courant extérieur. Sans y insister d'avantage, on voit aisément que la même formule donnerait aussi tous les autres cas d'induction.

430. Propagation des forces. — De nombreuses tentatives ont été faites, à l'exemple de Weber, pour réunir dans une même théorie les phénomènes de l'électricité statique, les courants permanents et les effets d'induction, et pour établir un lien entre l'électricité, le magnétisme et la lumière.

Gauss a émis l'opinion que les actions électriques ne sont pas instantanées et qu'on doit trouver la clef des phénomènes électrodynamiques si l'on peut établir la loi de propagation des forces électriques.

Différents mathématiciens ont traité le problème dans cet ordre d'idées. On peut expliquer, par exemple, les phénomènes d'induction en admettant que le potentiel électrique se propage dans le milieu avec une certaine vitesse, qui serait la vitesse même de la lumière, d'après B. Riemann, ou d'un ordre tout différent, suivant la théorie de C. Neumann.

M. Betti assimile l'action des courants à celle d'un système d'aimants élémentaires, tangents en chaque point au contour des circuits et polarisés périodiquement en sens contraires, et il considère la force magnétique comme transmise dans le milieu avec une certaine vitesse.

M. Lorenz a montré, de son côté, qu'en ajoutant aux équa-

ons données par Kirchhoff sur les courants électriques des termes convenablement choisis, qui n'altèrent aucune conséquence expérimentale, on obtient une nouvelle série d'équations, qui indiquent une action de proche en proche entre les éléments du milieu, et un phénomène d'ondulation se propageant avec la vitesse de la lumière. Il arrive ainsi à des résultats tout à fait semblables à ceux que Maxwell a déduits d'une théorie entièrement différente.

Dans le même ordre d'idées, Edlund a essayé d'expliquer les phénomènes électriques, tant statiques que dynamiques, à l'aide d'un seul fluide qui, selon toute probabilité, ne serait autre chose que l'éther.

Edlund admet que tous les corps à l'état neutre renferment une quantité normale d'éther, et qu'une électrisation, positive ou négative, correspond à une dose d'éther supérieure ou inférieure à la charge normale. Un corps électrisé dans un espace neutre ne subira aucune action, par raison de symétrie, quelle que soit sa charge électrique. On en déduit facilement que l'action de deux corps électrisés est proportionnelle à l'excès de leurs charges respectives sur les charges normales. C'est l'hypothèse d'un fluide unique (**12**).

Un courant électrique n'est alors qu'un transport d'éther dans un sens déterminé ; si l'on admet ensuite que l'action des deux masses dépend de leur vitesse et de leur accélération relative suivant la droite qui les joint, on arrive, par une marche analogue à celle de Weber, et en déterminant certains coefficients par l'identification des formules avec les résultats de l'expérience, à rendre compte des lois d'Ampère et des phénomènes d'induction.

Toutes ces vues impliquent l'existence d'un milieu intermédiaire ; car, si un effet mécanique quelconque, force ou potentiel, se transmet avec une vitesse finie d'une particule à une autre, il est nécessaire qu'un milieu de structure convenable en ait été le siège pendant que cet effet a quitté la première particule sans atteindre la seconde. C'est dans l'intervention directe du milieu que Maxwell a cherché l'explication des phénomènes.

PROPRIÉTÉS DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

431. Théorie de Maxwell. — La coïncidence remarquable des nombres qui expriment, d'une part, la vitesse de propagation de la lumière dans le vide et, d'autre part, le rapport des unités d'électricité, suivant qu'on évalue les masses électriques par les actions électrodynamiques ou les actions électrostatiques, paraît avoir été le point de départ des travaux de Maxwell sur la recherche d'une théorie capable de comprendre l'ensemble des phénomènes électriques et magnétiques, en les rattachant aux phénomènes lumineux.

La considération du flux total d'induction magnétique dans un circuit suffit pour rendre compte des courants induits dans les conducteurs linéaires, mais ce sont là des conditions trop particulières. Il est nécessaire d'envisager le problème d'une manière plus générale, qui permettra d'interpréter la production de courants induits dans les conducteurs de forme quelconque et de mettre en relief l'intervention du milieu. Nous suivrons le mode d'exposition de Maxwell.

432. Équations du champ magnétique. — Lorsque le système ne comprend que des milieux magnétiques isotropes, et que l'aimantation reste proportionnelle à la force magnétisante, les composantes du champ en un point étant X, Y et Z, les composantes de l'induction sont μX, μY et μZ, le facteur μ désignant la perméabilité magnétique du milieu au point considéré.

Le flux d'induction φ qui traverse une surface S, limitée au contour C, est indépendant de la forme de la surface et peut encore s'exprimer par la ligne intégrale, étendue au contour, d'un vecteur (F, G, H) que nous appellerons *potentiel vecteur*. On peut donc écrire

$$\varphi = \int_S \mu(X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy) = \int_C (F\,dx + G\,dy + H\,dz);$$

on sait que les composantes F, G et H du potentiel vecteur

sont liées aux composantes du champ magnétique, en vertu du théorème de Stokes (29), par les relations

$$
\text{(A)} \quad \left\{ \begin{aligned} \mu X &= \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \mu Y &= \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}, \\ \mu Z &= \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}. \end{aligned} \right.
$$

Il en résulte d'abord

$$
\frac{\partial(\mu X)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu Z)}{\partial z} = 0,
$$

c'est-à-dire que l'induction magnétique satisfait à la condition de continuité, comme dans l'état permanent.

Si le milieu ne renferme que des corps pour lesquels la perméabilité μ est constante, on déduit aussi des équations (A), en posant

$$
\Theta = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z},
$$

$$
(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \Delta F, \\ \mu\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) &= \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \Delta G, \\ \mu\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) &= \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Delta H. \end{aligned} \right.
$$

On peut d'ailleurs faire $\Theta = 0$, quand il s'agit de milieux isotropes, c'est-à-dire astreindre le potentiel vecteur (F, G, H) à la condition de continuité.

433. Champ électrique. — La force électromotrice totale dans le circuit a pour expression

$$
E = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int (F dx + G dy + H dz).
$$

Les composantes de cette force électromotrice par unité de longueur sont respectivement $-\frac{\partial F}{\partial t}$, $-\frac{\partial G}{\partial t}$ et $-\frac{\partial H}{\partial t}$; elles re-

présentent les accroissements de potentiel électrique que les phénomènes d'induction produisent dans le milieu, par unité de longueur parallèle aux axes de coordonnées.

S'il existe, en outre, des masses électrisées isolées et invariables donnant un potentiel ψ, évalué en unités convenables, les composantes P, Q, R de la force électromotrice, ou du champ électrique, doivent s'écrire :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} P &= -\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ Q &= -\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ R &= -\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

Les derniers termes, étant des différentielles exactes, disparaissent quand on applique les formules à un circuit fermé ; ils sont d'ailleurs indépendants du temps.

On en déduit, d'après la définition de Θ,

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \Delta\psi.$$

Si l'on suppose encore $\Theta = 0$, il en résulte que le champ électrique satisfait à la loi de continuité, au moins tant qu'on reste en dehors des masses électriques.

La comparaison des équations (A) et (2) donne encore

$$\mu \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}$$

et, en appliquant la même règle aux autres composantes, par permutation des lettres,

$$(B) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mu \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \\ \mu \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \mu \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned} \right.$$

434. Équations des courants. — Supposons maintenant que le courant soit distribué dans toute l'étendue d'un milieu, et désignons par u, v, w ses composantes en un point, c'est-à-dire les quantités d'électricité qui traversent, par unité de temps, l'unité de surface perpendiculaire à chacun des axes.

Le travail d'un courant I sur l'unité de magnétisme mobile le long d'une courbe fermée qui entoure le courant est $4\pi I$ pour chaque révolution complète (**322**).

Si l'on applique cette propriété, comme dans le mode de raisonnement employé pour établir le théorème de Stokes (**29**), à la masse qui suivrait le contour du circuit rectangulaire $dy\,dz$, au travers duquel le courant est $u\,dy\,dz$, et qu'on évalue le même travail au moyen des forces magnétiques Y et Z, qui remplacent ici les composantes G et H, on obtient

$$4\pi u = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

La même règle donne encore, par permutation, en tenant compte des équations (1),

$$\text{(C)}\quad \left\{\begin{aligned} 4\pi u &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} - \Delta F\right),\\ 4\pi v &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} - \Delta G\right),\\ 4\pi w &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Delta H\right).\end{aligned}\right.$$

On voit par là que les courants satisfont aussi à la condition de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

L'accroissement de la densité cubique ρ d'électricité libre en un point étant le flux qui entre dans l'unité de volume par unité de temps, on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

il résulte de la condition de continuité des courants que cette quantité ρ est constante.

Si l'on fait $\Theta = 0$, on voit aussi que les quantités F, G et H sont respectivement les potentiels de masses attirantes fictives dont les densités respectives seraient μu, μv et μw.

On déduit encore des équations (2) et (C), en négligeant les fonctions Θ et ψ,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta P &= -\frac{\partial}{\partial t}\Delta F = 4\pi\mu\frac{\partial u}{\partial t},\\ \Delta Q &= -\frac{\partial}{\partial t}\Delta G = 4\pi\mu\frac{\partial v}{\partial t},\\ \Delta R &= -\frac{\partial}{\partial t}\Delta H = 4\pi\mu\frac{\partial w}{\partial t}.\end{aligned}\right.$$

435. Énergie potentielle des courants. — Considérons différents circuits C_1, C_2, C_3 ....., parcourus par des courants I_1, I_2, I_3 .....; soient L_1, L_2, L_3 ...., leurs coefficients de self-induction, $M_{1.2}, M_{1.3}, M_{2.3}$, ..., leurs coefficients d'induction mutuelle, avec la condition générale $M_{p.q} = M_{q.p}$.

Les flux d'induction qui traversent ces différents circuits sont de la forme

$$\varphi_1 = L_1 I_1 + M_{2.1} I_2 + M_{3.1} I_3 + \cdots,$$
$$\varphi_2 = L_2 I_2 + M_{1.2} I_1 + M_{3.2} I_3 + \cdots, \quad \text{etc.}$$

L'énergie potentielle de l'ensemble des courants est (327), en supposant que les circuits restent immobiles,

$$W = \frac{1}{2}(\varphi_1 I_1 + \varphi_2 I_2 + \cdots\cdots) = \frac{1}{2}\Sigma\varphi I,$$

ou, en remplaçant les flux φ par leurs valeurs en fonction du potentiel vecteur,

$$W = \frac{1}{2}\Sigma\int\left(F I \frac{dx}{ds} + G I \frac{dy}{ds} + H I \frac{dz}{ds}\right)ds.$$

Si l'on désigne par σ la section de l'élément ds du circuit que parcourt le courant I, la composante parallèle à l'axe des x du courant par unité de section est $\frac{I}{\sigma}\frac{dx}{ds} = u$; on remplacera donc $I\frac{dx}{ds}ds$ par $u\sigma ds$, et de même pour les autres termes.

Comme le produit ϖds représente un élément de volume du milieu, on peut écrire

$$W = \frac{1}{2}\Sigma\int (Fu + Gv + Hw)\varpi ds = \frac{1}{2}\int (Fu + Gv + Hw)\,dx\,dy\,dz.$$

L'énergie totale du système s'obtiendra en étendant cette intégrale à tous les éléments intéressés, c'est-à-dire au volume compris dans l'intérieur d'une surface S très éloignée.

Remplaçant les composantes u, v, w du courant par leurs valeurs (C), on a

$$4\pi(Fu + Gv + Hw) = F\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + G\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + H\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right).$$

L'intégrale de cette expression peut être transformée par un raisonnement analogue à celui qui a servi dans divers cas. L'intégration par parties donne, par exemple,

$$\iiint F\frac{\partial Y}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint FY\,dx\,dy - \iiint Y\frac{\partial F}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

Le premier terme du second nombre et tous les termes analogues, relatifs à la surface S, sont nuls; en effet, le champ magnétique tend à devenir en raison inverse du cube et la surface S proportionnelle au carré de la distance. En répétant la même opération sur tous les termes, on obtient

$$W = \frac{1}{8\pi}\iiint \left[X\left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}\right) + \cdots\cdots\right] dx\,dy\,dz,$$

ou, en tenant compte des équations (A),

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mu F^2\,dx\,dy\,dz.$$

L'énergie potentielle du système de courants s'exprime ainsi, soit par une intégrale qui renferme les courants eux mêmes, soit par une intégrale relative à toutes les parties de l'espace où existent des forces magnétiques.

Dans le premier cas, l'action réciproque des courants est

considérée comme s'exerçant à distance; dans le second cas, elle résulterait de l'élasticité du milieu. Si l'on adopte cette dernière conception du phénomène, on voit que l'énergie potentielle des courants par unité de volume est

$$\frac{\mu}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)=\frac{1}{8\pi\mu}(\mu^2X^2+\mu^2Y^2+\mu^2Z^2).$$

C'est l'expression déjà trouvée (269) pour l'énergie par unité de volume dans un milieu magnétique en fonction du champ ou de l'induction magnétique.

436. Mouvement et déformations des circuits. — Les formules (2) correspondent au cas où le circuit reste immobile; le champ électrique (P, Q, R) ne dépend alors que des seules variations du champ magnétique et des masses isolées, s'il en existe. Mais lorsque, le champ étant variable, les circuits se déplacent ou se déforment, les coordonnées x, y et z de chaque élément doivent aussi être considérées comme des fonctions du temps; dans ce cas, l'expression du flux d'induction s'écrira :

$$\varphi=\int\left(F\frac{\partial x}{\partial s}+G\frac{\partial y}{\partial s}+H\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds.$$

La force électromotrice d'induction E à un instant donné devient alors

$$(4)\qquad -E=\frac{d\varphi}{dt}=\int\left[\frac{\partial x}{\partial s}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\right)+\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}+F\frac{\partial^2 x}{\partial s\,\partial t}\right]ds+\ldots..,$$

le dernier membre de cette équation devant renfermer deux autres séries de termes semblables aux premiers, que l'on obtiendra simplement par la permutation des lettres.

Il est facile de voir que l'ensemble U des termes qui ont pour facteur commun $\frac{\partial x}{\partial t}ds$ est

$$U=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial s},$$

ou, en tenant compte des équations (A),

$$U = \mu Y \frac{\partial z}{\partial s} - \mu Z \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s},$$

$$U = \mu\left(Y\frac{\partial z}{\partial s} - Z\frac{\partial y}{\partial s}\right) + \frac{\partial F}{\partial s}.$$

Une permutation des lettres donnera de la même manière les facteurs de $\frac{\partial y}{\partial t}\,ds$ et $\frac{\partial z}{\partial t}\,ds$.

On obtient, d'autre part, en combinant le terme $\frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}\,ds$, qui provient de cette valeur de U, avec le dernier terme écrit dans la formule (4),

$$\int\left(\frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} + F\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t}\right)ds = \int\frac{\partial}{\partial s}\left(F\frac{\partial x}{\partial t}\right)ds = \left[F\frac{\partial x}{\partial t}\right],$$

et les groupes analogues disparaissent quand on étend l'intégrale à un circuit fermé.

Le facteur de ds sous le signe $\int$ de l'équation (4) se compose donc de trois parties :

$$\mu\left(Y\frac{\partial z}{\partial s} - Z\frac{\partial y}{\partial s}\right)\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s},$$

$$\mu\left(Z\frac{\partial x}{\partial s} - X\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s},$$

$$\mu\left(X\frac{\partial y}{\partial s} - Y\frac{\partial x}{\partial s}\right)\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Finalement, la force électromotrice peut s'écrire, en groupant les termes qui ont $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$ ou $\frac{\partial z}{\partial s}$ en facteur,

$$E = \int\left[\mu\left(Y\frac{\partial z}{\partial t} - Z\frac{\partial y}{\partial t}\right) - \frac{\partial F}{\partial t}\right]\frac{\partial x}{\partial s}\,ds + \ldots\ldots$$

Chacune des trois expressions semblables qui forment le

second membre représente la force électromotrice totale relative aux projections du circuit sur les axes de coordonnées, et le facteur de $\frac{\partial x}{\partial s} ds$ est, en chaque point, la force électromotrice par unité de longueur parallèlement à l'axe des x.

Les expressions (2) des composantes du champ électrique devront donc, dans le cas général, être remplacées par les suivantes :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= \mu\left(Y\frac{\partial z}{\partial t} - Z\frac{\partial y}{\partial t}\right) - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ Q &= \mu\left(Z\frac{\partial x}{\partial t} - X\frac{\partial z}{\partial t}\right) - \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ R &= \mu\left(X\frac{\partial y}{\partial t} - Y\frac{\partial x}{\partial t}\right) - \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

437. Milieux conducteurs. — Lorsque les milieux sont conducteurs, les courants obéissent à la loi d'Ohm. En désignant par c la conductivité, on a donc

$$u = cP, \quad v = cQ, \quad w = cR.$$

Si les milieux sont immobiles, abstraction faite des fonctions Θ et ψ, les équations (2), (C) et (3) donnent alors

$$\Delta F = -4\pi\mu c P = 4\pi\mu c \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$\Delta P = 4\pi\mu \frac{\partial u}{\partial t} = 4\pi\mu c \frac{\partial P}{\partial t},$$

$$\Delta u = c\Delta P = 4\pi\mu c \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Dans ce cas, toutes les quantités F, G, H; P, Q, R; u, v, w, satisfont séparément à une même équation différentielle

$$(6) \quad \Delta\theta = 4\pi\mu c \frac{\partial \theta}{\partial t},$$

analogue à celle qui exprime la diffusion de la chaleur dans la théorie de Fourier. En effet, si l'on appelle k (47) la conductivité calorifique d'un milieu isotrope, et θ la température,

l'expression $k\Delta\theta$ représente le flux de chaleur qui pénètre par unité de temps dans l'unité de volume, et $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ est l'élévation correspondante de la température; il suffit alors de considérer le coefficient $4\pi\mu c k$ comme représentant la capacité calorifique du milieu par unité de volume.

Les propriétés électromagnétiques, une fois établies dans un milieu conducteur, éprouvent donc une diffusion analogue à celle de la chaleur; mais on doit remarquer que la conductivité calorifique k du milieu qui produirait la même diffusion est en raison inverse de c. La diffusion des effets électromagnétiques est donc en raison inverse de la conductivité électrique, de sorte qu'un milieu parfaitement conducteur opposerait un obstacle absolu à cette diffusion.

Considérons, par exemple, le cas d'un courant linéaire entouré d'un milieu conducteur. Au moment où l'on établit le courant principal, le courant induit dans le milieu qui l'entoure prend immédiatement la même intensité, en sens contraire, et l'action des deux courants sur un point éloigné est nulle; le régime ne s'établit qu'après l'extinction des courants induits due à la résistance du milieu. Mais, à mesure que le courant induit s'affaiblit, il produit autour de lui un courant de même sens, de sorte que l'espace occupé dans le milieu par le courant induit s'agrandit de plus en plus, à mesure que l'intensité diminue.

Si le courant principal est maintenu constant, les courants induits se diffusent graduellement; quand le régime permanent est atteint, les valeurs de ΔP, ΔQ et ΔR sont nulles dans tout le milieu et ne conservent de valeurs finies que dans la portion occupée par le circuit du courant.

438. Diélectriques. — On admettra, avec Maxwell, que tout courant est fermé et qu'il est complété, s'il y a lieu, par les variations du déplacement électrique (97).

Cette manière de concevoir les phénomènes paraît entièrement conforme aux expériences. On ne constate, en effet, aucune différence entre le champ magnétique d'un courant qui parcourt des conducteurs et celui de courants interrompus par des diélectriques. En particulier, leur action est appliquée directement aux masses magnétiques et ils ne produisent

aucun couple de rotation sur un aimant mobile autour de son axe magnétique.

Les courants ne pouvant être continus dans un diélectrique, il s'établit, à chaque instant, un équilibre entre la force électromotrice et les réactions d'élasticité développées par le déplacement électrique.

Pour les milieux isotropes on aura donc, en appelant f, g, h les composantes du déplacement électrique, et K le pouvoir inducteur spécifique en mesures électromagnétiques,

$$4\pi f = \mathrm{K}P, \quad 4\pi g = \mathrm{K}Q, \quad 4\pi h = \mathrm{K}R.$$

Le déplacement (f, g, h) satisfait également à la condition de continuité, avec les mêmes réserves que pour le champ électrique (**433**).

Les composantes du courant sont les dérivées respectives par rapport au temps de celles du déplacement; il en résulte

$$4\pi u = \mathrm{K}\frac{\partial P}{\partial t}, \quad 4\pi v = \mathrm{K}\frac{\partial Q}{\partial t}, \quad 4\pi w = \mathrm{K}\frac{\partial R}{\partial t}.$$

Lorsque les milieux sont immobiles et que le système ne renferme pas de masses électriques isolées, on a

$$\Delta F = -\mathrm{K}\mu\frac{\partial P}{\partial t} = \mathrm{K}\mu\frac{\partial^2 F}{\partial t^2},$$

$$\Delta P = -\frac{\partial}{\partial t}\Delta F = \mathrm{K}\mu\frac{\partial^2 P}{\partial t^2},$$

$$4\pi\Delta u = \mathrm{K}\frac{\partial}{\partial t}\Delta P = 4\pi\mathrm{K}\mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

On voit alors que toutes les composantes F, G, H; P, Q, R; u, v, w et f, g, h des différentes fonctions satisfont à la même équation différentielle

$$\Delta\theta = \mathrm{K}\mu\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}, \tag{7}$$

laquelle représente la loi de propagation des vibrations dans un milieu élastique.

439. Cas général. — Si le milieu jouit partiellement de propriétés conductives et de propriétés diélectriques, le courant se compose d'un flux réel d'électricité, correspondant aux phénomènes de conduction, et des variations du déplacement électrique; on aura alors, par les équations (C),

$$4\pi u = 4\pi c P + K \frac{\partial P}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} - \Delta F = 4\pi \mu u = \mu\left(4\pi c P + K \frac{\partial P}{\partial t}\right).$$

Si l'on remplace dans cette dernière équation P par sa valeur (2), en écrivant sous une forme symbolique les expressions analogues relatives aux trois coordonnées, on a

$$\text{(D)} \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta F - \frac{\partial \Theta}{\partial x} &= \mu\left(4\pi c + K \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right), \\ \Delta G - \frac{\partial \Theta}{\partial y} &= \mu\left(4\pi c + K \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right), \\ \Delta H - \frac{\partial \Theta}{\partial z} &= \mu\left(4\pi c + K \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\right). \end{aligned} \right.$$

Lorsqu'on ne tient pas compte des fonctions Θ et ψ, les composantes F, G, H du potentiel vecteur satisfont donc à l'équation générale

$$\text{(8)} \qquad \Delta \theta = \mu\left(4\pi c + K \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial \theta}{\partial t}.$$

La définition de la fonction Θ donne d'ailleurs

$$\Delta \Theta = \frac{\partial}{\partial x}\Delta F + \frac{\partial}{\partial y}\Delta G + \frac{\partial}{\partial z}\Delta H.$$

Si l'on prend les dérivées partielles des équations (D) par rapport aux coordonnées correspondantes et qu'on en fasse la somme, le premier membre est nul et il reste

$$\mu\left(4\pi c + K \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \Delta \psi\right) = 0.$$

Quand il s'agit de milieux diélectriques, la conductivité c

est nulle et la valeur de $\Delta\psi$, qui est proportionnelle à la densité des masses fixes, est indépendante du temps; dans ce cas, il reste simplement $\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2} = 0$, c'est-à-dire que Θ est une fonction linéaire du temps. Ces deux fonctions Θ et ψ ne joueront aucun rôle dans les phénomènes périodiques.

440. Vecteur radiant [1]. — L'énergie potentielle d'un milieu comprend l'énergie électromagnétique (**435**) et l'énergie électrostatique (**95**), ce qui donne, par unité de volume,

$$U_1 = \frac{\mu}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2) + \frac{K}{8\pi}(P^2+Q^2+R^2),$$

$$4\pi\frac{\partial U_1}{\partial t} = \mu\left(X\frac{\partial X}{\partial t} + \ldots\ldots\right) + K\left(P\frac{\partial P}{\partial t} + \ldots\ldots\right).$$

La dérivée partielle $\frac{\partial U_1}{\partial t}$ représente l'accroissement d'énergie potentielle pendant l'unité de temps. L'accroissement total de l'énergie accumulée $\frac{\partial W_1}{\partial t}$ comprend, en outre, l'énergie calorifique due aux courants de conduction. Dans l'élément de volume $dx\,dy\,dz$, le courant parallèle à l'axe des x est $cP\,dy\,dz$ et la résistance correspondante $\frac{dx}{c\,dy\,dz}$; l'énergie calorifique est donc $cP^2\,dx\,dy\,dz$, ce qui donne, pour les trois composantes, par unité de volume, la somme $c(P^2+Q^2+R^2)$. On a ainsi

$$4\pi\frac{\partial W_1}{\partial t} = \mu\left(X\frac{\partial X}{\partial t} + \ldots\ldots\right) + P\left(4\pi cP + K\frac{\partial P}{\partial t}\right) + \ldots\ldots$$

La dernière parenthèse étant égale à $4\pi u$, on déduit alors des équations (B) et (C)

$$4\pi\frac{\partial W_1}{\partial t} = X\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \ldots\ldots + P\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + \ldots\ldots$$

Pour obtenir l'accroissement de l'énergie totale W accumulée dans le volume limité par une surface arbitraire S, il

(1) J. H. Poynting, *Phil. Trans. L. R. S.*, Pt. II, p. 343; 1884.

faut multiplier cette équation par $dxdydz$ et l'intégrer dans toute l'étendue du volume.

L'ensemble des termes du second membre qui contiennent des dérivées partielles par rapport à x est

$$Z\frac{\partial Q}{\partial x} - Y\frac{\partial R}{\partial x} + Q\frac{\partial Z}{\partial x} - R\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(QZ - RY).$$

Cette expression devant être multipliée par $dx\,dy\,dz$, il en résulte que l'intégrale se réduit aux éléments de la surface S.

Si l'on désigne par α, β et γ les cosinus directeurs de la normale à l'élément dS, on a $dydz = \alpha d$S, et de même pour les autres coordonnées; par suite

$$4\pi\frac{\partial W}{\partial t} = \int\Big[\alpha(QZ - RY) + \beta(RX - PZ) + \gamma(PY - QX)\Big]dS,$$

ou, en posant

$$(9) \qquad \begin{cases} 4\pi\mathbf{a} = RY - QZ, \\ 4\pi\mathbf{b} = PZ - RX, \\ 4\pi\mathbf{c} = QX - PY, \end{cases}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\int(\mathbf{a}\alpha + \mathbf{b}\beta + \mathbf{c}\gamma)\,dS.$$

L'intégrale du second membre représente aussi le flux du vecteur ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$), dit *vecteur radiant*, qui sort de la surface S. Ce flux est donc la perte d'énergie du volume considéré pendant l'unité de temps.

Les équations (9) montrent que le vecteur radiant est perpendiculaire au champ électrique (P, Q, R), ainsi qu'au champ magnétique (X, Y, Z) et, par suite, perpendiculaire à leur plan, car elles donnent $\mathbf{a}X + \mathbf{b}Y + \mathbf{c}Z = 0$ et $\mathbf{a}P + \mathbf{b}Q + \mathbf{c}R = 0$.

En outre, chacune des composantes $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ est proportionnelle à la projection, sur le plan perpendiculaire, de l'aire du parallélogramme formé par ces deux champs. Le vecteur radiant est donc proportionnel à l'aire du parallélogramme formé par le champ électrique et le champ magnétique. Enfin, pour un observateur situé dans la direction du champ élec-

trique et regardant celle du champ magnétique, le vecteur radiant est dirigé vers la gauche (fig. 104).

441. Théorie de Hertz (1). — Pour faciliter la comparaison de différents mémoires sur cette question importante, nous ferons remarquer d'abord que Maxwell désigne par α, β, γ les composantes du champ magnétique, que nous avons continué de représenter par X, Y, Z; par a, b, c les composantes μX, μY, μZ de l'induction magnétique, et il appelle J la fonction que nous avons représentée par Θ. Les notations de Maxwell ont été conservées pour les autres grandeurs.

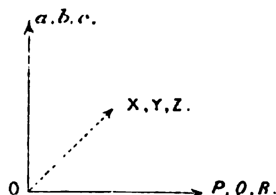


Fig. 104.

Hertz part d'un point de vue différent. Sans faire intervenir aucune hypothèse primordiale, il établit entre les phénomènes deux systèmes d'équations différentielles, dont l'exactitude sera simplement démontrée par la conformité de leurs conséquences avec tous les faits connus.

Appelant L, M, N les composantes du champ magnétique; X, Y, Z celles du champ électrique; u, v, w les composantes du courant de conduction, μ la perméabilité magnétique, A et ε des constantes déterminées par le choix de l'unité de force électrique, Hertz admet a priori les relations

$$(B)' \quad \begin{cases} A\mu \dfrac{\partial L}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z}, \\ A\mu \dfrac{\partial M}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x}, \\ A\mu \dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y}, \end{cases}$$

(1) Hertz, *Nachr. von d. Köning Gesel.*; mars, 1890. — *Wied ann.* t. XL, p. 577 et t. XLI, p. 369; 1890. — *Lumière électrique*, passim.

combinées avec les suivantes :

$$
(\mathrm{D})' \qquad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{A}\left(4\pi u + \varepsilon\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t}\right) &= \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y},\\
\mathrm{A}\left(4\pi v + \varepsilon\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial t}\right) &= \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y},\\
\mathrm{A}\left(4\pi w + \varepsilon\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial t}\right) &= \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on fait $\mathrm{A}=1$ et $\varepsilon=\mathrm{K}$, en tenant compte du changement de notations, il est facile de vérifier que les systèmes (B)′ et (D)′ deviennent respectivement identiques aux équations fondamentales (B) et (D) de Maxwell.

Sans aller plus loin, il est évident que les deux méthodes conduiront exactement aux mêmes résultats.

442. Ondes planes dans un diélectrique. — Lorsque les causes de perturbation sont localisées dans un volume restreint, les phénomènes se transportent dans le diélectrique comme des ondes, de forme d'abord plus ou moins complexe, lesquelles deviennent sphériques à une distance très grande par rapport aux dimensions de l'espace troublé directement. Ces ondes se propagent avec une vitesse qui dépend de la nature du milieu.

Si l'on prend le plan des xy parallèle au plan tangent à la surface d'onde en un point, toutes les fonctions au voisinage de ce point ne dépendent que des variables z et t. En faisant $\Theta=0$, les équations (A), (1) et (C) donnent alors

$$\mathrm{Z}=0, \qquad \Delta H=0 \qquad \text{et} \qquad w=0;$$

il en résulte, d'après la relation générale (7), en désignant par A et B deux fonctions de z,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}=0, \qquad H=\mathrm{A}+\mathrm{B}t.$$

On doit en conclure que la fonction H est nulle, car on ne peut admettre qu'elle soit en chaque point constante ou que ses variations soient proportionnelles au temps; par suite, abstraction faite de ψ, $R=0$, $h=0$.

Comme toutes les composantes Z, H, R, w, h, parallèles à la direction de propagation sont nulles, celles qui restent sont situées dans le plan de l'onde, ou *transversales*. Les composantes **a** et **b** du vecteur radiant étant aussi nulles, ce vecteur est parallèle à la propagation ; c'est dans cette direction que se transporte l'énergie. Il reste alors

$$(10)\qquad \begin{cases} \mu X = \dfrac{\partial G}{\partial z}, & \mu Y = -\dfrac{\partial F}{\partial z}; \\ \mu \dfrac{\partial X}{\partial t} = -\dfrac{\partial Q}{\partial z}, & \mu \dfrac{\partial Y}{\partial t} = \dfrac{\partial P}{\partial z}. \end{cases}$$

L'équation générale (7), à laquelle satisfont les différentes quantités F, G, P et Q, se réduit à

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = K\mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2},$$

dont la solution est de la forme

$$\theta = f_1(z\sqrt{K\mu} - t) + f_2(z\sqrt{K\mu} + t).$$

Les fonctions f_1 et f_2 représentent respectivement des ondes planes qui se propagent dans un sens ou dans l'autre avec une vitesse commune, car elles prennent la même valeur, à des époques différentes t et t', en deux points dont la distance $z' - z$ satisfait à la condition

$$t' - t = \pm (z' - z)\sqrt{K\mu}.$$

Il en résulte que les phénomènes électriques et magnétiques se propagent comme le son ou la lumière.

La vitesse de propagation V est uniquement définie par les propriétés du milieu et indépendante du choix des unités de mesure ; on comprend ainsi comment le rapport **v** des unités électrostatique et électromagnétique intervient dans la valeur de cette vitesse. D'après ce qui a été vu précédemment (**419**), on a donc

$$V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{k\mu}}.$$

Dans le vide, où $k=1$ et $\mu=1$, on a $V=\mathbf{v}$. La vitesse de propagation des perturbations électro-magnétiques est alors égale au rapport des unités.

443. Courants permanents. — Lorsqu'un régime de courants permanents est établi dans un système, toutes les dérivées par rapport au temps sont nulles. Au voisinage de la surface des conducteurs, les courants sont nécessairement parallèles à la surface. Si l'on prend l'origine des coordonnées sur un élément dS de cette surface, l'axe des x normal à l'élément et l'axe des z parallèle au courant, on a

$$u=0, \qquad v=0, \qquad w=cR,$$

c'est-à-dire que les composantes P et Q du champ électrique sont nulles dans le conducteur.

Ces conditions sont générales quand il s'agit de conducteurs cylindriques. Le courant est alors homogène ; la composante R est constante dans toute la section et les composantes du champ magnétique ne dépendent que des coordonnées x et y. Il résulte aussi des équations (C)

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial Z}{\partial x}=0, \quad 4\pi w=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Dans ce cas, la composante Z du champ magnétique parallèle au courant est constante, c'est-à-dire nulle si l'on ne tient pas compte des champs permanents extérieurs. Le champ magnétique est donc perpendiculaire au champ électrique.

La composante X est nulle à l'origine, par raison de symétrie, et la composante Y est dirigée vers la gauche des courants. La troisième équation donne

$$X=2\pi w y, \qquad Y=-Y_0-2\pi w x.$$

Le champ magnétique intérieur est tangent à la surface et perpendiculaire au courant,

Si l'on passe du conducteur au diélectrique par une couche de transition d'épaisseur très petite, les dérivées $\frac{\partial X}{\partial z}$ et $\frac{\partial Y}{\partial z}$ sont encore nulles.

Comme la composante Z est nulle dans le conducteur, elle est aussi nulle à l'extérieur, c'est-à-dire que le champ magnétique extérieur est perpendiculaire au courant.

En outre, la composante X extérieure est nulle, car aucun flux de force magnétique ne sort du conducteur. Le champ magnétique extérieur est tangent à la surface et perpendiculaire au courant, avec la valeur $-Y_0$.

Pour examiner le champ électrique extérieur, on remarquera également que, dans la couche de transition, les équations (B) se réduisent à

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

La composante R conserve la même valeur dans le diélectrique. D'autre part, la dérivée $\frac{\partial P}{\partial y}$ conserve une valeur finie, puisque les seules variations brusques ont lieu suivant la normale; la dérivée $\frac{\partial Q}{\partial x}$ est donc finie et la composante Q reste nulle à l'extérieur.

Le champ électrique extérieur se compose finalement d'une composante P normale au conducteur et d'une composante R parallèle au courant.

A la surface du conducteur, les composantes du vecteur radiant sont

$$4\pi \mathbf{a} = -RY_0, \qquad \mathbf{b} = 0, \qquad \mathbf{c} = 0.$$

Le vecteur radiant est donc normal à la surface et dirigé vers l'intérieur: il représente l'accroissement d'énergie calorifique dû au passage du courant.

Ces conclusions restent encore très sensiblement exactes lorsque la section des conducteurs n'éprouve que des variations lentes et continues.

444. Cylindres circulaires. — Lorsque le conducteur cylindrique a une section circulaire, le champ magnétique est en chaque point perpendiculaire au rayon vecteur (**317**). Comme il est nul sur l'axe, par raison de symétrie, sa valeur à la

distance r est $2\pi w r$. En appelant a le rayon du cylindre, le champ magnétique à la surface est

$$2\pi w a = 2\frac{\pi a^2 w}{a} = \frac{2I}{a} = F_0.$$

Dans le diélectrique, il reste simplement

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0,$$

et, si l'on prend l'origine des coordonnées sur l'axe,

$$X = 2I\frac{y}{r^2}, \quad Y = -2I\frac{x}{r^2}.$$

Le champ est encore normal au rayon vecteur et en raison inverse de la distance à l'axe, résultat conforme aux expériences de Biot et Savart.

Quelle que soit d'ailleurs la section du cylindre, si I est le courant total et s le contour de la section, le champ extérieur F est en chaque point parallèle au contour, et l'on a

$$4\pi I = \int F\,ds.$$

445. Conducteurs parfaits. — Imaginons qu'il existe des conducteurs dont la résistance soit nulle. Si le système ne renferme pas de forces électromotrices permanentes et que les courants proviennent uniquement des effets d'induction, l'équation générale

$$0 = RI + \frac{d}{dt}(LI + \varphi),$$

relative à l'action du flux φ d'induction magnétique dans un circuit dont la résistance est R et le coefficient de self-induction L, se réduit à $LI + \varphi = \text{const.}$ Le flux total d'induction magnétique dans le circuit est donc constant ; les variations du flux extérieur φ sont compensées à chaque instant par celles du flux que produit le courant. Comme un champ per-

manent ne produit aucun effet, on peut supposer $LI + \varphi = 0$, ce qui revient à admettre que l'état primitif était neutre. Il en résulte plusieurs conséquences importantes :

1° Dans un conducteur parfait, le champ magnétique reste nul, quelles que soient les variations des systèmes extérieurs, et l'on a toujours $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$.

2° Le champ magnétique étant nul, les courants sont aussi nuls, d'après les équations (C). Les courants sont donc uniquement superficiels.

3° Le champ magnétique extérieur est tangent à la surface. En effet, comme le flux d'induction magnétique qui traverse une surface quelconque du conducteur est nul, on a, pour un élément dS,

$$(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)\,dS = 0.$$

Or, si l'on prend les axes des x et des y tangents à la surface, auquel cas $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, l'équation se réduit à $Z = 0$.

On verrait, comme plus haut, que le champ magnétique extérieur est perpendiculaire au courant.

4° Le champ électrique est nul dans un conducteur parfait. Les seconds membres des équations (D) sont nuls. Dans les premiers membres, les courants cP, cQ et cR sont également nuls. Les composantes P, Q, R sont donc constantes et, par suite, nulles puisque l'état primitif a été supposé neutre.

5° Le champ électrique extérieur est normal à la surface. Supposons qu'il existe entre le conducteur et le diélectrique une couche intermédiaire infiniment mince, et prenons l'axe des z normal à la surface.

Dans l'équation

$$\mu \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},$$

appliquée à la couche intermédiaire d'épaisseur ε, le premier membre est évidemment fini, c'est-à-dire qu'il n'est ni de l'ordre de ε, auquel cas il serait infiniment petit, ni de l'ordre du rapport inverse, ce qui lui donnerait une valeur infiniment grande, hypothèses également inadmissibles. Le premier terme du second membre est également fini, puisque les variations

rapides n'ont lieu que dans une direction normale à la couche. Le dernier terme $\frac{\partial Q}{\partial z}$ reste donc fini; comme la valeur de Q est nulle dans le conducteur, elle est aussi nulle à l'extérieur au voisinage de la surface.

On verrait, de même, que la composante P est nulle. La composante normale R est donc la seule qui diffère de zéro, c'est-à-dire que le champ électrique est normal au conducteur, comme pour l'état permanent.

6° Le champ magnétique extérieur est proportionnel à la densité superficielle du courant.

Si le plan des xy est tangent à la surface et le courant parallèle à l'axe des x, la valeur de u est infinie, mais le courant total ramené au contour a une valeur finie.

Si l'on multiplie par dz les deux termes de l'équation

$$4\pi u + K\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

l'intégrale du premier terme udz reste finie quand on l'étend à la couche infiniment mince des courants de conduction. Comme les termes $K\frac{\partial P}{\partial t}$ et $\frac{\partial Z}{\partial y}$ restent finis, les intégrales correspondantes sont nulles. Enfin la valeur de Y est nulle dans le conducteur; l'intégrale se réduit donc à

$$4\pi\int u\,dz = \int\frac{\partial Y}{\partial z}\,dz = Y.$$

Or, l'intégrale du premier membre est le courant total qui correspond à l'unité de longueur du contour de la section, c'est-à-dire la densité superficielle λ du courant. Le champ extérieur Y peut donc s'écrire

$$Y = 4\pi\lambda.$$

446. Propagation dans un cylindre. — Si l'axe des z est parallèle aux génératrices du cylindre, les composantes transversales u et v, comprenant les courants de conduction et de déplacement, sont nulles. Il résulte alors des équa-

tions (C) que les composantes F et G sont nulles dans toute l'étendue du système, puisqu'elles représentent respectivement le potentiel d'un agent fictif dont la densité serait égale à μv ou μw.

Dans le diélectrique (**438**) et sur une parallèle aux génératrices du cylindre, la valeur de H ne dépend que de z ; on a donc

$$K\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \Delta H = \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}.$$

C'est la forme obtenue déjà pour la propagation des ondes planes. Dans l'état variable, le potentiel vecteur se propage donc parallèlement au conducteur avec la même vitesse que les ondes planes. Il en est de même pour le champ électrique et le champ magnétique.

OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES. — THÉORIE DE LA LUMIÈRE.

447. Phénomènes périodiques. — Nous avons fait remarquer déjà (**393**) que si l'état d'un système varie d'une manière continue, les phénomènes de nature quelconque peuvent être représentés, suivant la formule de Fourier, par une série de termes harmoniques de périodes différentes. Les équations différentielles sont d'ailleurs linéaires et la solution générale est la somme des solutions qui conviennent à tous les termes de la série. Si le régime permanent est établi, on pourra donc considérer séparément les effets de périodes différentes.

Dans les vues de Faraday pour expliquer les phénomènes électriques et magnétiques par l'élasticité des milieux, sans recourir aux actions à distance, il serait contraire à l'esprit scientifique d'imaginer autant de milieux superposés que de propriétés physiques différentes.

Le grand problème que soulève la philosophie de la science est alors de connaître quelle serait la constitution du milieu qui permettrait de rendre compte en même temps de toutes ces propriétés. Il paraît difficile d'aborder une question aussi

vaste, mais c'est déjà un progrès considérable d'établir une liaison entre les phénomènes.

En particulier, si l'expérience et la théorie montrent que la vitesse de propagation des effets électromagnétiques est la même que celle de la lumière, on sera autorisé à en conclure que les deux ordres de phénomènes ne sont que des manifestations différentes des propriétés d'un milieu commun. C'est le résultat auquel conduit la théorie de Maxwell.

L'action d'un champ magnétique sur la polarisation d'un rayon de lumière semblerait alors la conséquence naturelle du lien que ce milieu établit entre les phénomènes.

448. Résistance apparente des conducteurs. — Si les variations du champ sont périodiques et de forme sinusoïdale, on peut, abstraction faite d'un terme constant, représenter le flux d'induction φ dans un circuit quelconque par $\Phi \cos \omega t$, le coefficient Φ étant une constante, ou par une fonction complexe $\Phi e^{i\omega t}$, dont la dérivée est $i\omega\varphi$.

Le flux de force LI produit par le courant étant lui-même une fonction complexe d'égale période, sa dérivée est $i\omega LI$ et l'équation d'induction devient

$$o = RI + \frac{\partial}{\partial t}(\varphi + LI) = (R + i\omega L)I + i\omega\varphi,$$

$$\frac{R}{\omega} + i(LI + \varphi) = o.$$

Les résultats sont les mêmes, en remplaçant l'expression complexe par ses termes réels, que si la résistance du circuit était réduite proportionnellement à la fréquence des oscillations. On l'aurait vu d'ailleurs par les formules établies déjà (393) pour les courants alternatifs.

Lorsque les oscillations sont très rapides, les conducteurs se comportent donc comme si leur résistance était nulle, et toutes les conséquences établies pour les conducteurs parfaits se trouvent applicables.

On doit cependant faire quelques réserves sur cette conclusion, parce que la distribution des courants alternatifs dans un conducteur ne se fait pas suivant les mêmes lois que pour les courants continus. Par suite des effets d'induction réciproque, les courants alternatifs se portent vers la surface des

conducteurs et n'utilisent ainsi qu'une partie de leur section, ce qui augmente leur résistance efficace. Pour les conducteurs cylindriques en particulier, comme on le verra plus loin, la résistance tend à devenir proportionnelle à $\sqrt{\omega}$ lorsque la fréquence est très grande. Comme la résistance est ici divisée par ω, les conducteurs médiocres se comportent finalement comme des écrans parfaits pour des courants de très grande fréquence.

449. Diélectriques. — Quand un milieu diélectrique est le siège de phénomènes périodiques, tous les effets se propagent avec une même vitesse V (**442**) et la longueur d'onde λ est l'espace parcouru pendant une période T. On a donc, en posant $\omega T = 2\pi$,

$$(1) \qquad \lambda = VT = \frac{2\pi}{\omega} V = \frac{T}{\sqrt{K\mu}}.$$

Si l'on considère un système d'ondes planes perpendiculaires à l'axe des z, les composantes Z, H, R et h relatives à cette direction sont nulles. Toutes les quantités qui restent sont *transversales* à la propagation. Chacune d'elles est périodique et peut être représentée par une fonction complexe de la forme $Ae^{i\varphi}$, en posant

$$\varphi = \omega\left(t - \frac{z}{V}\right) + \alpha.$$

Le module A est l'*amplitude* de la fonction et l'argument φ sa *phase*; les termes réels et les coefficients des imaginaires des expressions analogues satisfont séparément au problème.

Les équations (10) et les relations

$$4\pi f = KP, \qquad 4\pi u = K\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

montrent que le déplacement (f, g), le courant (u, v), le champ électrique (P, Q), le potentiel vecteur (F, G) et le champ magnétique (X, Y) ont des amplitudes proportionnelles.

La dérivée du sinus ou du cosinus d'une expression linéaire

des variables ayant une avance de phase de 90° par rapport à la fonction primitive (**394**), il en est encore de même pour une fonction complexe.

Les fonctions f et P, d'une part, u et F d'autre part ont respectivement la même phase, la différence de phase des deux groupes étant de 90°. En outre, le déplacement, le courant et le potentiel vecteur sont à chaque instant parallèles, car il résulte des formules générales :

$$\frac{f}{g} = \frac{P}{Q} = \frac{u}{v} = \frac{F}{G}.$$

D'autre part, les équations (10) du n° **442** donnent

$$(2) \qquad \mu\omega X = \frac{\omega}{V} Q, \qquad \mu\omega Y = -\frac{\omega}{V} P,$$

$$(3) \qquad PX + QY = 0.$$

Le champ magnétique est donc perpendiculaire au champ électrique et ces deux grandeurs ont la même phase.

Le phénomène correspond à des *ondes lumineuses*, dont les vibrations sont également transversales ; la vibration lumineuse serait parallèle au champ magnétique ou au champ électrique. Le vecteur radiant est parallèle à la propagation ; il représente le *rayon* de lumière.

En général, l'angle α est différent pour les deux composantes rectangulaires de même espèce. Chacune des grandeurs (P, Q) ou (X, Y) est alors représentée par le rayon vecteur d'une ellipse, qui obéit à la *loi des aires* autour du centre. C'est le cas d'une vibration lumineuse elliptique.

Lorsque cet angle α est le même pour les deux composantes, le champ électrique et le champ magnétique ont respectivement des directions constantes. On peut dire que les ondes sont *polarisées*, comme la lumière.

Dans ce cas, si l'on prend l'axe des x parallèle au champ électrique, la composante Q est nulle; il reste alors

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} g = 0, \quad v = 0, \quad G = 0, \quad X = 0; \\ 4\pi f = KP, \qquad 4\pi u = iK\omega P; \\ \mu Y = i\frac{\omega}{V} F = -\frac{P}{V}. \end{array} \right.$$

L'une ou l'autre des quantités P et Y représentera la vibration lumineuse dans les idées de Fresnel.

450. Partage des énergies. — Dans le cas d'ondes planes perpendiculaires à l'axe des z, l'énergie électrostatique du milieu par unité de volume devient, en tenant compte de (2),

$$\frac{K}{8\pi}(P^2 + Q^2) = \frac{K\mu^2 V^2}{8\pi}(X^2 + Y^2) = \frac{\mu}{8\pi}(X^2 + Y^2).$$

Or, la dernière expression représente aussi l'énergie électromagnétique par unité de volume (**435**).

On voit que l'énergie du milieu dans lequel se propagent les ondes se trouve, moitié sous forme électrostatique et moitié sous forme électromagnétique. Il en résulte que l'énergie totale par unité de volume est, à chaque instant,

$$W_1 = \frac{K}{4\pi}(P^2 + Q^2) = \frac{\mu}{4\pi}(X^2 + Y^2).$$

L'énergie *moyenne* s'obtiendra en remplaçant le carré de chacune des fonctions considérées par la moitié du carré de son amplitude.

Désignons par p chacune de ces énergies partielles. En vertu de son état électrique (**80**) le milieu est soumis à une tension périodique d'amplitude $\frac{p}{2}$ parallèle à la force électromotrice et une pression de même valeur suivant les directions rectangulaires. En vertu de son état électromagnétique, le milieu est soumis aux mêmes effets, sauf qu'il faut remplacer la direction de la force électromotrice par celle du champ magnétique, qui lui est perpendiculaire, et inversement. Ces actions se détruisent dans le plan de l'onde et il reste normalement à ce plan une pression p égale à la moitié de l'énergie totale par unité de volume.

451. Pouvoir inducteur spécifique. — L'indice de réfraction n d'un milieu pour une couleur déterminée est le rapport des vitesses de propagation V et V′ de la lumière dans le vide et dans le milieu considéré, ce qui donne

$$nV' = V.$$

Les milieux étant supposés diélectriques et non magné-

tiques, si l'on désigne par K et K′ les pouvoirs inducteurs spécifiques du vide et du diélectrique, on a aussi

$$K'V'^2 = KV^2 = 1;$$

il en résulte

$$Kn^2 = K'. \tag{5}$$

Le pouvoir inducteur spécifique d'un diélectrique par rapport à celui du vide, ou sensiblement de l'air, doit donc être égal au carré de son indice de réfraction.

Il se présente, pour la vérification expérimentale de cette conséquence si importante, une difficulté qui tient à la dispersion des milieux réfringents. L'indice de réfraction étant variable avec la longueur d'onde, ou la période, l'idée la plus naturelle est de considérer la valeur limite de l'indice, c'est-à-dire celle qui correspond à la plus grande période.

Pour la *paraffine*, par exemple, les indices de réfraction des rayons lumineux extrêmes varient de 1,43 à 1,45 et les meilleures expériences, par les méthodes d'électricité statique, montrent que la valeur moyenne du pouvoir inducteur spécifique est voisine de 2,29; la racine carrée 1,51 de ce nombre n'est pas très éloignée de l'indice de réfraction.

L'accord est moins satisfaisant avec la plupart des diélectriques solides transparents, tels que les différentes espèces de *verres*, le *spath d'Islande*, le *spath fluor* et le *quartz*; leur pouvoir inducteur spécifique est toujours plus élevé, quelquefois le double du carré de l'indice de réfraction. Il en est de même pour les *huiles* végétales et animales.

Pour les *gaz*, dont la réfraction est plus faible et la dispersion négligeable, la puissance réfractive $n^2 - 1$ est proportionnelle au poids spécifique, ou à la pression, si la température est maintenue constante; il doit en résulter que le pouvoir inducteur spécifique croît aussi proportionnellement à la pression, et par le même coefficient que la puissance réfractive. Cette conséquence paraît avoir été vérifiée par les recherches de M. Boltzmann.

Le contrôle de l'expérience ne peut donc pas être considéré comme suffisant pour confirmer la théorie; mais il n'y a pas lieu d'attacher trop d'importance à ce désaccord apparent, si

l'on tient compte du fait que le pouvoir inducteur spécifique diminue d'une manière notable avec la durée de l'électrisation. Or, la période des oscillations électriques qu'il faut admettre pour expliquer les phénomènes lumineux est hors de toute proportion avec le plus court intervalle de temps que l'on puisse réaliser dans les expériences électrostatiques.

Dans tous les cas, cette corrélation des propriétés optiques et électriques d'un milieu peut être considérée, au moins, comme une première approximation d'une théorie qui reste à préciser davantage.

452. Phénomènes de Hertz. — La découverte de Hertz et les nombreux travaux qu'elle a provoqués ont confirmé d'une manière inattendue la belle théorie de Maxwell.

Dans ces expériences, sur lesquelles nous reviendrons plus

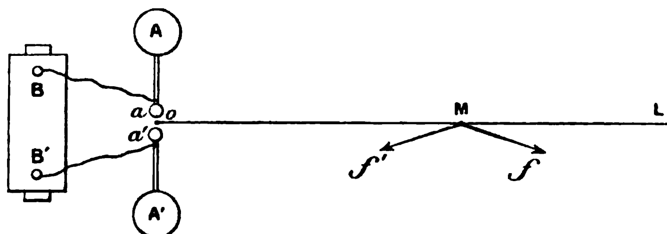


Fig. 105.

tard et dont il suffit de rappeler ici le caractère général, le champ oscillatoire est produit par un appareil dit *excitateur* et ses propriétés sont observées au moyen d'une sorte de *résonateur* électrique.

L'excitateur est formé par un système de conducteurs où l'on provoque des décharges de nature oscillante (399). Tel est l'ensemble de deux sphères métalliques A et A' (fig. 105), munies de tiges qui se terminent par deux boules a et a' ; ces conducteurs sont joints respectivement aux pôles B et B' du fil secondaire d'une bobine d'induction.

A chacune des décharges de la bobine (rupture ou fermeture du courant primaire), les conducteurs Aa et A'a' reçoivent des charges égales et de signes contraires ; pour une distance convenable des boules a et a', il s'y produira une série d'étincelles de nature oscillatoire assez complexe, surtout à cause de la présence de la bobine dans le système.

Il est vrai que le phénomène est de très courte durée pour chacune des décharges, mais le nombre des étincelles secondaires est néanmoins considérable, parce que leur période est extrêmement courte, et leur amortissement est très faible.

Le jeu continu de la bobine provoque incessamment des séries analogues d'étincelles, de sorte que les effets sont comparables à ceux que produiraient des oscillations ininterrompues de même amplitude.

Si l'on considère un point M sur la perpendiculaire OL au milieu de la distance AB, les champs électriques f et f' des conducteurs Aa et A$'a'$ sont à chaque instant situés dans le plan méridien AMA$'$ et inclinés également de côté et d'autre sur la droite OL ; la direction du champ électrique résultant est donc située dans le plan méridien, normale à la droite OL et le champ est lui-même oscillatoire.

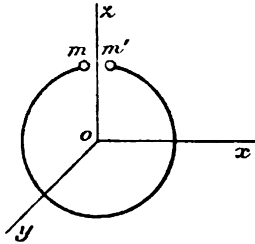


Fig. 106.

D'autre part, le système AA$'$ étant parcouru par un courant oscillatoire, le champ magnétique au point M présente le même caractère et il est perpendiculaire au plan méridien.

La droite OL est un des *rayons* suivant lesquels se propagent les phénomènes; pour ce rayon, le plan des vibrations électriques est le méridien et le plan des vibrations magnétiques perpendiculaire au méridien. L'amplitude des deux champs s'affaiblit, et suivant des lois différentes, à mesure que la distance OM augmente ; mais, à une distance assez grande par rapport aux dimensions de l'excitateur, les ondes de même phase formeront sensiblement une série de plans parallèles équidistants.

Le résonateur sera formé, par exemple, d'un conducteur

circulaire (fig. 106) interrompu en un point où il est muni de boules ou de pointes m et m' très rapprochées, afin de pouvoir y constater la production de faibles étincelles.

Cet appareil a aussi un régime propre d'oscillations; il peut entrer, pour ainsi dire, en vibration sous l'influence du champ et donner des étincelles au point d'interruption. La résonnance est relativement facile lorsque les deux instruments sont accordés, qu'ils ont la même période principale ou la même note dominante; elle devient moins nette lorsque l'accord n'a lieu que pour des harmoniques d'ordre élevé.

Prenons l'axe des z suivant le diamètre d'interruption, qui est un axe de symétrie du résonateur, et l'axe des x dans le plan du cadre.

Si le champ électrique est parallèle à l'axe des z ou des y, les extrémités m et m' sont constamment au même potentiel, par raison de symétrie ; aucune étincelle n'est possible de ce chef. Le champ électrique efficace est donc la composante P perpendiculaire à l'axe de symétrie et dans le plan du cadre; les étincelles sont dues alors à l'inégalité des actions produites sur les deux moitiés du cadre, l'une continue et l'autre interrompue. L'effet maximum a lieu quand l'axe des x est parallèle aux vibrations électriques.

D'autre part, le flux d'induction dans le circuit ne dépend que de la composante Y du champ magnétique ; la meilleure condition pour obtenir les étincelles des courants induits est donc de placer le cadre dans le plan méridien, quel que soit d'ailleurs le diamètre d'interruption.

Si l'on veut observer séparément l'action du champ électrique, on mettra le plan du cadre perpendiculaire au rayon, c'est-à-dire parallèle aux ondes, et le diamètre d'interruption perpendiculaire au méridien; pour isoler l'action du champ magnétique, le cadre étant situé dans le plan méridien, le diamètre d'interruption devra être dirigé suivant une perpendiculaire au rayon, c'est-à-dire dans le plan de l'onde. Dans les deux cas, l'expérience montre que le résonateur peut donner des étincelles à une très grande distance.

Supposons que l'on place dans le champ un plan conducteur P (fig. 107) perpendiculaire au rayon LC; les ondes qui se réfléchissent sur ce plan interfèrent avec les ondes incidentes

et donnent lieu à des nœuds et des ventres de vibrations, comme dans la réflexion du son ou les anneaux colorés. Ce conducteur étant impénétrable aux oscillations électriques ou magnétiques de très courte période (448), sa surface est un nœud; il se produit ainsi sur la droite CL une série alternative de nœuds et de ventres N_0, V_1, N_1, V_2, ..., la distance de deux nœuds ou de deux ventres consécutifs étant la moitié

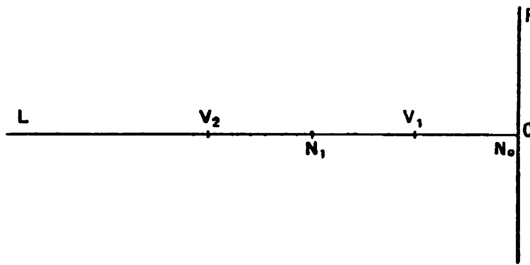


Fig. 107.

de la longueur d'onde. La position des nœuds étant déterminée par les points où le résonateur reste silencieux, on peut ainsi connaître la longueur d'onde λ du phénomène.

Si l'on connaît en même temps la période T des oscillations, on en déduira la vitesse V de propagation par la relation $\lambda = VT$. On doit remarquer ici que la période n'est pas

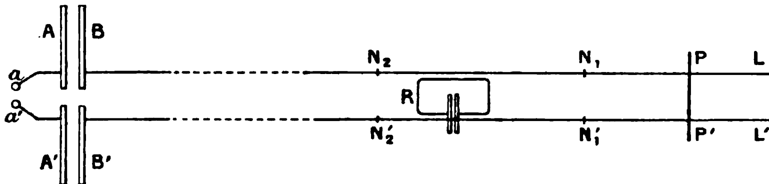


Fig. 108.

définie par l'excitateur; il résulte, en effet, des expériences de MM. Sarrazin et De la Rive que la position des nœuds et des ventres dépend uniquement du résonateur, lequel vibre sous la seule condition que sa période propre se trouve dans le phénomène confus que produit l'excitateur.

L'emploi de fils conducteurs permet de rendre les phénomènes plus manifestes à une grande distance. Ainsi, l'excita-

teur étant formé de deux plateaux A et A′ (fig. 108) dans le même plan, on met en face deux autres plateaux B et B′ munis de fils conducteurs parallèles L et L′, sur lesquels on pose une tige transversale PP′ qui sert de *pont*. Les courants provoqués par induction électrostatique se propagent le long des conducteurs ou, plus exactement, dans le diélectrique au voisinage de leur surface. Comme ces deux courants sont à chaque instant égaux et de signes contraires, le milieu du pont, où les effets de même nature arrivent à la même époque, est un ventre de vibration et il se produit sur les fils des nœuds $N_1, N_2, \ldots\ldots N'_1, N'_2, \ldots$, respectivement en regard l'un de l'autre. Un résonateur placé dans l'intervalle de deux nœuds doit rester silencieux.

Pour préciser la période, M. Blondlot prend comme résonateur R un cadre rectangulaire interrompu par deux plateaux parallèles, qui forment condensateur, et portent des pointes latérales entre lesquelles on observe les étincelles.

Le résonateur étant situé dans le plan des deux fils, les étincelles sont dues aux variations du champ magnétique.

Les courants sont alors uniquement superficiels et le coefficient de self-induction L du cadre se détermine par ses dimensions (**409**).

La résistance du circuit est négligeable quand il s'agit d'oscillations très rapides; enfin, si l'on appelle S la surface des plateaux et e leur distance, la capacité C en unités électromagnétiques (**419**) est égale à $\frac{1}{v^2}\frac{S}{4\pi e}$. On a donc

$$T^2 = 4\pi^2 C L = \frac{\pi}{v^2}\frac{S L}{e}.$$

Le pont est placé d'abord de manière que le résonateur reste silencieux; cette circonstance se produit, par exemple, quand il se trouve en face des nœuds N_1 et N'_1. On fait alors glisser le pont vers la droite, de manière que le résonateur, après avoir donné des étincelles d'intensité croissante, puis décroissante, soit de nouveau silencieux; c'est comme si l'on avait porté le résonateur dans la direction contraire, à la même distance x, de manière à l'amener en face des nœuds

suivants N_2 et N'_2. La distance x est donc la moitié de la longueur d'onde et la vitesse de propagation est

$$V = \frac{x}{2T} = \mathbf{v}\frac{x}{2}\sqrt{\frac{e}{\pi S L}}.$$

Or, l'expérience montre que le facteur de $\mathbf{v}$ dans le dernier membre de cette équation est sensiblement égal à l'unité ; il en résulte $V = \mathbf{v}$, c'est-à-dire que la vitesse de propagation des oscillations électriques dans l'air est égale au rapport des unités, ou à la vitesse de la lumière.

Si on plonge dans un autre milieu (*essence de térébenthine*, *huile de ricin* ou même *eau congelée*) l'ensemble des deux fils et du résonateur, la vitesse de propagation, la longueur d'onde et la capacité du condensateur sont modifiées, le coefficient d'induction restant le même. En désignant par des lettres accentuées les quantités relatives à ce second milieu, et par n son indice de réfraction, on a ainsi

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{VT}{V'T'} = \frac{V}{V'}\sqrt{\frac{C}{C'}} = n\sqrt{\frac{C}{C'}} = n\sqrt{\frac{K}{K'}}.$$

Or, l'expérience montre que la position des nœuds est rigoureusement indépendante de la nature du milieu extérieur ; la longueur d'onde est donc invariable. Il en résulte $Kn^2 = K'$; c'est une vérification directe de la loi de Maxwell.

Signalons encore, sans y insister maintenant, une autre expérience par laquelle M. Blondlot a déterminé, à l'aide d'un miroir tournant, la vitesse de propagation des oscillations électriques dans l'air au voisinage de fils conducteurs ; la moyenne des résultats s'est trouvée aussi très voisine de la vitesse de la lumière.

453. Corps imparfaitement isolants. — Supposons que, le milieu étant un isolant imparfait (**439**), les effets de déplacement et de conductibilité soient de même ordre. Alors l'énergie se transforme partiellement en chaleur, et la propagation des phénomènes se fait avec un amortissement graduel.

Considérons une onde plane perpendiculaire à l'axe des z, la perturbation étant parallèle à l'axe des x.

Dans ce cas, l'équation différentielle (8), à laquelle doivent satisfaire les fonctions F et G, se réduit à

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 4\pi\mu c \frac{\partial \theta}{\partial t} + K\mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}.$$

Ces fonctions sont de la forme $Ae^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)$ ou des expressions complexes $Ae^{-\alpha z + i(\omega t - \beta z)}$, les constantes α et β étant déterminées par la condition

$$(\alpha + \beta i)^2 = 4\pi\mu c\omega i - K\mu\omega^2,$$

qui donne

$$\beta^2 - \alpha^2 = K\mu\omega^2, \qquad \alpha\beta = 2\pi\mu c\omega.$$

Les phénomènes représentés par des expressions de cette forme correspondent à une onde amortie qui se propage parallèlement à l'axe des z avec une vitesse $V = \frac{\omega}{\beta}$, et dont l'amplitude diminue rapidement.

Le coefficient d'absorption α a pour valeur $2\pi\mu c V$. L'absorption de la lumière doit donc augmenter avec la conductibilité électrique. L'expérience indique, en effet, que la plupart des corps transparents sont diélectriques, et que tous les bons conducteurs sont très opaques.

Toutefois, cette relation n'est pas absolue, car certains métaux sont transparents sous une faible épaisseur et plusieurs diélectriques sont opaques. On doit aussi mettre à part les électrolytes, presque tous transparents, parce que les actions chimiques liées au passage de l'électricité changent complètement la nature du phénomène.

454. Réflexion et réfraction. — Si l'on considère une onde plane dont la normale a pour cosinus directeurs l, m et n, la distance d de l'onde à l'origine des coordonnées est

$$d = lx + my + nz.$$

En comptant la normale dans une direction opposée à celle de la propagation, la phase de toutes les quantités qui entrent dans le phénomène est de la forme

$$\varphi = \omega t + \frac{\omega}{V} d + \alpha,$$

ou, en posant

$$\frac{p}{l} = \frac{q}{m} = \frac{r}{n} = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$\varphi = \omega t + px + qy + rz + \alpha.$$

Une quelconque des grandeurs considérées peut être représentée par une expression de la forme $Ae^{i\varphi}$.

Supposons que les ondes rencontrent une surface plane séparant deux milieux différents. En appelant I l'angle d'incidence et prenant pour axe des x sur cette surface une droite située dans le plan d'incidence, on aura $m = 0$, $q = 0$ et

$$\frac{p}{\sin I} = \frac{r}{\cos I} = \sqrt{p^2 + r^2} = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Il se produit alors des ondes réfléchies et des ondes réfractées qui sont également perpendiculaires au plan d'incidence, par raison de symétrie.

Les équations (C) du n° **434** donnent, en tenant compte de la condition de continuité $\mu(pX + rZ) = 0$,

$$(6)\quad \begin{cases} 4\pi u = \dfrac{\partial Y}{\partial z} = irY, \\ 4\pi v = \dfrac{\partial Z}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial z} = i(pZ - rX) = -i\dfrac{p^2 + r^2}{r}X, \\ 4\pi w = -\dfrac{\partial Y}{\partial x} = -ipY. \end{cases}$$

On aura de même, par les équations (B) et la condition de continuité du champ électrique,

$$(7)\quad \begin{cases} \mu\omega X = -rQ, \\ \mu\omega Y = rP - pR = \dfrac{p^2 + r^2}{r}P, \\ \mu\omega Z = pQ. \end{cases}$$

Comme les courants u et v restent finis de part et d'autre de la surface de séparation, et que les dérivées par rapport à x sont évidemment finies dans les deux milieux, il en est de même des quantités $\frac{\partial Y}{\partial z}$ et $\frac{\partial X}{\partial z}$, c'est-à-dire que les valeurs totales de μX et μY sont respectivement égales, de part et

d'autre de la surface, sans quoi leurs dérivées par rapport à la normale prendraient des valeurs infinies. On peut considérer que cette concordance constitue l'hypothèse admise pour le phénomène.

La même raison, appliquée aux dérivées de X et Y par rapport au temps, montre que les quantités P et Q ont les mêmes valeurs de part et d'autre.

En désignant par l'indice 1 les quantités relatives aux ondes réfléchies et par un accent ′ celles des ondes réfractées, on aura donc, en supposant $z=0$,

$$(8)\qquad \begin{cases} P+P_1=P', \\ Q+Q_1=Q'. \end{cases}$$

Les conditions de concordance doivent avoir lieu sur toute la surface, c'est-à-dire quelle que soit la valeur de x. Il faut donc que le coefficient de x soit le même dans les trois exponentielles, c'est-à-dire qu'on ait

$$p=p_1=p', \qquad \text{ou} \qquad \frac{\sin I}{V}=\frac{\sin I_1}{V}=\frac{\sin I'}{V'}.$$

Ces équations expriment la loi géométrique de la réflexion et de la réfraction.

Quand on passe des ondes incidentes aux ondes réfléchies, le coefficient r doit être changé de signe. La concordance des valeurs de μX et μY donne alors, en posant

$$\rho=\frac{p^2+r^2}{r}=\frac{r}{\cos^2 I},$$

$$(9)\qquad \begin{cases} r(Q-Q_1)=r'Q', \\ \rho(P-P_1)=\rho' P'. \end{cases}$$

On déduit des équations (8) et (9)

$$\frac{Q'}{r}=\frac{Q+Q_1}{r}=\frac{Q-Q_1}{r'}=\frac{2Q}{r+r'}=\frac{2Q_1}{r-r'},$$

$$\frac{P'}{\rho}=\frac{P+P_1}{\rho}=\frac{P-P_1}{\rho'}=\frac{2P}{\rho+\rho'}=\frac{2P_1}{\rho-\rho'};$$

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{Q_1}{Q}=\dfrac{r-r'}{r+r'}, & \dfrac{Q'}{Q}=\dfrac{2r}{r+r'}, \\[2ex] \dfrac{P_1}{P}=\dfrac{\rho-\rho'}{\rho+\rho'}, & \dfrac{P'}{P}=\dfrac{2\rho}{\rho+\rho'}. \end{cases}$$

La dernière des équations (7) montre aussi que la concordance a lieu pour les composantes normales de l'induction magnétique; il n'en sera de même pour le champ magnétique que si la perméabilité ne change pas d'un côté à l'autre.

D'autre part, la condition de continuité du champ électrique, appliquée aux trois systèmes d'ondes, donne

$$pP + rR = 0, \quad pP_1 - rR_1 = 0,$$

$$p(P - P_1) + r(R + R_1) = 0;$$

$$pP' + r'R' = 0, \qquad \frac{P - P_1}{P'} = \frac{r}{r'} \frac{R + R_1}{R'}.$$

La dernière des équations (9) peut alors s'écrire

$$\frac{R + R_1}{R'} = \frac{\rho' r'}{\rho r} = \frac{p^2 + r'^2}{p^2 + r^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda'^2}.$$

Il y a donc changement brusque pour la composante normale de la force électromotrice, ce qui correspondrait à une périodicité de charge électrique sur la surface.

455. Réflexion vitrée. — Si le milieu inférieur est diélectrique, les facteurs r' et ρ' sont réels et l'on a

$$\frac{r}{r'} = \frac{\cos I}{\cos I'} \frac{V'}{V} = \frac{\cos I \sin I'}{\cos I' \sin I}, \qquad \frac{\rho}{\rho'} = \frac{r}{r'} \cdot \frac{\cos^2 I'}{\cos^2 I} = \frac{\sin 2I'}{\sin 2I}.$$

Les équations (10) déterminent les rapports des forces électromotrices incidente, réfléchie et réfractée. Comme ces rapports sont constants, la phase est la même pour les différentes composantes de chaque espèce. La réflexion et la réfraction se font donc sans changement de phase. Si le champ électrique, ou la perturbation incidente, est rectiligne, c'est-à-dire si la lumière incidente est polarisée, il en sera de même pour les ondes réfléchie et réfractée. C'est le cas de la réflexion et de la réfraction *vitrées*.

En désignant par U et Q les composantes *principales*, situées dans le plan d'incidence et dans la direction perpendiculaire, et supposant les premières U comptées dans le même sens par rapport à la propagation, il en résulte

$$P = U \cos I, \qquad P_1 = -U_1 \cos I, \qquad P' = U' \cos I'.$$

Les équations (10) donnent alors

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{Q_1}{Q} = \frac{\sin(I'-I)}{\sin(I'+I)}, \qquad \frac{Q'}{Q} = \frac{2\cos I \sin I'}{\sin(I+I')}; \\ &\frac{U_1}{U} = \frac{\sin 2I - \sin 2I'}{\sin 2I + \sin 2I'} = \frac{\operatorname{tang}(I-I')}{\operatorname{tang}(I+I')}, \\ &\frac{U'}{U} = \frac{\cos I}{\cos I'} \cdot \frac{2\sin 2I'}{\sin 2I + \sin 2I'} = \frac{2\cos I \sin I'}{\sin(I+I')\cos(I-I')}. \end{aligned} \right.$$

On retrouve ainsi les formules de Fresnel.

Il est facile de montrer d'ailleurs que les principes sont les mêmes dans les deux théories. En effet, les équations (8) traduisent d'abord la concordance des vibrations principales parallèles à la surface. D'autre part, en les multiplant membre à membre avec les équations (9), on obtient

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} r(Q^2 - Q_1^2) &= r' Q'^2, \\ \rho(P^2 - P_1^2) &= \rho' P'^2. \end{aligned} \right.$$

Comme on a $\rho P^2 = U^2 \rho \cos^2 I = U^2 r$, la dernière de ces équations peut s'écrire également

$$(12)' \qquad r(U^2 - U_1^2) = r' U'^2.$$

Considérons maintenant le cylindre de volume $\varpi = S\lambda$ ayant pour hauteur, dans le premier milieu, la distance λ de deux ondes successives incidentes et pour section S; l'énergie moyenne comprise dans ce volume pour la composante principale Q est proportionnelle (450) à $K\varpi Q^2$.

Cette énergie devant se retrouver dans les volumes correspondants $\varpi = S\lambda$ et $\varpi' = S'\lambda'$ des cylindres compris entre deux ondes consécutives, réfléchies et réfractées, il en résulte

$$(13) \qquad K\varpi(Q^2 - Q_1^2) = K'\varpi' Q'^2,$$

Or, les sections S et S′ de ces cylindres sont respectivement proportionnelles à cos I et cos I′, puisqu'elles représentent séparément les projections d'une même étendue de

la surface de séparation sur les ondes respectives. Si les milieux ne sont pas magnétiques, on a

$$\frac{K}{K'} = \frac{V'^2}{V^2} = \frac{\lambda'^2}{\lambda^2},$$

et, par suite,

$$\frac{K\varpi}{K'\varpi'} = \frac{\lambda'^2}{\lambda^2} \cdot \frac{\lambda \cos I}{\lambda' \cos I'} = \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{\cos I}{\cos I'} = \frac{r}{r'}.$$

L'équation (13) est donc identique à la première des équations (12); il en serait de même pour la seconde et (12)'.

Il est important de remarquer ici que les coefficients K et K' sont respectivement en raison inverse du carré de la vitesse de propagation, c'est-à-dire proportionnels à ce que Fresnel appelle la densité de l'éther dans les différents milieux; les équations (12) traduisent alors le principe de la conservation des forces vives appliqué séparément aux deux composantes principales.

Il en résulte que les lois de la réflexion vitrée, établies par Fresnel, s'appliquent aux phénomènes électromagnétiques. Le champ électrique (P, Q, R) et le potentiel vecteur (F, G, H) sont dirigés suivant une droite transversale au rayon et perpendiculaire au plan de polarisation; ils jouissent des mêmes propriétés que la vibration de Fresnel.

Le champ magnétique (X, Y, Z), est aussi transversal et perpendiculaire à la direction précédente; c'est la vibration lumineuse dans l'hypothèse de Neumann.

456. Réflexion totale. — Il est clair que l'on doit retrouver aussi les formules relatives à la réflexion totale, lorsque le premier milieu est plus réfringent.

Les valeurs de p étant les mêmes de part et d'autre de la surface, si n désigne l'indice de réfraction du premier milieu par rapport au second, on a

$$p^2 + r'^2 = \frac{p^2}{\sin^2 I'} = \frac{p^2}{n^2 \sin^2 I} = \frac{r^2}{n^2 \cos^2 I} = \frac{r\rho}{n^2},$$

$$r'^2 = \frac{p^2}{n^2 \sin^2 I}(1 - n^2 \sin^2 I) = \frac{r^2}{n^2 \cos^2 I}(1 - n^2 \sin^2 I).$$

Lorsque l'incidence est telle que $n \sin I > 1$, la valeur de r' est imaginaire et l'on peut écrire

$$r' = i \frac{r}{n \cos I} \sqrt{n^2 \sin^2 I - 1} = a i,$$

$$\rho' = \frac{p^2 + r'^2}{r'} = \frac{r\rho}{n^2 a i} = -\frac{r\rho}{n^2 a} i = -a' i;$$

$$\frac{\rho}{a'} = n^2 \frac{a}{r}, \qquad \frac{\rho}{a'} - \frac{a}{r} = (n^2 - 1) \frac{a}{r},$$

$$1 + \frac{\rho}{a'} \cdot \frac{a}{r} = 1 + n^2 \frac{a^2}{r^2} = 1 + \frac{n^2 \sin^2 I - 1}{\cos^2 I} = (n^2 - 1) \operatorname{tang}^2 I.$$

Dans ce cas, il résulte des équations (10) que les rapports des quantités Q_1 à Q et P_1 à P sont les rapports de deux grandeurs complexes ayant le même module; les amplitudes de ces composantes sont donc respectivement égales. Par suite, l'intensité des ondes réfléchies est égale à celle des ondes incidentes, et la réflexion est *totale*.

Si l'on pose $a = r \operatorname{tang} \delta_1$, on peut écrire

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{r - ai}{r + ai} = \frac{\cos \delta_1 - i \sin \delta_1}{\cos \delta_1 + i \sin \delta_1} = e^{-2i\delta_1},$$

c'est-à-dire que la phase de la vibration réfléchie Q_1 est en retard de l'angle $2\delta_1$ sur celle de la vibration incidente Q.

En posant $-a' = \rho \operatorname{tang} \delta'$, la perte de phase de P_1 sur P est aussi $2\delta'$; mais la quantité P_1 est de signe contraire à la composante principale U_1. La perte de phase apparente de cette composante U_1 est donc $2\delta_2 = \pi + 2\delta'$, ce qui donne

$$\operatorname{tang} \delta_2 = -\operatorname{cotg} \delta' = \frac{\rho}{a'}.$$

La différence de phase apparente des deux composantes principales réfléchies étant $2\delta = 2(\delta_2 - \delta_1)$, il en résulte

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{\dfrac{\rho}{a'} - \dfrac{a}{r}}{1 + \dfrac{\rho a}{a' r}} = \frac{a}{r} \operatorname{cotg}^2 I = \frac{\cos I}{n \sin^2 I} \sqrt{n^2 \sin^2 I - 1}.$$

C'est encore la valeur donnée par Fresnel pour la différence de phase des deux composantes principales de la vibration elliptique produite par la réflexion totale d'une lumière incidente polarisée dans un azimut quelconque.

457. Réflexion métallique. — Si le second milieu est conducteur (**437**), les différentes grandeurs y satisfont à une même équation générale $\Delta\theta = 4\pi\mu c \frac{\partial\theta}{\partial t}$, qui donne

$$p'^2 + r'^2 = -4\pi\mu c\omega i.$$

Comme on a toujours $p' = p$, il en résulte

$$\rho' = \frac{p^2 + r'^2}{r'} = -\frac{4\pi\mu c\omega}{r'} i.$$

Les coefficients r' et ρ' étant des quantités complexes, de la forme $a + bi$, les rapports (10) des composantes P_1 et Q_1 aux valeurs correspondantes P et Q seront toujours des quantités complexes dont le module est inférieur à l'unité.

Dans ce cas, la réflexion est *partielle ;* l'excès de l'énergie des ondes incidentes sur les ondes réfléchies est transformé en chaleur dans le conducteur.

En outre, le coefficient de réflexion et la perte de phase ne sont pas les mêmes pour les deux composantes principales réfléchies. Si les ondes incidentes sont polarisées, les ondes réfléchies présentent une polarisation elliptique ou une dépolarisation partielle.

C'est encore le caractère que présente la réflexion *métallique* pour la lumière.

La période joue un grand rôle dans la nature des phénomènes. En effet, si l'on remplace p^2 par $\frac{2\pi\omega}{V\lambda} \sin^2 I$, on a

$$r'^2 = -\frac{2\pi\omega}{V\lambda}(2V\lambda\mu c i + \sin^2 I).$$

Lorsque la période d'oscillation ou la longueur d'onde λ est assez grande, le terme réel du second membre est très petit par rapport au coefficient du terme imaginaire ; le module et l'argument de la qualité r' sont alors indépendants de l'inci-

dence. Dans ce cas, on peut négliger p et r devant r', ρ devant ρ', et les équations (10) et (8) se réduisent à

$$Q + Q_1 = 0, \quad P + P_1 = 0;$$
$$Q' = 0, \quad P' = 0.$$

Avec cette hypothèse, les composantes Q et P changent de signe par réflexion, en conservant la même amplitude, de sorte que la réflexion est *totale*. En outre, le champ électrique résultant dans le milieu supérieur est normal à la surface, comme dans l'état d'équilibre électrostatique.

Cette application des formules à un cas extrême exige que le produit $V\lambda\mu c$, qui est un nombre, soit très grand par rapport à l'unité. Pour le *cuivre*, par exemple, $\mu = 1$, $c = \frac{1}{1600}$ et, par suite,

$$2\mu c V = \frac{3.10^{10}}{800} = \frac{3}{8}10^8.$$

Il suffit donc que la valeur de λ soit très grande par rapport à 10^{-8}. Or, la longueur d'onde de la lumière est d'environ un demi-millième de millimètre ou $0,5\ 10^{-4}$. La réflexion métallique devrait ainsi toujours être complète pour la lumière, si d'autres causes n'intervenaient dans le phénomène, telles que la transparence partielle du milieu.

458. Diélectriques anisotropes. — Dans les milieux anisotropes, le déplacement et le courant ne sont plus parallèles à la direction du champ électrique. L'hypothèse la plus simple consiste à admettre que les composantes du courant sont liées à celles du champ par des équations linéaires à coefficients constants. Il existe alors trois directions rectangulaires, dites *principales*, pour lesquelles chacune des composantes du courant est proportionnelle à la composante correspondante du champ. En désignant par a, b, et c des constantes, on pourra remplacer les relations précédentes (**438**) par

$$(14) \qquad 4\pi u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial P}{\partial t}, \quad 4\pi v = \frac{1}{b^2}\frac{\partial Q}{\partial t}, \quad 4\pi w = \frac{1}{c^2}\frac{\partial R}{\partial t},$$

en conservant les équations générales (A) (B) et (C) qui restent applicables.

Si l'on désigne par V la vitesse de propagation d'un système d'ondes planes, la phase de toutes les quantités est encore de la forme

$$\varphi = \omega t + \frac{\omega}{V} d + \alpha = \omega \left(t + \frac{lx + my + nz}{V} + \alpha \right),$$

et on les représentera par des grandeurs complexes $Ae^{i\varphi}$.

Le milieu n'étant pas supposé magnétique, les équations (A), (B), (C) et (14) donnent alors

$$(15) \quad \begin{cases} X = \dfrac{i\omega}{V}(nG - mH) = \dfrac{1}{V}(mR - nQ), \\ Y = \dfrac{i\omega}{V}(lH - nF) = \dfrac{1}{V}(nP - lR), \\ Z = \dfrac{i\omega}{V}(mF - lG) = \dfrac{1}{V}(lQ - mP); \end{cases}$$

$$(16) \quad \begin{cases} 4\pi u = \dfrac{i\omega}{V}(nY - mZ) = \dfrac{i\omega}{a^2} P, \\ 4\pi v = \dfrac{i\omega}{V}(lZ - nX) = \dfrac{i\omega}{b^2} Q, \\ 4\pi w = \dfrac{i\omega}{V}(mX - lY) = \dfrac{i\omega}{c^2} R. \end{cases}$$

On en déduit

$$(17) \quad \begin{cases} ul + vm + wn = 0, \\ Xl + Ym + Zn = 0, \\ uX + vY + wZ = 0, \\ FX + GY + HZ = 0, \\ PX + QY + RZ = 0. \end{cases}$$

Il en résulte que le courant (u, v, w) et le champ magnétique (X, Y, Z) sont dans le plan de l'onde; en outre, le champ magnétique est perpendiculaire au courant, au champ électrique (P, Q, R) et au potentiel vecteur (F, G, H), de sorte que ces trois dernières grandeurs sont dans le même plan.

Remplaçant les composantes P, Q, R dans la dernière des équations (9) respectivement par des quantités proportionnelles tirées des équations (8), on a

$$a^2 uX + b^2 vY + c^2 wZ = 0.$$

Cette condition signifie que le champ magnétique se trouve dans le plan conjugué de la direction du courant, par rapport à l'ellipsoïde

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1. \tag{18}$$

Le champ magnétique et le courant étant rectangulaires, leurs directions sont celles des axes de la section de cet ellipsoïde par le plan de l'onde.

En éliminant les composantes X, Y et Z entre les équations (7) et (8), on en déduit

$$4\pi u V^2 = i\omega[P-l(lP+mQ+nR)], \ldots\ldots$$

Si l'on fait la somme des trois équations analogues, respectivement multipliées par u, v et w, en tenant compte de la condition $ul+vm+wn=0$ et des équations (8), il reste

$$V^2(u^2+v^2+w^2)=a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2,$$

c'est-à-dire que la vitesse V est l'inverse du rayon de l'ellipsoïde (18) mesuré dans la direction du courant.

On retrouve ainsi la théorie de Fresnel, puisque cet ellipsoïde jouit des mêmes propriétés que l'ellipsoïde de polarisation, l'oscillation électrique étant parallèle à la vibration de Fresnel. Le champ magnétique, qui lui est perpendiculaire et dans le même plan, serait la vibration de Neumann.

On peut considérer le problème d'une autre manière, en supposant même que le milieu est magnétique, à la condition toutefois que les axes principaux d'aimantation coïncident avec les axes électriques.

Lorsque le milieu est isolant et que la position des masses électriques ne varie pas avec le temps, la fonction ψ et la conductivité c disparaissent des équations générales (D).

Si on remplace le produit $K\mu$ dans la première par l'inverse d'une constante a^2, elle devient

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=\Delta F-\frac{\partial\Theta}{\partial x},$$

$$\frac{F}{a^2}=\frac{1}{V^2}[F-l(lP+mG+nH)].$$

Introduisant, de même, les constantes b^2 et c^2 dans les autres équations, on obtient

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} & F + \frac{a^2 l}{V^2 - a^2}(lF + mG + nH) = 0, \\ & G + \frac{b^2 m}{V^2 - b^2}(lF + mG + nH) = 0, \\ & H + \frac{c^2 m}{V^2 - c^2}(lF + mG + nH) = 0. \end{aligned} \right.$$

La somme de ces équations, multipliées respectivement par les cosinus l, m et n, donne

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{a^2 l^2}{V^2 - a^2} + \frac{b^2 m^2}{V^2 - b^2} + \frac{c^2 n^2}{V^2 + c^2} + 1 = 0, \\ & \frac{l^2}{V^2 - a^2} + \frac{m^2}{V^2 - b^2} + \frac{n^2}{V^2 + c^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

C'est encore l'équation de la surface d'onde de Fresnel relative à la propagation de la lumière dans les milieux biréfringents à deux axes.

Pour des ondes perpendiculaires à l'axe des x, par exemple, on a $m = 0$ et $n = 0$; les deux vitesses sont b et c.

Si le milieu est symétrique par rapport à l'axe des x, les vitesses principales b et c sont égales. Pour une onde perpendiculaire à l'axe, $l = 1$; il n'y a qu'une vitesse de propagation b, quelle que soit la direction des oscillations électriques et magnétiques dans le plan de l'onde. Pour des ondes parallèles à l'axe, $l = 0$; les deux vitesses sont a et b.

L'onde de vitesse constante b correspond au rayon ordinaire dans les phénomènes d'optique.

Si l'on fait $V = b = c$ dans les équations (19), les dernières donnent $lF + mG + nH = 0$, c'est-à-dire que le potentiel vecteur est dans le plan de l'onde. La composante F est alors nulle, d'après la première; ce potentiel est donc perpendiculaire à l'axe, et, par suite, parallèle à la vibration de Fresnel, puisque l'onde est polarisée dans le plan de l'axe. La composante P et le courant u sont aussi nuls.

La perméabilité μ ayant des valeurs différentes α et β sui-

vant l'axe et suivant les directions perpendiculaires des y et des z, les équations (A), (B) et (C) donnent alors

$$\beta Y = \frac{i\omega}{V} Hl, \quad \beta Z = -\frac{i\omega}{V} Gl,$$

$$GY + HZ = 0;$$

$$\beta Y = -\frac{R}{V} l, \quad \beta Z = \frac{Q}{V} l,$$

$$QY + RZ = 0;$$

$$\frac{v}{w} = \frac{G}{H} = \frac{Q}{R}.$$

Ainsi, le courant est parallèle au potentiel vecteur et au champ électrique. Le champ magnétique leur est perpendiculaire, mais non exactement dans le plan de l'onde.

L'induction magnétique, au contraire, est toujours dans le plan de l'onde et perpendiculaire au potentiel vecteur, car les équations générales (A) donnent, avec trois perméabilités différentes α, β, et γ,

$$\alpha X = \frac{i\omega}{V}(nG - mH),$$

$$\beta Y = \frac{i\omega}{V}(lH - nF),$$

$$\gamma Z = \frac{i\omega}{V}(mF - lG);$$

il en résulte

$$l(\alpha X) + m(\beta Y) + n(\gamma Z) = 0,$$
$$F(\alpha X) + G(\beta Y) + H(\gamma Z) = 0.$$

La théorie de la réflexion cristalline se ferait encore, sans qu'il soit nécessaire d'y insister, d'après les mêmes principes qu'en optique.

CHAPITRE HUITIÈME

INDUCTION DANS LES CONDUCTEURS

CONDUCTEURS CYLINDRIQUES

459. Régime périodique. — Dans un milieu conducteur isotrope, que nous supposerons en même temps magnétique, les composantes u, v, w du courant (**437**) satisfont à la même équation différentielle

$$\Delta\theta = 4\pi\mu c \frac{\partial\theta}{\partial t}, \tag{1}$$

qui correspond au problème de la propagation de la chaleur ou au mouvement dans un liquide doué de frottement.

On voit d'abord que, si les courants varient avec le temps, la conductivité c du milieu se trouve multipliée par la perméabilité magnétique μ; les milieux magnétiques paraissent donc plus conducteurs, toutes choses égales, par suite de l'accroissement qui en résulte pour le flux d'induction.

Dans le cas général, les composantes du courant peuvent être des fonctions quelconques des coordonnées et du temps. Si le régime est périodique, on représentera la composante relative à une période déterminée par une expression complexe de la forme

$$u = \mathrm{J}e^{i\omega t} = (\mathrm{U} + i\mathrm{V})e^{i\omega t}, \tag{2}$$

dont l'amplitude J est elle-même complexe et dont la partie réelle est $\mathrm{U}\cos\omega t - \mathrm{V}\sin\omega t$.

Si l'on pose

$$m = 4\pi\mu c\omega = \frac{8\pi^2\mu c}{T},$$

l'équation (1), appliquée au courant u, devient $\Delta u = miu$ ou

$$\Delta J = miJ. \tag{3}$$

Si l'on égale séparément les termes réels et les coefficients des termes imaginaires, il en résulte

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta U &= -mV, \\ \Delta V &= mU. \end{aligned} \right. \tag{4}$$

460. Résistance des conducteurs cylindriques. — Ces considérations permettent de calculer la résistance d'un conducteur à section constante, soumis à un régime de courants alternatifs [1]. Quelle que soit d'ailleurs la forme du circuit, si son rayon de courbure reste très grand par rapport au diamètre du conducteur, on doit admettre que le courant est le même à chaque instant le long d'une ligne parallèle au contour et que chacune des portions se comporte comme une partie cylindrique; les composantes du courant dans la section droite du cylindre sont alors nulles.

Si l'on prend l'axe des x parallèle aux génératrices du cylindre, le courant u en chaque point ne dépend que des coordonnées y et z; les fonctions J, U et V ne renferment alors que ces deux coordonnées.

Le carré moyen du courant est

$$u_m^2 = \frac{1}{2}(U^2 + V^2). \tag{5}$$

Pour un cylindre parallèle ayant l'unité de longueur et l'unité de section, la résistance est l'inverse de c, de sorte que l'énergie calorifique dégagée par le courant pendant l'unité de temps est $\frac{u_m^2}{c}$.

[1] Sir W. Thomson, *Math. and Phys. Papers*, t. III, p. 491 et 511; 1890.

En désignant par dS un élément de la section droite du cylindre, l'énergie calorifique totale W relative à l'unité de longueur est

$$(6) \qquad W = \frac{1}{c}\int u_m^2 dS = \frac{1}{2c}\int (U^2 + V^2) dS.$$

Le courant total est

$$(7) \qquad I = \int u\, dS = \cos\omega t \int U\, dS - \sin\omega t \int V\, dS$$

et son carré moyen

$$(8) \qquad I_m^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\int U\, dS\right)^2 + \left(\int V\, dS\right)^2\right].$$

La résistance efficace R du cylindre, pour l'unité de longueur, ou sa résistance *ohmique* relative à des courants de cette période, est le quotient de l'énergie calorifique W par le carré moyen I_m^2 du courant.

D'autre part, la résistance R_0 de ce même cylindre aux courants continus est $\frac{1}{cS}\cdot$ On a donc

$$(9) \qquad \frac{R}{R_0} = \frac{W}{R_0 I_m^2} = cS\frac{W}{I_m^2} = S\,\frac{\int (U^2 + V^2)\, dS}{\left(\int U\, dS\right)^2 + \left(\int V\, dS\right)^2}.$$

Il est manifeste que la dernière expression est toujours plus grande que l'unité. Par suite de la tendance des courants à se porter vers la surface, la résistance ohmique du conducteur est augmentée quand il s'agit de courants alternatifs. Le rapport des résistances R et R_0 est égal au rapport inverse de la section réelle du conducteur à la section qui serait nécessaire pour qu'un courant continu d'intensité I_m dégage la même quantité d'énergie W.

Les intégrales relatives à la section S peuvent être transformées en intégrales relatives au contour s. Les équations (4)

donnent, en effet, par les relations de Green (**28**) appliquées aux fonctions de deux variables,

$$m\int U\,dS = \int \Delta V\,dS = \int \frac{\partial V}{\partial n}\,ds,$$

$$m\int V\,dS = -\int \Delta U\,dS = -\int \frac{\partial U}{\partial n}\,ds;$$

$$m\int (U^2+V^2)\,dS = \int (U\Delta V - V\Delta U)\,dS = \int \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds.$$

La substitution de ces valeurs donne

$$(6)' \qquad W = \frac{1}{2mc}\int \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds,$$

$$(7)' \qquad I = \frac{1}{m}\left[\cos\omega t\int \frac{\partial V}{\partial n}\,ds + \sin\omega t\int \frac{\partial U}{\partial n}\,ds\right],$$

$$(8)' \qquad I_m^2 = \frac{1}{2m^2}\left[\left(\int \frac{\partial V}{\partial n}\,ds\right)^2 + \left(\int \frac{\partial U}{\partial n}\,ds\right)^2\right],$$

$$(9)' \qquad \frac{R}{R_0} = mS\,\frac{\int \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds}{\left(\int \frac{\partial V}{\partial n}\,ds\right)^2 + \left(\int \frac{\partial U}{\partial n}\,ds\right)^2}.$$

461. Cylindres à section circulaire. — Lorsque la section du conducteur est circulaire et de rayon a, l'intensité du courant en chaque point ne dépend que de la distance à l'axe $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ ou du rayon vecteur. On a alors

$$\Delta J = \frac{d^2J}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dJ}{d\rho},$$

et l'équation (3) devient

$$\frac{d^2J}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dJ}{d\rho} = miJ,$$

ou, en posant

$$(10) \qquad q^2 = m\rho^2 = 4\pi\mu c\omega\rho^2,$$

$$(11) \qquad \frac{d^2J}{dq^2} + \frac{1}{q}\frac{dJ}{dq} = iJ.$$

C'est la définition des *fonctions cylindriques* utilisées par Fourier [1] dans la théorie de la chaleur.

A un facteur constant près I_0, lequel représente l'amplitude du courant sur l'axe, la fonction J est donnée par la série

$$J = 1 + i\frac{q^2}{2^2} + i^2\frac{q^4}{2^2.4^2} + i^3\frac{q^6}{2^2.4^2.6^2} + \cdots\cdots$$

Il en résulte

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} U &= 1 - \frac{q^4}{(2.4.)^2} + \frac{q^8}{(2.4.6.8)^2} - \cdots\cdots = ber\,q, \\ V &= \frac{q^2}{2^2} - \frac{q^6}{(2.4.6)^2} + \frac{q^{10}}{(2.4.6.8.10)^2} - \cdots\cdots = bei\,q. \end{aligned}\right.$$

Lord Kelvin applique respectivement à ces deux séries les dénominations de *berq* et *beiq*, par analogie avec les cosinus et sinus, dont les développements en fonction de l'arc présentent des formes comparables. On en déduit

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dU}{d\rho} &= \sqrt{m}\,\frac{dU}{dq} = \sqrt{m}\,ber'q, \\ \frac{dV}{d\rho} &= \sqrt{m}\,\frac{dV}{dq} = \sqrt{m}\,bei'q. \end{aligned}\right.$$

Comme on doit faire $n = \rho = a$ dans les intégrales relatives au contour de la section, les fonctions U et V, ainsi que leurs dérivées, n'interviennent que par leurs valeurs sur le contour et sont des constantes.

Si p est la valeur de q pour $\rho = a$ dans l'équation (10), c'est-à-dire si l'on pose $p^2 = ma^2$, on a alors, en tenant compte des équations (13),

$$(6)''\quad W = \frac{\pi a}{c\sqrt{m}}(ber\,bei' - bei\,ber')_p = \frac{S}{cp}(ber\,bei' - bei\,ber')_p,$$

$$(7)''\quad I = \frac{2S}{p}(bei'p\cos\omega t + ber'p\sin\omega t),$$

$$(8)''\quad I_m^2 = \frac{2S^2}{p^2}(bei'^2 + ber'^2)_p,$$

$$(9)''\quad \frac{R}{R_0} = \frac{p}{2}\left[\frac{ber\,bei' - bei\,ber'}{ber'^2 + bei'^2}\right]_p = \frac{p}{2}f(p).$$

[1] FOURIER, *Œuvres*, t. I, ch. VI.

Pour un conducteur de nature déterminée, l'accroissement de résistance ne dépend que du paramètre p, c'est-à-dire de la valeur de ωa^2, ou du produit de la fréquence du courant par la section du conducteur.

Lord Kelvin a donné, avec quelques corrections ultérieures, la Table suivante des fonctions *ber* et *bei* et de leurs dérivées pour différentes valeurs de la variable q.

q	$ber\,q$	$bei\,q$	$ber'\,q$	$bei'\,q$	$\frac{q}{2}f(q)$
0	1	0	0	0	1
0,5	0,999	0,0625	−0,0078	0,24992	1
1	0,9844	0,2496	−0,062446	0,49740	1,0056
1,5	0,9211	0,5576	−0,210011	0,73025	1,0258
2	0,7517	0,9723	−0,4931	0,9170	1,0805
2,5	0,3999	1,4571	−0,9436	0,9983	1,1747
3	−0,2214	1,9376	−1,5698	0,8805	1,3180
3,5	−1,1936	2,2833	−2,3361	0,4353	1,4920
4	−2,5634	2,2927	−3,1347	−0,4911	1,6778
4,5	−4,2991	1,6859	−3,7537	−2,0526	1,8628
5	−6,2301	0,1160	−3,8442	−4,3538	2,0430
5,5	−7,9735	−2,7902	−2,9070	−7,3729	2,2190
6	−8,8583	−7,3347	−0,2931	−10,8462	2,3937
8	20,9739	−35,0167	38,2944	−7,6615	3,0956
10	138,840	56,370	51,207	135,31	3,7980
15	−2967,26	−2952,72	91,061	−4088,5	5,5620
20	47489,2	114774,4	−48802,8	111853,7	7,3277
30	$-4544{,}10^4$	$11024{,}10^4$	$-10933{,}10^4$	$4383{,}10^4$	10,8765

La fonction $f(q)$ est constamment décroissante, mais d'une manière très lente; on verra plus loin qu'elle tend vers la valeur limite $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071$.

Si le conducteur est un *tube creux*, dont les rayons extérieur et intérieur a et a' correspondent aux paramètres p et p', on devra remplacer les intégrales des équations (6)′ et (8)′ par la différence de leurs valeurs relatives aux deux surfaces et faire la même transformation dans les équations (6)″ et (8)″. On aura alors

$$(6)''' \quad W = \frac{\pi}{c\sqrt{m}}\left[a(ber\,bei' - bei\,ber')_p - a'(ber\,bei' - bei\,ber')_{p'}\right],$$

$$(8)''' \quad I_m^2 = \frac{2\pi^2}{m}\left[(a\,bei'p - a'\,bei'p')^2 + (a\,ber'p - a'\,ber'p')^2\right].$$

L'inverse de la résistance normale R_0 ayant alors pour valeur $c\pi(a^2-a'^2)$, on en déduit encore

$$(9)''' \quad \frac{R}{R_0}=\frac{p-p'}{2}\cdot\frac{(a+a')\left[a(ber\,bei'-bei\,ber')_p-a'(ber\,bei'-bei\,ber')_{p'}\right]}{(a\,bei'p-a'\,bei'p')^2+(a\,ber'p-a'\,ber'p')^2}.$$

462. Localisation superficielle des courants. — Les courants se portent de plus en plus vers le contour de la section à mesure que la fréquence augmente.

Si l'on rétablit le facteur constant I_0 dans les valeurs (12) des fonctions U et V, le courant u à la distance ρ de l'axe peut s'écrire, en posant

$$(14) \qquad \frac{ber\,q}{\cos\alpha}=\frac{bei\,q}{\sin\alpha}=\sqrt{ber^2 q+bei^2 q},$$

$$(15) \qquad u=I_0\sqrt{ber^2 q+bei^2 q}\cos(\omega t+\alpha).$$

L'amplitude et la phase augmentent d'abord très lentement avec la valeur de q, c'est-à-dire avec le rayon ρ, puis d'une manière plus rapide.

En posant

$$(16) \qquad \frac{bei'p}{\cos\beta}=-\frac{ber'p}{\sin\beta}=\sqrt{bei'^2 p+ber'^2 p},$$

l'expression $(7)''$ du courant total s'écrira aussi

$$(17) \qquad I=I_0\frac{2S}{p}\sqrt{ber'^2 p+bei'^2 p}\cos(\omega t+\beta).$$

Le carré du rapport de l'amplitude du courant u en chaque point à celle du courant total est

$$\frac{u_m^2}{I_m^2}=\frac{p^2}{4S^2}\,\frac{ber^2 q+bei^2 q}{ber'^2 p+bei'^2 p}=\frac{2\mu c}{T a^2}\,\frac{ber^2 q+bei^2 q}{ber'^2 p+bei'^2 p},$$

et l'avance de phase $\delta=\alpha-\beta$ du premier sur le second se déterminera par la relation

$$\operatorname{tang}\delta=\frac{bei\,q\,bei'p+ber\,q\,ber'p}{ber\,q\,bei'p-bei\,q\,ber'p}.$$

L'avance de phase δ_1 du courant superficiel sur le courant total est alors, en faisant $q=p$,

$$\operatorname{tang}\delta_1=\left[\frac{bei\,bei'+ber\,ber'}{ber\,bei'-bei\,ber'}\right]_p=\frac{1}{f(p)}\left[\frac{bei\,bei'+ber\,ber'}{ber'^2+bei'^2}\right].$$

Enfin le rapport de la section réelle S du conducteur à la section S' dans laquelle le courant efficace I_m dépenserait la même énergie calorifique est

$$\frac{S}{S'}=\frac{R}{R_0}=\frac{p}{r}f(p).$$

Ce rapport reste très voisin de l'unité jusqu'à ce que le paramètre p soit supérieur à 2 et croît ensuite rapidement.

463. Formules approchées. — La Table précédente permettrait encore de déterminer, par une méthode d'interpolation, toutes les quantités qui correspondent à des valeurs quelconques des variables q et p, mais il est commode d'en avoir une évaluation approchée.

Nous remarquerons d'abord que les courants u et I ne diffèrent d'une manière sensible du courant axial qu'à partir du moment où les variables q ou p sont supérieures à 2. On a, en effet, pour $q=2$,

$$\sqrt{ber^2+bei^2}=1,2290,$$

$$\sqrt{ber'^2+bei'^2}=1,0412,$$

$$\alpha=52°\,17',\qquad \beta=28°\,16',$$

$$\frac{q}{2}f(q)=1,0805.$$

Tant qu'on reste entre ces limites, le problème ne présente pas d'intérêt pratique, puisque la résistance ne varie pas d'un dizième et que l'amplitude du courant superficiel n'est supérieure que d'un cinquième à celle du courant axial.

A mesure que les paramètres augmentent, on reconnaît aisément, par une traduction graphique, que les courbes représentant les valeurs de $\frac{q}{2}f(q)$, α et β ont des asymptotes

rectilignes dont elles se rapprochent très rapidement. On peut alors écrire, avec une grande approximation,

$$\frac{p}{2}f(p) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(p + \frac{3}{4}\right) = 0{,}35355\,(p + 0{,}75),$$

$$\frac{\alpha}{\pi} = 0{,}2253\,(q - 0{,}58),$$

$$\frac{\beta}{\pi} = 0{,}2244\,(p - 1{,}60).$$

Quand on donne seulement la valeur 3 aux variables p ou q, l'erreur relative n'atteint pas 0,01 pour la première formule; elle est de 0,04 ou 0,05 pour les deux suivantes. Au delà, les erreurs restent de l'ordre des millièmes.

La quantité la plus utile à considérer étant la résistance R du conducteur, on aura ainsi, en remplaçant p par sa valeur $a\sqrt{m} = 2\pi a\sqrt{\frac{2\mu c}{T}}$,

$$(18) \qquad \frac{R}{R_0} = 0{,}35355\left(2\pi a\sqrt{\frac{2\mu c}{T}} + 0{,}75\right).$$

Cette résistance tend à devenir simplement proportionnelle au contour de la section.

Quant aux amplitudes des courants u et I, leurs variations sont beaucoup plus rapides. A partir de $q > 5$, on peut les représenter d'une manière très exacte, par des exponentielles dont l'exposant est fonction linéaire de q et p.

464. Cas extrême. — Si le rayon a est assez grand, ou les oscillations assez rapides, pour que les courants s'éteignent à une petite profondeur x au-dessous de la surface, le rayon ρ diffère très peu de a et l'équation (1) appliquée à la composante u du courant peut s'écrire, en posant $\rho = a - x$,

$$(19) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial x} = 4\pi\mu c\,\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Elle admet une solution complexe de la forme

$$(20) \qquad u = Ae^{-\alpha x}e^{i(\omega t - \beta x)} = Ae^{-(\alpha+\beta i)x}e^{i\omega t},$$

dont la partie réelle est $Ae^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x)$.

Si l'on représente encore par m le produit $4\pi\mu c\omega$, les constantes α et β seront déterminées par la condition générale

$$(\alpha+\beta i)^2+\frac{\alpha+\beta i}{a}=mi,$$

qui donne, en égalant les réelles et les imaginaires,

$$(21) \qquad \alpha^2-\beta^2+\frac{\alpha}{a}=0, \qquad 2\alpha\beta+\frac{\beta}{a}=m.$$

Si l'on pose

$$\gamma=a\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha}=a\alpha+a\frac{\beta^2}{\alpha},$$

il en résulte, par la première des équations (21),

$$a\frac{\beta^2}{\alpha}=\gamma-a\alpha=1+a\alpha,$$

$$2a\frac{\beta^2}{\alpha}=\gamma+1, \qquad 2a\alpha=\gamma-1,$$

$$4a^2\beta^2=\gamma^2-1.$$

Les constantes α et β sont ainsi exprimées en fonction de γ; la seconde des équations (21) donne alors

$$\gamma^2(\gamma^2-1)=4m^2a^4=4p^4,$$

$$2\gamma^2=1+\sqrt{1+16p^4}.$$

Lorsque la valeur de p est très grande, il reste simplement

$$\gamma^2=2p^2, \qquad \alpha^2=\beta^2=\frac{p^2}{2a^2}=\frac{m}{2}.$$

Le résultat est le même que si l'on avait fait $a=\infty$ dans l'équation différentielle (19).

L'expression (20) montre que les courants s'amortissent à partir de la surface et leur perte de phase βx est proportionnelle à l'épaisseur.

Le carré moyen du courant u est

$$u_m^2=\frac{A^2}{2}e^{-2\alpha x}.$$

Comme ce courant n'est sensible que dans une très petite épaisseur, on peut faire $dS = 2\pi a dx$ et prendre ensuite les intégrales entre les limites $x = 0$ et $x = \infty$. L'énergie calorifique dégagée par unité de longueur est alors

$$W = \frac{1}{c}\int u_m^2 dS = \frac{\pi a}{c} A^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha x} dx = \frac{\pi a}{2c\alpha} A^2.$$

Le courant total a pour expression

$$I = 2\pi a \int_0^\infty u dx = 2\pi a A \frac{e^{i\omega t}}{\alpha + \beta i} = 2\pi a A \frac{\alpha - \beta i}{\alpha^2 + \beta^2} e^{i\omega t}$$

ou, en prenant les termes réels,

$$I = 2\pi a \frac{A}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha \cos\omega t + \beta \sin\omega t).$$

Le carré moyen du courant est alors

$$I_m^2 = (2\pi a)^2 \frac{A^2}{2(\alpha^2 + \beta^2)} = 2\pi \frac{A^2}{\alpha^2 + \beta^2} S,$$

et la résistance ohmique,

$$R = \frac{W}{I_m^2} = \frac{a}{cS} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\alpha} = R_0 \frac{\gamma}{4}.$$

Pour une valeur très grande de p, il reste simplement

$$\frac{R}{R_0} = \frac{p\sqrt{2}}{4} = \frac{p}{2\sqrt{2}};$$

c'est la valeur limite de la fonction représentée par la dernière colonne de la Table de Lord Kelvin.

Dans ce cas, le second terme de l'équation différentielle (19) étant négligeable, le courant u est

$$u = A e^{-x\sqrt{\frac{m}{2}}} \cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{m}{2}}\right).$$

C'est l'équation de Fourier relative à la transmission de la

chaleur dans le sol par suite des variations périodiques de la température à la surface.

L'épaisseur ε pour laquelle l'amplitude est réduite à la n^e partie de sa valeur A sur la surface est

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{m}}\,\mathfrak{L}.n = \frac{\mathfrak{L}.n}{\sqrt{2\pi\mu c\omega}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{T}{\mu c}}\,\mathfrak{L}.n.$$

La perte de phase par rapport au courant superficiel est alors $\mathfrak{L}.n$, ce qui donnerait, pour $n = 1000$,

$$\mathfrak{L}.n = 6,9078 > 2\pi.$$

Le courant est donc en retard de plus d'une période sur l'état de la surface quand l'amplitude est réduite au millième.

465. Application au cuivre. — Il est intéressant de voir comment on fera un usage numérique de ces formules dans le cas des conducteurs les plus généralement employés.

Pour le cuivre pur, on a $\mu = 1$ et $c = \frac{1}{1600}$, ce qui donne

$$2\pi\sqrt{c} = \frac{2\pi}{40} = 0,1571.$$

Si les oscillations sont très rapides, ou la section du conducteur assez grande, l'épaisseur pour laquelle le courant se réduit au millième est

$$\varepsilon = \frac{6,9078}{0,1571}\sqrt{T} = 44^c\sqrt{T},$$

ce qui donne, par exemple :

T	1^s	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}
ε	44^c	$4^c,4$	$0^c,44$	$0^c,044$	$0^c,0044$.

On a encore, dans le cas général,

$$p = a\sqrt{m} = \frac{2a}{\sqrt{T}}\,\frac{2\pi\sqrt{c}}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{9\sqrt{T}}.$$

La valeur de p sera ainsi déterminée par le diamètre $2a$ du

conducteur et par la fréquence du courant ; les nombres de la dernière colonne de la Table donneront la valeur correspondante du rapport des résistances.

Le calcul se simplifie beaucoup lorsque la valeur de p est supérieure à 2,5; la formule (18) devient alors

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a}{9\sqrt{T}} + \frac{3}{8}\right) = 0,7071\left(\frac{a}{9\sqrt{T}} + 0,375\right).$$

S'il y a seulement 25 périodes par seconde, le diamètre du conducteur à partir duquel cette expression approchée peut s'appliquer est

$$2a = \frac{9}{5}\,2,5 = 4^c,5.$$

Avec des fils plus minces, la variation de résistance serait trop faible pour qu'il y ait intérêt à en tenir compte dans la pratique industrielle.

Pour les courants téléphoniques, la fréquence moyenne est d'environ 400 et l'épaisseur limite se réduit à $1^c,125$. Les conducteurs ayant toujours un diamètre beaucoup moindre, la distribution des courants vers la surface n'intervient encore que pour une très faible part dans le phénomène.

CONDUCTEURS DE FORME QUELCONQUE

466. Magnétisme de rotation. — A la suite d'une observation de Gambey sur l'amortissement des oscillations d'une boussole, Arago [1] a montré en 1824 qu'une aiguille aimantée, placée au-dessus d'un disque métallique animé d'un mouvement de rotation, est entraînée par le disque et tend à prendre une rotation de même sens.

L'action qui s'exerce sur un pôle magnétique dans ces conditions a trois composantes : l'une tangentielle qui entraîne le pôle dans le sens du mouvement, une autre normale qui tend

[1] F. Arago, *Ann. de chim. et de phys.* [2], t. XXVII, p. 363; 1824 et t. XXVIII, p. 325; 1825.

à l'éloigner du disque, enfin une troisième dirigée suivant le rayon. Cette dernière est nulle quand le pôle est à une distance de l'axe égale environ aux deux tiers du rayon du disque; plus près de l'axe, le pôle est attiré vers le centre ; plus près des bords, il semble repoussé vers le bord.

L'entraînement de l'aiguille est plus marqué avec un métal bon conducteur comme le cuivre, qu'avec un métal moins conducteur, comme le laiton et surtout l'antimoine. Quand on produit une interruption dans la continuité du disque, par exemple avec des traits de scie suivant les rayons, l'effet est très notablement affaibli.

Ces phénomènes ont été attribués d'abord à une forme particulière de magnétisme et désignés sous le nom de *magnétisme de rotation*. Ils sont produits, en réalité, par des courants d'induction développés dans le métal; mais c'est seulement après la grande découverte de Faraday qu'ils ont été rapportés à leur véritable cause.

467. Feuillets conducteurs. — Le problème soulevé par l'expérience d'Arago est celui de l'induction dans un conducteur à deux dimensions. Maxwell a résolu ce problème d'une manière très élégante, en employant une méthode analogue à celle des images électriques.

Considérons un conducteur homogène infiniment mince, qu'on pourra supposer réduit à une surface, et dans lequel existent, pour une cause quelconque, des courants qui ne sont point amenés de l'extérieur par des électrodes. Ces courants sont nécessairement fermés et les lignes de courant ne peuvent se couper entre elles. L'espace annulaire compris entre deux lignes de courant infiniment voisines peut être considéré comme un conducteur linéaire parcouru par un courant d'intensité $d\mathrm{I}$. Ce courant peut être remplacé par un feuillet de même puissance et de même contour.

Si l'on décompose ainsi la surface du conducteur en bandes infiniment minces par des lignes de courant, on voit que, pour un point extérieur, l'ensemble des courants sera équivalent à un feuillet complexe (**246**), dont la puissance magnétique U en chaque point est égale à la somme de celles qui correspondent aux feuillets superposés. Sur la face positive du feuillet, les courants tournent en sens inverse des aiguilles

d'une montre autour des régions où la fonction U passe par une valeur maximum. Cette fonction est d'ailleurs nulle sur le contour, si la lame est limitée.

Le long d'une ligne de courant, la valeur de U est constante; les lignes de courant sont les lignes de niveau de cette fonction. Un élément dn d'une orthogonale n aux lignes de courant est coupé normalement par un courant d'intensité $\frac{\partial U}{\partial n} dn$, dirigé à droite d'un observateur qui, en suivant cette ligne, marcherait vers les points où la fonction U est croissante. Enfin un élément ds' d'une courbe quelconque est coupé par un courant d'intensité $\frac{\partial U}{\partial s'} ds'$, mais qui n'est plus normal.

Le potentiel magnétique du feuillet à l'extérieur est

$$V = \int U d\omega.$$

Cette fonction est discontinue quand on traverse la surface; les deux valeurs V_2 et V_1 qu'elle prend de part et d'autre du feuillet, sur la face positive et sur la face négative, sont liées par la relation

$$V_2 - V_1 = 4\pi U.$$

La composante du champ magnétique normale à la surface est continue, car elle représente, de part et d'autre, le flux d'induction par unité de surface. Il en est de même pour la composante tangentielle suivant une ligne de courant, puisqu'alors la dérivée de U est nulle.

Au contraire, la composante tangentielle suivant une orthogonale aux lignes de courant est discontinue, et on a, de part et d'autre de la surface,

$$\frac{\partial V_2}{\partial n} = \frac{\partial V_1}{\partial n} + 4\pi \frac{dU}{dn}.$$

On a vu aussi (**261**) qu'en appelant p l'inverse de la distance d'un point M à l'élément dS d'un feuillet, le potentiel de l'élément au point considéré est $U \frac{\partial p}{\partial n} dS$. Or le produit $U p dS$ est

le potentiel que produirait une couche de densité U distribuée sur cet élément. Si l'on désigne par Q le potentiel d'une couche répandue sur la surface du feuillet complexe et dont la densité en chaque point est égale à la puissance magnétique du feuillet, on aura donc

$$V = \frac{\partial Q}{\partial n}.$$

468. Cas d'un feuillet plan. — Considérons, en particulier, une lame conductrice indéfinie, située dans le plan des xy, et supposons que la face positive des courants soit à la partie supérieure. Comme on a alors $dn = -dz$, le potentiel du feuillet magnétique correspondant, en un point dont les coordonnées sont x, y et z, sera

$$V = -\frac{\partial Q}{\partial z}. \tag{1}$$

Dans le cas actuel, la fonction Q est symétrique par rapport au plan des xy et ne change pas quand on remplace z par $-z$. La fonction V, au contraire, change de signe avec z, et sa valeur absolue est la même en deux points symétriques par rapport au feuillet. On a donc, pour les points correspondants situés du côté de la face positive ou de la face négative,

$$\left\{\begin{aligned} V_2 &= -\frac{\partial Q}{\partial z} = 2\pi U, \\ V_1 &= -\frac{\partial Q}{\partial z} = -2\pi U. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Les composantes X et Y du champ magnétique sur la face positive, et les valeurs de ces composantes X′ et Y′ sur la face négative, sont données par les équations

$$\left\{\begin{aligned} X &= -\frac{\partial V_2}{\partial x} = -2\pi\frac{\partial U}{\partial x} = -X', \\ Y &= -\frac{\partial V_2}{\partial y} = -2\pi\frac{\partial U}{\partial y} = -Y'. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Examinons maintenant les courants dans la lame. La com-

posante u, parallèle à l'axe des x, du courant qui coupe une longueur égale à l'unité parallèle à l'axe des y, est

$$u = -\frac{\partial U}{\partial y},$$

et la composante analogue v, relative à l'axe des y,

$$v = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Si l'on appelle σ la résistance de la lame par unité de surface, la chute de potentiel électrique, pour une longueur égale à l'unité, aura pour composantes σu et σv; cette chute de potentiel n'est autre chose que la force électromotrice ou le champ électrique suivant les mêmes directions. On a donc, en vertu des relations trouvées précédemment (**433**),

$$-\sigma\frac{\partial U}{\partial y} = P = -\frac{\partial F}{\partial t},$$

$$\sigma\frac{\partial U}{\partial x} = Q = -\frac{\partial G}{\partial t}.$$

Il en résulte pour la face positive, en tenant compte des équations (2),

$$(4)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial F}{\partial t} = \dfrac{\sigma}{2\pi}\dfrac{\partial^2 Q}{\partial y\,\partial z}, \\[2ex] -\dfrac{\partial G}{\partial t} = -\dfrac{\sigma}{2\pi}\dfrac{\partial^2 Q}{\partial z\,\partial x}. \end{cases}$$

Les équations (A) du champ magnétique (**432**) donnent

$$\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y} = X = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z},$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z} = Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y\,\partial z},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} = Z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}.$$

Ces équations sont satisfaites en posant

$$F = -\frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad G = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad H = 0;$$

la vérification pour les premières est évidente et la dernière se réduit à $\Delta Q = 0$.

S'il existe en même temps un système extérieur d'aimants ou de courants, on sait (357) que son action sur une surface qui l'entoure est équivalente à celle d'un ensemble convenable de courants superficiels. Le potentiel magnétique de ce système, à la surface positive du feuillet que nous considérons, pourra donc être exprimé par une fonction Q′ analogue à la fonction Q; on aura alors

$$V = -\frac{\partial(Q+Q')}{\partial z};$$

$$F = -\frac{\partial(Q+Q')}{\partial y}, \qquad G = \frac{\partial(Q+Q')}{\partial x}.$$

Les équations (4) deviennent, en posant $\frac{\sigma}{2\pi} = R$,

$$(5) \qquad \begin{cases} R\,\dfrac{\partial^2 Q}{\partial y\,\partial z} = \dfrac{\partial^2(Q+Q')}{\partial y\,\partial t}, \\[2ex] R\,\dfrac{\partial^2 Q}{\partial z\,\partial x} = \dfrac{\partial^2(Q+Q')}{\partial x\,\partial t}. \end{cases}$$

En intégrant la première par rapport à y, ou la seconde par rapport à x, on obtient

$$(6) \qquad R\,\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial(Q+Q')}{\partial t}.$$

On devrait ajouter au second membre une fonction arbitraire de t, mais cette fonction disparaîtra toutes les fois que l'on prendra une dérivée partielle de U ou de $\frac{\partial Q}{\partial z}$, par rapport à x ou à y, pour calculer les composantes du courant; il n'est donc pas nécessaire d'en tenir compte.

Supposons d'abord qu'il n'y ait pas d'aimants ou de courants

extérieurs, c'est-à-dire que Q' soit nul. Ce cas est celui d'un système de courants établis dans le feuillet et abandonnés à eux-mêmes ; ces courants agiraient l'un sur l'autre par leur induction mutuelle et perdraient rapidement leur énergie par l'effet de la résistance du conducteur. L'équation (6) est alors satisfaite par une fonction de la forme

$$Q = f(x, y, z + Rt). \tag{7}$$

Par suite, la valeur de la fonction Q, à l'époque t, en un point situé à la distance z du plan, du côté de la face positive, et dont les coordonnées sont x, y et z, est la même que pour l'époque $t = 0$ au point x, y et $z + Rt$.

Il en résulte que, si un système de courants a été établi dans un plan indéfini et uniforme, et ensuite abandonné à lui-même, le champ magnétique produit par ces courants sur un point situé du côté de la face positive est le même que si le plan se déplaçait parallèlement à la normale, et du côté négatif, avec la vitesse constante R. La diminution de force électromotrice due à l'affaiblissement des courants est exactement représentée par la diminution du champ magnétique qui résulte en chaque point de ce mouvement fictif.

469. Images magnétiques. — L'intégrale de l'équation (6) donne, pour les points situés à la surface du feuillet,

$$Q + Q' = \int R \frac{\partial Q}{\partial z} dt. \tag{8}$$

Si nous supposons que, les fonctions Q et Q' étant d'abord nulles, le champ extérieur soit créé subitement du côté positif de manière que le potentiel qui lui correspond passe brusquement de 0 à Q', on aura alors au début et pour la surface du feuillet, puisque l'intégrale est nulle,

$$Q = -Q'.$$

Ainsi, pour tous les points de la lame et, par suite, pour tous les points situés du côté de la face négative, le système initial des courants produit un effet égal et de signe contraire à celui du système réel placé du côté positif. Leur effet est

donc le même que celui d'un champ magnétique identique et de signe contraire à celui du système des aimants ou courants extérieurs.

Pour les points situés du côté positif, l'effet des courants est le même que celui d'un système de même signe qui lui serait symétrique par rapport au plan conducteur ; c'est ce que nous appellerons l'*image positive* du système.

L'action des courants de chaque côté du feuillet peut donc être considérée comme produite par une *image* du champ magnétique, positive ou négative, c'est-à-dire de même signe ou de signe contraire, suivant que le point considéré est du côté positif ou négatif du feuillet.

Si la conductibilité du feuillet était parfaite, on aurait $R = o$; le second membre de l'équation (8) serait toujours nul et la condition $Q = -Q'$ satisfaite à tout instant. La lame conductrice serait un écran absolu (**445**) pour tous les points situés du côté négatif. Le champ des courants induits dans la lame serait représenté à chaque instant, pour tous les points de l'espace, par celui de l'une ou de l'autre des deux images immobiles du système extérieur.

En réalité, la résistance R a toujours une valeur finie. Les courants produits par l'introduction brusque d'un système magnétique commencent aussitôt à s'affaiblir et leur effet, de part et d'autre, est à chaque instant représenté par celui des deux images du système qui s'éloigneraient du feuillet de part et d'autre suivant une direction normale, avec la vitesse commune R.

470. Induction d'un système variable. — Le principe des images permet de déterminer les courants induits par les variations d'un système magnétique quelconque M, que nous supposerons situé du côté positif du feuillet.

La fonction Q', qui détermine l'action magnétique, variera de $\frac{\partial Q'}{\partial t}dt$ pendant que le système varie de $\frac{\partial M}{\partial t}dt$. On peut considérer cette dernière variation comme étant elle-même un système magnétique, et supposer qu'à l'instant t il s'est formé brusquement, du côté négatif du feuillet, une image positive de $\frac{\partial M}{\partial t}dt$, laquelle s'éloigne ensuite dans la direc-

tion normale avec une vitesse R. Si le système varie d'une manière continue, on imaginera que les différentes images des variations, relatives aux intervalles de temps successifs, se meuvent suivant la même loi, dès qu'elles sont formées, et constituent ainsi des *traînées* continues d'images.

Supposons, par exemple, qu'un pôle positif $+m$ se meuve en ligne droite avec une vitesse constante u, parallèlement au feuillet, et admettons que ce pôle ait été créé brusquement au point A (fig. 109), ce qui donne naissance à une image $+m$ au point symétrique B.

Au bout d'un temps infiniment petit δt, le pôle vient en A′ (fig. 110) à la distance $u\delta t$. On peut imaginer encore que

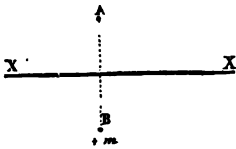


Fig. 109.

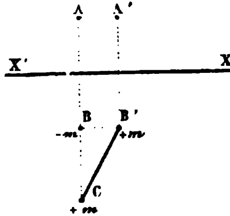


Fig. 110.

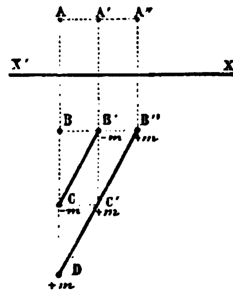


Fig. 111.

l'opération a été faite brusquement, auquel cas elle équivaut à l'introduction subite de deux autres pôles, l'un $-m$ en A et l'autre $+m$ en A′, donnant des images de même signe en B et B′; mais, à ce moment, la première image $+m$ qui se trouvait en B est venue en C à la distance $R\delta t$. A l'époque $2\delta t$, la masse $+m$ se trouve en A″ (fig. 111) : il existe alors deux images égales à $-m$ en C et B′, en même temps que trois images positives en B″, C′ et D ; et ainsi de suite.

Si le mouvement est continu, on voit que l'action que subit le pôle mobile est celle de deux lignes magnétiques indéfinies, l'une positive et l'autre négative. En désignant par U la résultante $\sqrt{u^2+R^2}$ des deux vitesses, la densité de ces deux lignes serait $\lambda = \frac{m}{U\delta t}$ et leur distance parallèle au mouvement $u\delta t$; le

produit de la densité par cette distance, ou l'aimantation par unité de longueur, est donc $\frac{mu}{U}$. Ces deux lignes forment un *ruban* aimanté uniformément dans une direction parallèle au mouvement du pôle ; partant du point symétrique de la position actuelle du pôle, ce ruban est situé dans un plan normal au feuillet, passant par la trajectoire du pôle, et fait avec le feuillet un angle dont la tangente est égale au rapport $\frac{u}{R}$.

Si le pôle $+m$, au lieu de décrire une ligne droite, est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe perpendiculaire au feuillet, il suffit de supposer que le ruban qui précède forme une hélice sur le cylindre droit qui a pour base la circonférence décrite par le pôle.

Pour un aimant réduit à ses deux pôles et tournant autour de son centre, les courants induits sont aussi équivalents au système de deux rubans magnétiques enroulés sur le même cylindre. Enfin, les courants produits par le déplacement d'un système magnétique quelconque animé d'un mouvement uniforme, sont équivalents à un ensemble de rubans magnétiques qui correspondent, point par point, aux différentes masses du système.

471. Action des courants induits. — Pour calculer l'effet de ces images, désignons par Q_τ la valeur du potentiel Q, déterminé par les courants du feuillet, au point dont les coordonnés sont x, y, $z+R\tau$, et à l'époque $t-\tau$; par Q'_τ la valeur du potentiel Q', déterminé par le système magnétique au point x, y, $-(z+R\tau)$ et à la même époque $t-\tau$. Le potentiel Q_τ étant une fonction des coordonnées x, y, $z+R\tau$ et de $t-\tau$, on a, en tenant compte de (6),

$$\frac{\partial Q_\tau}{\partial \tau} = R\frac{\partial Q_\tau}{\partial z} - \frac{\partial Q_\tau}{\partial t} = \frac{\partial Q'_\tau}{\partial t}. \tag{9}$$

L'intégration par rapport à la variable τ, entre les limites $\tau=0$ et $\tau=\infty$, donnera la valeur de la fonction Q pour l'époque t, c'est-à-dire

$$Q_\tau = \int_0^\infty \frac{\partial Q'_\tau}{\partial t}\,d\tau = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty Q'_\tau\,d\tau. \tag{10}$$

La fonction Q_τ, qui fournit la solution du problème, puisqu'elle permet de calculer en chaque point l'action des courants induits, est ainsi déterminée par la fonction Q'_τ définie à chaque instant par l'état et le mouvement du système magnétique extérieur.

472. Cas d'un pôle unique. — On peut appliquer ce mode de calcul au cas d'un pôle unique de masse m, qui se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme en présence d'un plan conducteur indéfini; mais il est plus simple de traiter le problème directement par la considération des images magnétiques.

Examinons d'abord le champ magnétique que produit sur un point A (fig. 112) une ligne droite homogène BB_1 de den-

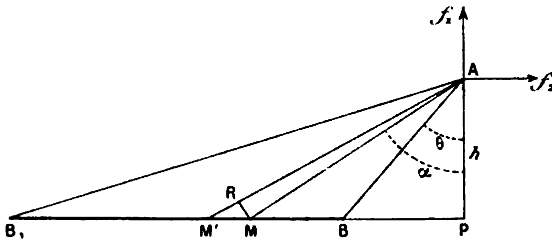


Fig. 112.

sité λ. Menons la normale $AP = h$ à la droite et désignons par α l'angle du rayon vecteur $AM = r$ avec cette normale. Le champ de l'élément $MM' = ds$ au point A est $\frac{\lambda\, ds}{r^2}$. On a d'ailleurs

$$MR = ds \cos\alpha = ds\,\frac{h}{r} = r\, d\alpha;$$

par suite,

$$\frac{\lambda\, ds}{r^2} = \frac{\lambda\, d\alpha}{h}.$$

Ce champ est donc le même que celui de l'arc correspondant $d\alpha$ de la circonférence ayant l'unité de rayon et dont la densité serait $\frac{\lambda}{h}$.

En appelant θ et θ_1 les valeurs de l'angle α relatives aux extrémités B et B_1, les composantes du champ f de la droite, suivant les directions normale et parallèle, sont

$$f_1 = \frac{\lambda}{h}\int \cos\alpha\, d\alpha = \frac{\lambda}{h}(\sin\theta_1 - \sin\theta),$$

$$f_2 = \frac{\lambda}{h}\int \sin\alpha\, d\alpha = \frac{\lambda}{h}(\cos\theta - \cos\theta_1).$$

Il est facile de vérifier que le champ lui-même est bissecteur de l'angle apparent $\theta_1 - \theta$ de la droite et proportionnel à la

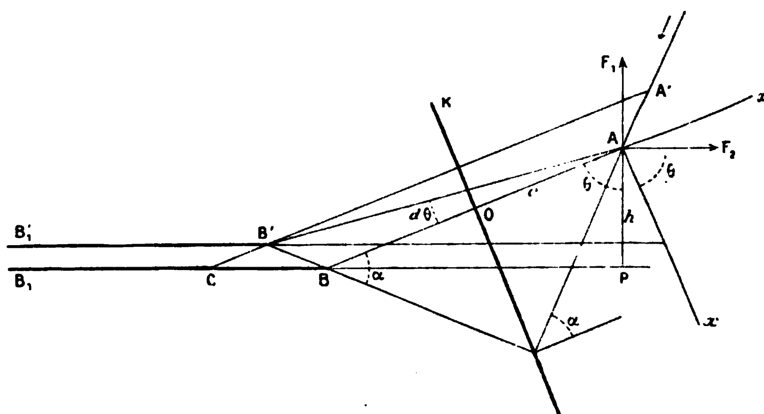


Fig. 113.

longueur de la corde. Si le point B_1 s'éloigne indéfiniment vers la gauche, l'angle θ_1 est droit et il reste

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} f_1 &= \frac{\lambda}{h}(1 - \sin\theta), \\ f_2 &= \frac{\lambda}{h}\cos\theta. \end{aligned} \right.$$

Supposons maintenant qu'un pôle de masse $+m$, animé d'un mouvement rectiligne et uniforme avec la vitesse u dans la direction A'A (fig. 113), se trouve en présence d'un feuillet conducteur K. Désignons par α l'angle de la trajectoire A'A avec la normale au feuillet et par c la distance OA

du pôle à une époque déterminée, après qu'il a déjà marché depuis un temps infini sans traverser le feuillet.

La direction des traînées magnétiques BB_1 et $B'B'_1$, qui correspondent à deux positions successives A' et A du pôle, est déterminée par le triangle BCB' des vitesses. L'angle B' étant égal à $\pi - \alpha$ et l'angle C complémentaire de θ, on aura

$$U^2 = R^2 + u^2 + 2Ru\cos\alpha,$$
$$U\cos\theta = u\sin\alpha, \qquad U\sin\theta = R + u\cos\alpha;$$
$$\tang\theta = \frac{R + u\cos\alpha}{u\sin\alpha}.$$

Appelant $h + dh$ et $\theta + d\theta$ les valeurs des quantités h et θ correspondant à la traînée négative $B'B'_1$, les composantes f'_1 et f'_2 seront données par les équations (11) prises en signes contraires avec ces nouvelles valeurs des variables. Les composantes F_1 et F_2 du champ résultant sont donc les différentielles de ces expressions, prises en signes contraires (11); il en résulte

$$F_1 = \frac{\lambda}{h^2}\left[h\cos\theta\, d\theta + (1 - \sin\theta)\, dh\right],$$

$$F_2 = \frac{\lambda}{h^2}\left[h\sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, dh\right].$$

On a d'ailleurs la relation $h = 2c\cos\theta$ et les triangles ABB' et BCB donnent

$$d\theta = \frac{u\sin\alpha}{2c}\,\delta t = \frac{U\cos\theta}{2c}\,\delta t,$$
$$-dh = R\cos\theta\,\delta t.$$

D'autre part, la densité des traînées est $\lambda = \frac{m}{U\,\delta t}$. On aura alors, en posant

$$p = \frac{\lambda\cos\theta}{h^2}\,\delta t = \frac{m}{4c^2 U\cos\theta},$$
$$F_1 = p\left[U\cos^2\theta - R(1 - \sin\theta)\right],$$
$$F_2 = p\cos\theta(U\sin\theta - R).$$

Si l'on prend l'axe des z normal au plan et l'axe des x dans

le sens du mouvement, les composantes Z et X du champ deviennent

$$Z = F_2 \sin\theta + F_1 \cos\theta = p\cos\theta(U - R),$$
$$X = F_2 \cos\theta - F_1 \sin\theta = -pR(1 - \sin\theta);$$

ou, en appelant γ l'angle $90° - \theta$ des traînées avec la normale au plan,

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} Z &= \frac{m}{4c^2} \cdot \frac{U-R}{U}, \\ X &= -\frac{m}{4c^2} \cdot \frac{R}{U} \, \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{m}{4c^2} \cdot \frac{R}{U} \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \right.$$

L'angle β que fait le champ résultant F avec cette normale est déterminé par la condition

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{-X}{Z} = \frac{R}{U-R} \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}.$$

L'action des courants induits s'oppose bien au mouvement du pôle, comme on pouvait le prévoir, mais elle ne lui est pas directement opposée.

Si le mouvement du pôle est perpendiculaire au feuillet, on a $\alpha = 0$, $\theta = 90°$ et $U = R + u$; il vient alors

$$Z = \frac{m}{4c^2} \frac{u}{R+u},$$
$$X = 0.$$

L'action est la même que celle d'une masse unique située à chaque instant au point B symétrique de la position du pôle et égale à $m \dfrac{u}{R+u}$, ou d'une masse $\dfrac{m}{4} \cdot \dfrac{u}{R+u}$ située au pied de la perpendiculaire abaissée du pôle sur le plan.

Si le mouvement du pôle est parallèle à la lame, les formules deviennent

$$U^2 = R^2 + u^2, \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{R}{u};$$

$$Z = \frac{m}{4c^2} \frac{u^2}{U(R+U)}, \qquad X = -\frac{m}{4c^2} \frac{uR}{U(R+U)};$$

$$F = \frac{mu}{4c^2(R+U)}.$$

Dans ce cas, le champ résultant est perpendiculaire à la direction des traînées magnétiques; son action est la même que s'il existait dans le plan, sur sa direction, une masse égale à $\frac{4}{m}\frac{(R+U)u}{U^2}$.

On peut encore imaginer que le champ F est produit par un aimant infiniment petit situé dans le plan. En appliquant, par exemple, les formules de Gauss (**109**), on trouve que cet aimant est situé en arrière de la projection du pôle, à une distance x donnée par l'équation

$$x=\frac{3cR}{4u}\left(\sqrt{1+\frac{8u^2}{9R^2}}-1\right).$$

La direction de cette aimantation est alors parallèle au sens du mouvement; le moment de l'aimant considéré serait d'ailleurs facile à calculer.

La composante X parallèle au plan est maximum, pour une valeur donnée R, quand la vitesse u satisfait à la condition

$$R^2=U(U-R), \qquad U=\frac{R}{2}(1+\sqrt{5}),$$

$$u=\frac{R}{2}\sqrt{2(1+\sqrt{5})}=1,27R;$$

cette composante est nulle pour $R=0$ et pour $R=\infty$.

La composante Z tend à éloigner le pôle de la lame; elle croît avec la vitesse et tend vers la valeur $\frac{1}{4c^2}$ quand la vitesse tend vers l'infini.

Dans le cas d'un mouvement rectiligne et uniforme parallèle au plan, on peut considérer encore les phénomènes d'une autre manière.

Le ruban magnétique qui part du point B (fig. 114) symétrique de la position actuelle A du pôle, est formé de deux traînées magnétiques dont la densité est $\frac{m}{U\delta t}$ et la distance horizontale $u\delta t$. Soit α l'inclinaison de ces traînées sur la normale au plan.

Menant une droite quelconque OMM′, posons

$$\mathrm{AM} = r, \qquad \mathrm{AM}' = r',$$
$$\mathrm{OM} = x, \qquad \mathrm{BM}' = s,$$
$$\mathrm{O}'\mathrm{M}' = x' = s \sin\alpha.$$

Le moment magnétique d'un élément ds du ruban est

$$\frac{mu}{\mathrm{U}} ds = m\, ds \sin\alpha = m\, dx'.$$

L'action sur le point A de cet aimant infiniment petit est équivalente à celle d'un aimant parallèle situé au point M et

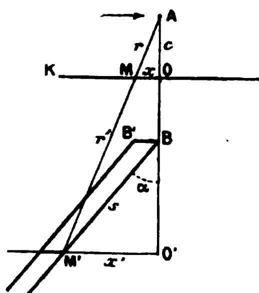


Fig. 114.

dont le moment serait diminué dans le rapport de r^3 à r'^3. On a d'ailleurs

$$\frac{r}{r'} = \frac{x}{x'} = \frac{c}{2c + x' \operatorname{cotg}\alpha} = \frac{c - x \operatorname{cotg}\alpha}{2c};$$

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{2c + x' \operatorname{cotg}\alpha}{c - x \operatorname{cotg}\alpha} = \frac{r'^2}{2r^2};$$

$$\frac{r^3}{r'^3} dx' = \frac{r}{2r'} dx = \frac{c - x \operatorname{cotg}\alpha}{4c} dx.$$

L'action sur le point A de l'élément ds du ruban peut ainsi être remplacée par celle d'un aimant de longueur dx situé au point M. L'action des courants induits sur le pôle mobile est donc équivalente à celle d'un solénoïde complexe (**244**) situé sur le plan, partant du point O, dans une direction

opposée à celle du mouvement du pôle, et dont l'intensité d'aimantation en chaque point serait

$$m\frac{r^3}{r'^3}\frac{dx'}{dx}=\frac{m}{4}\,\frac{c-x\cot g\,\alpha}{c}.$$

On trouverait ainsi, pour les composantes X et Z du champ, les mêmes valeurs que précédemment.

473. Expérience d'Arago. — Cette méthode peut être étendue au cas où le mouvement n'est plus rectiligne et reste parallèle au plan conducteur. Supposons que le pôle décrive une

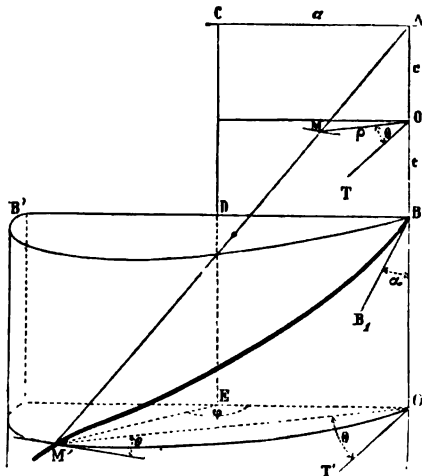


Fig. 115.

circonférence de rayon a, en sens contraire du mouvement des aiguilles d'une montre quand on le regarde de la partie supérieure. L'action des courants induits est celle de deux hélices homogènes de signes contraires, ou d'un ruban héliçoïdal BM′ (fig. 115) enroulé sur la surface d'un cylindre circulaire autour de l'axe de rotation et passant par le pôle. Chaque élément de cette hélice est aimanté suivant une tangente au cylindre menée perpendiculairement à l'axe, et son action sur le pôle équivaut à celle d'un aimant infiniment petit situé en un point M dans le plan conducteur. Le lieu des points M est la courbe perspective de l'hélice vue du point A.

En désignant par ρ le rayon vecteur OM, par θ l'angle qu'il fait avec la tangente OT au point O, et remarquant que cet angle θ est la moitié de l'angle φ des deux plans qui passent par l'axe et par les points B et M', on a, en considérant les triangles AMO et AM'O',

$$\frac{\rho}{c} = \frac{\text{M}'\text{O}'}{\text{AO}'} = \frac{2a\sin\frac{\varphi}{2}}{2c + a\varphi\operatorname{cotg}\alpha} = \frac{a\sin\theta}{c + a\theta\operatorname{cotg}\alpha}.$$

Cette courbe se compose d'une série de boucles fermées ayant une tangente commune au point O.

L'arc O'M' étant égal à $a\varphi$ ou $2a\theta$, le moment magnétique de l'élément d'hélice en M' est $2mad\theta$. Le moment magnétique de l'aimant correspondant que l'on peut supposer au point M est égal à $2ma\frac{r^3}{r'^3}d\theta$.

On voit aussi, par les relations

$$\frac{r}{r'} = \frac{\text{OM}}{\text{O}'\text{M}'} = \frac{\rho}{2a\sin\theta},$$

que le moment magnétique de l'élément de la courbe au point M est égal à $\frac{m}{4a^2}\frac{\rho^3 d\theta}{\sin^3\theta}$.

Cet aimant élémentaire au point M est parallèle à l'aimantation de l'hélice en M'; il fait donc l'angle θ avec le rayon vecteur ρ de la courbe perspective.

Le calcul du champ magnétique produit au point A ne conduit pas à un résultat simple, mais il est évident que les portions de la courbe qui correspondent à la première partie BM' de l'hélice sont prédominantes. D'après la direction des aimants élémentaires sur la courbe perspective, on voit que l'action des courants induits sur le pôle aura une composante verticale, une autre directement opposée à la vitesse du pôle, et une troisième dirigée vers le centre de la circonférence qu'il décrit. Le système entier équivaut encore à un petit aimant situé en arrière du point O, perpendiculaire à un rayon du disque qui fait un certain angle, du côté opposé au mouvement, avec le rayon qui correspond au pôle,

l'aimantation étant dans le sens du mouvement, si le pôle considéré est un pôle nord.

Si le plan était indéfini, cet aimant serait à une distance de l'axe plus grande que celle du pôle; mais l'effet des bords tend à le ramener de plus en plus vers le centre, à mesure que le rayon diminue. On retrouve ainsi toutes les particularités de l'expérience d'Arago, entre autres ce fait que la composante radiale est centripète, si le pôle est éloigné des bords, et qu'elle devient centrifuge quand il s'en rapproche.

Si le pôle décrit une courbe quelconque parallèle au plan, la traînée d'images magnétiques correspondantes déterminerait, de même, l'aimantation de la courbe perspective. L'action sur le point A, dans le cas d'un plan indéfini, aura encore une composante verticale, une autre directement opposée au mouvement et une troisième normale à la trajectoire du pôle et dirigée vers la concavité de la courbe.

474. Amortisseurs des boussoles. — L'action d'un disque conducteur sur un système magnétique en mouvement est utilisée dans les boussoles et les galvanomètres, pour amortir les oscillations des aiguilles, sous la forme même où le phénomène a eté observé d'abord par Gambey.

Cette action réciproque équivaut à une sorte de frottement qui s'oppose au mouvement relatif des deux systèmes; il en résulte une absorption d'énergie qui correspond précisément à l'échauffement du conducteur par les courants induits.

475. Expérience de Faraday. — D'une manière plus générale, lorsqu'un conducteur de forme quelconque se déplace dans un champ magnétique, les courants induits s'opposent au mouvement, mais le calcul des effets présente alors de plus grandes difficultés, parce qu'il faut faire intervenir les dimensions du conducteur. Faraday (¹) a constaté ainsi que, si l'on place entre les pôles d'un électro-aimant une masse de cuivre, de forme cubique ou sphérique, suspendue à un fil sans torsion notable et animée d'un mouvement de rotation rapide, la masse s'arrête aussitôt qu'on fait passer un courant dans les bobines; on éprouve ensuite une grande résistance pour la remettre en mouvement.

(¹) FARADAY, *Exp. Researches*, § 2514, t. III, p. 100, note; 1848.

Foucault (1) montra que les courants induits échauffent le conducteur. A l'aide d'un système de roues dentées commandées par une manivelle, il entretient la rotation d'un disque conducteur entre les branches d'un électro-aimant très énergique : le travail dépensé est considérable et la température du disque s'élève très rapidement.

C'est en raison de cette expérience que l'on appelle souvent *courants de Foucault* les courants parasites induits dans un conducteur par les variations du champ magnétique dû à un système d'aimants ou de courants.

La mesure du travail dépensé et de la chaleur correspondante fournit même un moyen de déterminer l'équivalent mécanique de la chaleur; c'est le principe de la méthode employée par M. Violle (2).

476. Phénomène de Hall. — Nous signalerons ici une expérience curieuse de M. Hall (3) relative à la déformation

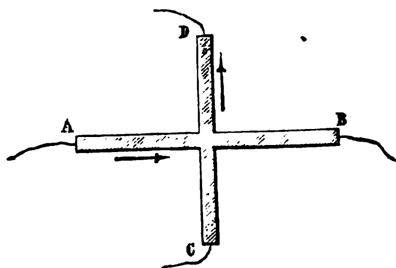


Fig. 116.

des surfaces équipotentielles des courants permanents sous l'influence d'un champ magnétique.

Soit ABCD (fig. 116) un conducteur en forme de croix taillé dans une feuille métallique très mince, une feuille d'or, par exemple; les deux extrémités A et B de la branche principale sont en communication avec les pôles d'une pile, les extrémités C et D de la branche transversale en communi-

(1) L. Foucault, *Ann. de chim. et de phys.* [3] t. XLV, p. 316; 1855.

(2) J. Violle, *Ann. de chim. et de phys.* [4] t. XXI, p. 64; 1870.

(3) E. H. Hall, *Am. Journ. of math.*, t. II, p. 287; 1879 et *Am. Journ. of sc.*, t. XX, p. 161; 1880. — *Journ. de phys.*, t. IX, p. 289; 1880 et t. X, p. 132; 1881.

cation avec un galvanomètre. On arrive facilement à rendre l'appareil assez symétrique pour que le galvanomètre ne révèle aucun courant appréciable.

Quand on place ce conducteur dans un champ magnétique très intense, de manière que les lignes de force soient perpendiculaires à son plan, une déviation permanente de l'aiguille du galvanomètre montre qu'il s'établit un courant transversal. Si le courant va de A en B dans la branche principale, et que les lignes de force traversent d'avant en arrière le plan de la figure, le courant dérivé va de D en C à travers le galvanomètre, lorsque le conducteur est formé d'une feuille d'or, d'argent, de platine ou d'étain, et en sens contraire lorsque le métal est du fer.

Pour un même métal, la force électromotrice produite dans le circuit transversal est proportionnelle au champ magnétique, au courant principal et en raison inverse de l'épaisseur de la lame.

Toutefois l'opposition que le caractère du phénomène dans le fer semble établir entre les propriétés des conducteurs magnétiques ou non magnétiques ne paraît pas être générale, car l'action sur le nickel est de même signe que sur l'or.

Pour les métaux ordinaires, le courant transversal paraît entraîné en sens contraire de l'action électromagnétique que le champ exerce sur le courant principal; on peut dire qu'il en est encore de même dans le cas du fer, puisqu'à l'intérieur de ce métal, par suite de l'aimantation qu'il subit, la direction des lignes de force et du champ électromagnétique a changé de signe.

CHAPITRE NEUVIÈME

ÉLECTRO-OPTIQUE

477. Pouvoir rotatoire magnétique. — Après de nombreuses recherches, demeurées longtemps infructueuses, Faraday (¹) a découvert en 1845 qu'un corps transparent, dénué par lui-même de pouvoir rotatoire, devient capable, sous l'influence du magnétisme, de faire tourner le plan de polarisation d'un rayon lumineux. L'effet est maximum quand le rayon polarisé traverse le corps parallèlement aux lignes de force ; il est nul quand les deux directions sont rectangulaires.

Ce phénomène, constaté d'abord pour le *flint lourd*, se produit à des degrés différents avec tous les corps liquides et les solides monoréfringents ; l'action du magnétisme est moins sensible sur les corps biréfringents ; elle est extrêmement faible pour les *gaz* et les *vapeurs*. Les corps doués naturellement du pouvoir rotatoire éprouvent les mêmes effets : les deux rotations magnétique et naturelle s'ajoutent ou se retranchent, suivant leurs sens respectifs.

478. Caractères du phénomène. — La polarisation rotatoire magnétique se distingue de celle du quartz et des corps naturellement actifs par différents caractères.

La rotation est d'abord temporaire ; elle se manifeste et disparaît en même temps que l'aimantation du système.

Il semble parfois que la rotation s'établit graduellement et disparaît de même, mais cette circonstance tient aux conditions de l'expérience. La méthode la plus employée consiste, en effet, à placer le corps dans le champ produit entre les

(¹) Faraday, *C. R. de l'Acad. des sciences*, t. XXII, p. 113 ; 1846.

pôles contraires de deux électro-aimants, dont les armatures ont été percées d'un canal pour le passage du rayon de lumière. Quand on excite l'électro-aimant ou que l'on supprime les courants d'aimantation, les extra-courants de fermeture et de rupture, ainsi que les effets d'hystérésis, déterminent un retard dans l'établissement du maximum d'aimantation et sa diminution ultérieure. Le phénomène optique ne fait que traduire les variations continues du champ. On évite cette difficulté en utilisant le champ d'une bobine.

Il semble même, d'après les expériences de MM. Bichat et Blondlot (¹), qu'il n'existe aucun retard appréciable entre la production du champ et la rotation optique.

La lumière émanant d'une fente étroite traverse un polariseur, puis une lame de verre, un corps transparent, verre ou sulfure de carbone, placé dans l'axe d'une bobine, enfin un analyseur réglé à l'extinction. La lumière reparaît chaque fois que l'on fait traverser la bobine par la décharge d'une bouteille de Leyde; la durée de l'étincelle suffit donc pour établir la polarisation rotatoire.

Si les décharges sont oscillantes et qu'on observe par réflexion dans un miroir tournant réglé de manière que l'analyseur soit visible au moment des décharges, on aperçoit plusieurs images successives qui correspondent bien à des courants de sens contraires, car une petite rotation de l'analyseur affaiblit toutes les images d'ordre pair, par exemple, et fait croître l'éclat des images d'ordre impair.

Pour vérifier si la rotation et le courant sont simultanés, on dispose obliquement, à la suite de l'analyseur, un miroir fixe qui permet de voir en même temps dans le miroir tournant l'image des étincelles et celle de la fente au travers de l'analyseur. L'appareil étant réglé pour qu'à l'état de repos les deux images soient sur la même verticale, elles forment ensuite dans le miroir tournant deux bandes parallèles juxtaposées; les images successives des décharges alternantes correspondent alors exactement aux maxima de lumière que laisse passer l'analyseur. Un retard de $\frac{1}{30000}$ de seconde entre les deux phénomènes eut été manifeste.

(¹) Bichat et Blondlot, *Journ. de phys.*, [2], t. I, p. 364; 1882.

Supposons que le champ produit par la décharge ou par un courant alternatif soit simplement sinusoïdal ; la rotation du plan de polarisation est de la forme $R = R_0 \sin \omega t = R_0 \sin x$. Si l'analyseur a été tourné d'un angle α à partir de la position d'extinction, l'amplitude de la composante utilisée est proportionnelle à $\sin(R \pm \alpha)$; le rapport de l'intensité à celle qu'on obtiendrait pour le parallélisme du polariseur et de l'analyseur est égal à $\sin^2(R - \alpha)$. L'intensité relative I de l'image, pour les courants d'un même sens, est la valeur moyenne de cette expression pendant une demi-période :

$$I = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2(R \pm \alpha)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(R \pm \alpha)\,dx.$$

Si les angles R et α sont très petits, on peut écrire

$$I = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (R \pm \alpha)^2\,dx = \alpha^2 \pm \frac{2R_0\alpha}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx + \frac{R_0^2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx,$$

$$I = \alpha^2 \pm \frac{4R_0\alpha}{\pi} + \frac{R_0^2}{2}.$$

En séparant les deux espèces d'images par un miroir tournant, elles présenteront alternativement des maxima et des minima d'intensité.

Si l'image est observée directement, l'intensité relative est $\alpha^2 + \frac{R_0^2}{2}$ et elle se réduit au dernier terme quand l'analyseur reste réglé. L'éclat de la lumière est alors proportionnel au carré de la rotation maximum ou du champ maximum.

D'autre part, la rotation est proportionnelle, toutes choses égales, à l'épaisseur du milieu, comme pour les corps actifs, mais elle dépend cette fois uniquement de la direction du champ magnétique, quel que soit le sens de la propagation. Dans le quartz, l'essence de térébenthine et les liquides actifs, le sens de la rotation est toujours le même pour l'observateur qui reçoit la lumière, de sorte que si le rayon, ayant traversé une lame de quartz, revient sur lui-même après une réflexion normale, le plan de polarisation éprouve au retour une rota-

tion de sens contraire à la première et se retrouve finalement dans l'azimut primitif.

Pour le phénomène magnétique, le sens de la rotation est fixe dans l'espace. Un rayon qui revient sur ses pas, après réflexion normale, éprouve dans le milieu une rotation de même sens qui s'ajoute à la première ; on peut ainsi, avec un nombre impair $2n+1$ de réflexions successives, observer sur le rayon émergent la même rotation que s'il eût traversé une épaisseur $2n+1$ fois aussi grande de la substance.

479. Lois de Verdet. — Verdet [1] a déterminé les lois de ce phénomène en plaçant le corps à étudier dans le champ sensiblement uniforme produit entre de larges surfaces polaires d'un électro-aimant et mesurait l'intensité du champ par la méthode de Weber (378). Les liquides sont placés dans des tubes terminés par des plaques de verre et on a soin de retrancher des nombres observés les rotations dues aux plaques terminales.

Pour donner au rayon de lumière une direction oblique au champ, le corps était situé un peu au-dessus des plaques polaires où le champ reste encore à peu près uniforme. La rotation est proportionnelle :

1° *A l'épaisseur du milieu traversé par le rayon* ;

2° *Au produit du champ par le cosinus* [2] *de l'angle que fait sa direction avec celle du rayon, c'est-à-dire à la composante du champ magnétique parallèle au rayon.*

Ces deux lois peuvent recevoir une autre interprétation.

Lorsque le champ est uniforme, si V_1 et V_2 sont les valeurs du potentiel magnétique aux points d'entrée et de sortie du rayon dans la substance considérée, la composante X du champ parallèle à la direction du rayon est le quotient de la différence des potentiels $V_1 - V_2$ par l'épaisseur e du milieu traversé. En désignant par ρ une constante, la rotation R peut donc s'écrire

$$R = \rho e X = \rho (V_1 - V_2).$$

(1) VERDET, *Ann. de chim. et de phys.* [3], t. XLI, p. 370; 1854. — t. XLIII, p. 529 ; 1866. — t. LII, p. 129; 1858. — t. LXIX, p. 415 ; 1863.

(2) Cette loi du cosinus a été vérifiée par MM. Cornu et Potier jusqu'aux directions les plus rapprochées de la normale au champ magnétique (*Journ. de phys.* [2], t. V, p. 197; 1886).

En d'autres termes, *la rotation du plan de polarisation entre deux points est proportionnelle à la différence de leurs potentiels magnétiques.*

Sous cette forme, la loi s'applique également aux milieux homogènes situés dans un champ non uniforme. En effet, l'accroissement de rotation, produit dans une épaisseur dx, est en tous cas proportionnel à la chute correspondante de potentiel magnétique $-dV$, de sorte que la rotation totale ne dépend que de la différence des potentiels aux points d'entrée et de sortie du rayon.

Le coefficient ρ représente la rotation produite au travers de l'unité d'épaisseur dans l'unité du champ, ou celle qui correspond à l'unité de différence de potentiel. Cette quantité est la *constante de Verdet* ou le *pouvoir rotatoire magnétique* de la substance considérée.

Dans le *sulfure de carbone*, la constante serait de $0',043$ pour la raie D à la température de zéro.

Des corps différents d'égale épaisseur soumis à l'action du même champ magnétique produisent des rotations dans le rapport de leurs pouvoirs rotatoires.

Il suffit donc, pour les expériences comparatives, de placer dans les mêmes conditions deux corps de même épaisseur, dont l'un a un pouvoir rotatoire connu, sans qu'il soit nécessaire de réaliser un champ uniforme.

480. Pouvoir rotatoire moléculaire. — Si l'on admet aussi que la rotation magnétique est proportionnelle à la quantité du corps actif traversée par le rayon, c'est-à-dire au produit de son épaisseur par sa densité, on pourra appeler *pouvoir rotatoire moléculaire* le quotient $[\rho]$ de la quantité ρ par la densité du milieu.

Cette loi est rigoureuse pour les gaz et les vapeurs. Verdet a vérifié qu'elle convient également aux dissolutions de certains sels, comme le *nitrate d'ammoniaque*, car l'observation de liqueurs de richesses différentes conduit à la même valeur du pouvoir rotatoire moléculaire pour le sel.

Si p et p' sont les poids d'eau et de sel contenus dans le volume v de la dissolution, $[\rho]$ et $[\rho']$ les pouvoirs rotatoires moléculaires des deux corps, les rotations correspondantes dans l'unité de champ magnétique, et pour l'unité d'épaisseur,

sont respectivement $[\rho]\frac{p}{v}$ et $[\rho']\frac{p'}{v}$; le pouvoir rotatoire ρ_1 de la dissolution est donc

$$\rho_1 = [\rho]\frac{p}{v} + [\rho']\frac{p'}{v},$$

ou, en appelant d la densité $\frac{p+p'}{v}$ de la dissolution,

$$\rho_1 = \frac{d}{p+p'}\Big(p[\rho] + p'[\rho']\Big).$$

On en déduit

$$[\rho'] = \rho_1\frac{v}{p'} - \frac{p}{p'}[\rho] = \frac{\rho_1}{d}\left(1 + \frac{p}{p'}\right) - \frac{p}{p'}[\rho].$$

481. Corps positifs et négatifs. — Le pouvoir rotatoire moléculaire $[\rho']$ ainsi calculé est le plus souvent de même signe que le pouvoir rotatoire ρ_1 de la dissolution.

Au contraire, le pouvoir rotatoire des solutions de sels de *protoxyde de fer* est toujours plus faible que la valeur $[\rho]\frac{p}{v}$ qui conviendrait à l'eau du mélange. Les choses se passent donc comme si le sel dissous exerçait sur la lumière polarisée une action contraire à celle de l'eau et le calcul des expériences indique encore pour le sel un pouvoir rotatoire moléculaire ρ' sensiblement constant.

Verdet appelle *positif* le pouvoir rotatoire de l'eau et de la généralité des substances transparentes non magnétiques, *négatif* celui des sels de protoxyde de fer et des corps qui agissent dans le même sens.

Pour fixer le sens des rotations, on peut supposer que le champ est produit par un courant qui parcourt le fil d'une bobine cylindrique suivant l'axe de laquelle chemine le rayon de lumière. Dans ce cas, les corps positifs font tourner le plan de polarisation dans le sens des courants, et les corps négatifs en sens contraire.

La règle s'applique alors facilement aux champs produits d'une manière quelconque. Si le rayon se propage dans le

sens de la composante du champ qui lui est parallèle, la rotation a lieu de droite à gauche, avec les corps positifs, pour l'observateur qui reçoit la lumière, et de gauche à droite avec les corps négatifs.

L'exemple des sels de fer avait pu faire croire que le pouvoir rotatoire est négatif pour les corps magnétiques et positif pour les corps diamagnétiques, mais cette relation est loin de se vérifier. Si presque tous les sels de fer sont magnétiques et négatifs, ainsi que la plupart des corps magnétiques, on en trouve beaucoup d'autres, en particulier les sels de *nickel* et de *cobalt*, qui sont positifs. De même, la presque totalité des corps diamagnétiques sont positifs, mais un certain nombre, tels que le *chlorate de potasse*, le *bichlorure de titane*, etc., se montrent négatifs.

En outre, la loi des mélanges donnant lieu à de nombreuses exceptions quand il s'agit du pouvoir rotatoire naturel, il est à prévoir qu'elle ne s'appliquera pas non plus d'une manière rigoureuse à la polarisation rotatoire magnétique. Il résulte, en effet, des expériences de Verdet, que le pouvoir rotatoire moléculaire négatif des dissolutions de *protochlorure* et de *perchlorure de fer* dans l'eau augmente rapidement avec la richesse du liquide ; pour l'*azotate d'urane*, au contraire, qui est également négatif et diamagnétique, le pouvoir rotatoire moléculaire serait indépendant de la concentration (¹).

La loi s'applique mieux aux corps positifs, sans être encore tout à fait rigoureuse.

Si l'on tient compte de ces irrégularités, il ne semble pas que l'on puisse par l'étude des dissolutions connaître exactement les propriétés qui conviennent au sel lui-même, à l'état cristallisé, en supposant qu'il reste alors assez transparent et que la forme cristalline permette l'observation directe.

Pour les *chlorures* de *potassium* et de *sodium*, par exemple, qui sont cubiques, les pouvoirs rotatoires des sels anhydres sont notablement plus faibles que ne l'indiqueraient les propriétés de leurs dissolutions.

A plus forte raison ne peut-on en déduire les propriétés du métal puisque, même pour les sels de fer, le signe du

(¹) H. Becquerel, *Ann. de chim. et de phys.* [5] t. XII, p. 5; 1877.

pouvoir rotatoire moléculaire change quelquefois avec la nature de la combinaison.

Kundt ([1]) a pu mesurer directement la rotation produite par des lames de fer déposées par voie électrolytique, sur des miroirs en verre platiné, en couches assez minces pour rester transparentes, et a trouvé cette rotation positive.

Le cobalt et le nickel ont aussi un pouvoir rotatoire positif, voisin de celui du fer pour le premier métal et environ moitié moindre pour le second.

Il arrive même alors que la loi de Verdet est en défaut. Pour les lames de fer, la rotation est d'abord proportionnelle au champ magnétique et atteint, dans un champ de 2000 unités C. G. S., un maximum qui correspondrait à 200000° par centimètre, c'est-à-dire environ 1000 fois la rotation naturelle du quartz. Le nickel et le cobalt donnent des résultats analogues. Le maximum de rotation est comparable au maximum d'aimantation des corps magnétiques.

Enfin, cette anomalie paraît se présenter aussi pour les dissolutions de chlorure de fer ([2]). Si la liqueur est concentrée, le pouvoir rotatoire augmente d'abord avec l'intensité du champ et passe par un maximum pour aller ensuite en diminuant ; avec les liqueurs étendues, la rotation croît toujours moins vite que l'intensité du champ.

482. Dispersion rotatoire. — Le pouvoir rotatoire magnétique varie avec la couleur et, quand on opère à la lumière blanche, l'image vue dans l'analyseur présente les teintes des lames de quartz perpendiculaires à l'axe. On compense d'une manière à peu près complète la rotation magnétique dans le flint par la rotation naturelle dans une épaisseur convenable de dissolution sucrée et d'essence de térébenthine. La rotation magnétique est donc comparable à celle du quartz, c'est-à-dire sensiblement en raison inverse du carré de la longueur d'onde, mais il est à prévoir que cette loi n'est aussi qu'une première approximation. En réalité, dans les deux ordres de phénomènes, le produit de la rotation par le carré de la lon-

([1]) A. Kundt, *C. R. de l'Acad. de Berlin*, t. XXXIV, p. 761 ; 1884 et t. XLVIII, p. 1055 ; 1885. — *Journ. de phys.* [2] t. III, p. 496 ; 1884 et t. V, p. 78 ; 1886.

([2]) Stscheglajeff, *Wied. Ann.*, t. XXXVIII, p. 168 ; 1886. — *Journal de phys.* [2], t. VI, p. 47 ; 1887.

gueur d'onde augmente à mesure que la longueur d'onde diminue; les écarts sont d'autant plus sensibles que la substance considérée est plus dispersive par réfraction, mais ils se manifestent très inégalement, de sorte que chaque substance obéit à une loi particulière de dispersion rotatoire.

Quelques mois après la publication des découvertes de Faraday, sir G. Airy [1] a fait remarquer qu'il suffisait, pour rendre compte des phénomènes, d'ajouter aux équations du mouvement vibratoire dans les corps isotropes certains termes proportionnels aux dérivées d'ordre impair des déplacements par rapport au temps. Désignant par n l'indice de réfraction du milieu relatif à la longueur d'onde λ, on peut ainsi obtenir pour le pouvoir rotatoire une série d'expressions ne renfermant qu'une constante A et de la forme :

$$\text{(I)} \qquad \rho = A\left(n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right),$$

$$\text{(II)} \qquad \rho = \frac{A}{\lambda^2}\left(n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right),$$

$$\text{(III)} \qquad \rho = A\frac{n^2}{\lambda^2}\left(n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right).$$

Toutefois, les observations de Verdet ont montré que, dans l'échelle du spectre lumineux, aucune de ces formules n'est complètement vérifiée.

D'après M. H. Becquerel [2] la rotation est proportionnelle à $\frac{n^2(n^2-1)}{\lambda^2}$ pour la plupart des substances, tandis que la fonction $\frac{n^2(n^2-1)}{\lambda^4}$ représente bien les observations relatives au *bichlorure de titane* et aux corps très magnétiques.

M. Joubin [3] a constaté que la formule

$$\text{(IV)} \qquad \rho = \frac{A}{\lambda}\left(n - B\lambda\frac{dn}{d\lambda}\right),$$

sur laquelle on reviendra plus loin, convient à toutes les me-

(1) G. Airy, *Ph. Mag.* [3], t. XXVIII, p. 496; 1846.
(2) A. Becquerel, *Ann. de chim. et de phys.* [5], t. XII, p. 5; 1877.
(3) P. Joubin, *Ibid.*, [6], t. XVI, p. 78; 1889.

sures faites dans le spectre lumineux, soit pour les corps négatifs, comme le *bichlorure de titane* et les dissolutions de *perchlorure de fer*, soit pour les corps positifs, tels que les différents *verres*, le *sulfure de carbone* et la *créosote*. Avec le *sel gemme*, la formule s'applique encore aux longueurs d'onde comprises entre $0^{\mu},6437$ et $0^{\mu},2143$, c'est-à-dire dans toute l'étendue du spectre lumineux et du spectre ultra-violet.

En y joignant les observations relatives aux rayons calorifiques dans le *sulfure de carbone*, M. Moreau [1] a comparé encore les résultats à la formule de van Schaik [2], qui renferme deux constantes

$$\text{(V)} \qquad \rho = A\frac{n^2}{\lambda^2}\left(n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)\left(1 + \frac{C}{\lambda^2}\right),$$

et à une autre analogue

$$\text{(VI)} \qquad \rho = A\frac{n^2}{\lambda^2}\left(n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)\left(1 + C\frac{n^2}{\lambda^2}\right).$$

Il s'est trouvé finalement que l'expression (IV), sans être irréprochable, est la seule qui concorde d'une manière satisfaisante avec les résultats expérimentaux.

De même que dans la réfraction ordinaire, il se présente encore des dispersions rotatoires anormales ; c'est ce qui a lieu en particulier, d'après Kundt, avec les lames minces de fer transparentes, où la rotation pour les rayons rouges est notablement plus grande que pour les rayons bleus.

Enfin, la dispersion se conserve, au moins d'une manière qualitative, lorsque le champ magnétique éprouve des oscillations très rapides, car si l'on cherche, dans l'expérience de MM. Bichat et Blondlot (478), à éteindre les bandes d'un certain ordre de parité, vues dans le miroir tournant, elles présentent successivement des couleurs de longueur d'onde décroissantes, pendant que les images d'autre parité prennent des teintes complémentaires.

483. Vapeurs et gaz. — A mesure qu'on élève la température, le pouvoir rotatoire magnétique paraît augmenter

(1) G. Moreau, *Ann. de Ch. et de Phys.*, [7], t. I, p. 289; 1894.
(2) Van Schaik, *Archiv. Neerland.*, t. VII, 1882 et t. XXI, 1886.

pour les corps solides et diminuer pour les liquides [1]. La loi de variation permettrait de calculer l'effet produit par une vapeur, avec l'hypothèse que le pouvoir rotatoire moléculaire se conserve dans le nouvel état, comme pour les liquides naturellement actifs, mais l'observation donne toujours un nombre beaucoup plus faible [2].

Si l'on ramène les observations à la pression de 76^c et à la température de zéro, en admettant que l'effet est proportionnel au poids spécifique du gaz, le quotient du pouvoir rotatoire par la fonction $n^2(n^2-1)$ reste le même, d'après M. H. Becquerel, pour le liquide et la vapeur, et cette relation se vérifie d'une manière assez exacte. A cause de la très faible réfraction des gaz, le produit $n^2(n^2-1)$ se réduit sensiblement à $2(n-1)$.

Pour les gaz et les vapeurs, le quotient par $2(n-1)$ de la rotation magnétique fournit d'ailleurs des nombres de même ordre de grandeur, qui croissent nettement avec l'indice de réfraction.

M. H. Becquerel a constaté aussi, par l'emploi d'écrans colorés, que la dispersion est manifeste pour les gaz et suit la loi ordinaire, sauf pour l'*oxygène* qui aurait une dispersion anormale, en rapport avec les propriétés magnétiques du gaz, mais cette exception n'a pas été confirmée par les observations ultérieures [3].

484. Forme de la surface d'onde. — Les principes de la théorie donnée par Fresnel, pour expliquer la polarisation rotatoire du quartz et des liquides actifs, peuvent être appliqués à la polarisation rotatoire magnétique, en admettant qu'un rayon de lumière polarisée se décompose en deux rayons polarisés circulairement en sens contraires, lesquels se propagent dans le milieu, sous l'influence du champ, avec des vitesses différentes et reconstituent à la sortie un rayon polarisé dans un azimut différent.

Les expériences d'interférence montrent, en effet, qu'un morceau de flint, soumis à l'action d'un champ magnétique,

(1) J. Joubert, *C. R. de l'Acad. des sc.*, t. LXXXVII, p. 984; 1878.
(2) H. Becquerel, *Journ. de phys.*, t. VIII, p. 198; 1879 et t. IX, p. 265; 1880. — E. Bichat, *Ibid.*, t. VIII, p. 204; 1879 et t. IX, p. 275; 1880.
(3) H. Siertsema, *Comm. from the Lab. at Leyden*, n° 7, p. 9; 1895.

se comporte comme une lame de quartz perpendiculaire à l'axe ([1]). En faisant interférer deux rayons qui ont traversé séparément deux épaisseurs de flint identiques, l'une située dans le champ magnétique et l'autre en dehors, les composantes circulaires des deux faisceaux donnent deux systèmes de franges, à droite et à gauche du système primitif. M. Cornu a obtenu un déplacement d'un dixième de frange environ et la position moyenne des systèmes coïncide, à moins d'un deux-centième de frange, avec celle du système unique que l'on observe par la suppression du champ.

Il en résulte que l'indice moyen de réfraction des ondes à vibrations circulaires est égal à l'indice du milieu non altéré; en raison de l'ordre de grandeur du phénomène, la même relation s'applique aux vitesses de propagation.

La loi de Verdet permet alors de déterminer la surface d'onde relative aux vibrations circulaires qui se propagent dans un champ magnétique uniforme.

Soient V_0 la vitesse de propagation de la lumière dans le vide, V_1 et V_2 les vitesses des ondes à vibrations circulaires inverses, dans un milieu d'épaisseur e soumis à l'action du champ magnétique; les chemins équivalents dans le vide sont respectivement $\Delta_1 = \frac{e}{V_1} V_0$ et $\Delta_2 = \frac{e}{V_2} V_0$ et la différence de phase δ de deux rayons a pour expression

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\lambda} = 2\pi e \frac{V_0}{\lambda}\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right).$$

La rotation du plan de polarisation est la moitié de la différence de phase. Si le rayon fait l'angle α avec la direction du champ F, il en résulte

$$R = \rho e F \cos\alpha = \frac{\delta}{2},$$

$$\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} = \frac{\lambda \rho F}{\pi V_0} \cos\alpha = 2k \cos\alpha.$$

([1]) A. Righi, *Nuovo cimento* [3]. t. III, p. 212; 1878. — H. Becquerel, *C. R. de l'Acad. des sc.*, t. LXXXVIII, p. 334; 1879. — A. Cornu, *Ibid.*, t. XCII, p. 1369; 1881 et t. XCIX, p. 1043; 1884.

Comme les vitesses V_1 et V_2 diffèrent très peu de la vitesse V dans le milieu non altéré, on peut écrire

$$V_1 - V_2 = 2kV_1V_2\cos\alpha = 2kV^2\cos\alpha.$$

On déduit alors de la relation $V_1 + V_2 = 2V$,

$$V_1 = V + kV^2\cos\alpha,$$
$$V_2 = V - kV^2\cos\alpha.$$

Les vitesses V_1 et V_2 différant de la vitesse V d'une quantité proportionnelle à $\cos\alpha$, la surface d'onde, qui était primitivement sphérique, est remplacée par deux surfaces sphériques, analogues aux couches de glissement (**126**), dont les centres sont situés sur une parallèle au champ et séparés par la distance $2kV^2$.

Ce dédoublement des ondes relatives aux deux vibrations circulaires montre que le phénomène doit être accompagné d'une double réfraction, trop faible il est vrai pour être mise en évidence.

485. Considérations théoriques. — M. Rowland [1] a fait intervenir le phénomène de Hall (**476**) dans l'explication du pouvoir rotatoire magnétique.

Si l'on admet que les déviations des courants se produisent également dans les diélectriques, il en résulte une force électromotrice nouvelle, dont nous désignerons les composantes par A, B et C.

La composante A, qui agit suivant l'axe des x, est la résultante des deux actions exercées sur les composantes perpendiculaires v et w du courant; la première est proportionnelle à $-Zv$ et la seconde à Yw.

On aura donc, en désignant par γ le coefficient commun,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= \gamma(Yw - Zv),\\ B &= \gamma(Zu - Xw),\\ C &= \gamma(Xv - Yu).\end{aligned}\right.$$

[1] H. A. Rowland, *Ph. Mag.* [5] t. IX, p. 432; 1880. — *Journ. de Phys.*, t. IX, p. 290; 1880.

Les composantes de la force électromotrice totale produite dans le champ sont alors (433)

$$(2)\quad \begin{cases} P = -\dfrac{\partial F}{\partial t} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + A, \\ Q = -\dfrac{\partial G}{\partial t} - \dfrac{\partial \psi}{\partial y} + B, \\ R = -\dfrac{\partial H}{\partial t} - \dfrac{\partial \psi}{\partial z} + C. \end{cases}$$

Les équations générales (D) du n° **439**, appliquées à un milieu diélectrique, en négligeant les fonctions ψ et Θ qui n'ont pas de rôle dans les phénomènes périodiques, prennent la forme

$$(3)\quad \begin{cases} \Delta F = K\mu\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \dfrac{\partial A}{\partial t}\right), \\ \Delta G = K\mu\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \dfrac{\partial B}{\partial t}\right), \\ \Delta H = K\mu\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \dfrac{\partial C}{\partial t}\right). \end{cases}$$

Pour un système d'ondes planes parallèles à l'axe des z, la composante Z du champ est la seule qui intervienne. Si le champ est uniforme, les équations (3) se réduisent à

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} = K\mu\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \gamma Z \dfrac{\partial v}{\partial t}\right), \\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial z^2} = K\mu\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \gamma Z \dfrac{\partial u}{\partial t}\right), \\ 0 = K\mu \dfrac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Comme on a alors (434)

$$4\pi u = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial^2 z}, \qquad 4\pi v = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 G}{\partial z^2},$$

il en résulte

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} = K\mu\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \dfrac{\gamma Z}{4\pi\mu}\cdot\dfrac{\partial^3 G}{\partial z^2\,\partial t}\right), \\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial z^2} = K\mu\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \dfrac{\gamma Z}{4\pi\mu}\cdot\dfrac{\partial^3 F}{\partial z^2\,\partial t}\right). \end{cases}$$

Ces équations ont pour solutions

$$F = a\cos(\omega t - qz)\cos pz,$$
$$G = a\cos(\omega t - qz)\sin pz = F\,\mathrm{tang}\,pz.$$

Les valeurs de F et de G sont les projections sur les axes d'une force électromotrice $a\cos(\omega t - qz)$ qui fait avec l'axe des x un angle égal à pz.

Si l'on prend les fonctions F et G sous la forme

$$F = ae^{i(\omega t - qz)}\cos pz, \qquad G = ae^{i(\omega t - qz)}\sin pz,$$

et que l'on pose

$$\mathrm{P} = F + iG, \qquad \mathrm{Q} = F - iG, \qquad \mathrm{A} = \frac{\mathrm{KZ}}{4\pi},$$

on voit aisément que les équations (5) équivalent à

$$(1 + \gamma\mathrm{A}\omega)\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial t^2} = \mathrm{K}\mu\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial t^2},$$
$$(1 - \gamma\mathrm{A}\omega)\frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial z^2} = \mathrm{K}\mu\frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial t^2},$$

et les constantes seront déterminées par les conditions

$$(1 + \gamma\mathrm{A}\omega)(q - p)^2 = \mathrm{K}\mu\omega^2,$$
$$(1 - \gamma\mathrm{A}\omega)(q + p)^2 = \mathrm{K}\mu\omega^2;$$
$$q^2 + p^2 = \mathrm{K}\mu\omega^2\frac{1}{1 - \gamma^2\mathrm{A}^2\omega^2},$$
$$2pq = \mathrm{K}\mu\omega^2\frac{\gamma\mathrm{A}\omega}{1 - \gamma^2\mathrm{A}^2\omega^2} = \gamma\mathrm{A}\omega(q^2 + p^2).$$

Comme le coefficient γ est très petit, et que la valeur de p est aussi du premier ordre, on peut écrire

$$2p = \gamma\mathrm{A}\omega q = \gamma\mathrm{A}\frac{\omega^2}{\mathrm{V}} = \gamma\frac{\mathrm{KZ}}{4\pi}\cdot\frac{\omega^2}{\mathrm{V}},$$
$$q^2\left(1 + \frac{\gamma^2\mathrm{A}^2\omega^2}{4}\right) = \mathrm{K}\mu\omega^2(1 + \gamma^2\mathrm{A}^2\omega^2),$$
$$\mathrm{V}^2 = \frac{\omega^2}{q^2} = \frac{1}{\mathrm{K}\mu}\left(1 - \frac{3}{4}\gamma^2\mathrm{A}^2\omega^2\right).$$

Ainsi, lorsqu'un rayon polarisé se propage suivant la direction du champ magnétique, le plan de polarisation tourne dans un sens qui dépend du signe de γ, d'un angle proportionnel à l'intensité de champ, et la vitesse de propagation est modifiée par une quantité du second ordre.

Désignons par λ_0 la longueur d'onde de la lumière primitive dans le vide, et par n l'indice de réfraction correspondant du milieu considéré; la rotation du plan de polarisation pour l'unité d'épaisseur et l'unité de champ, c'est-à-dire le pouvoir rotatoire, est

$$\rho = \frac{p}{Z} = \gamma \frac{K\pi}{VT^2} = \gamma K\pi \frac{V}{\lambda^2} = \gamma K\pi V_0 \frac{n}{\lambda_0^2}.$$

Lorsque la dispersion du milieu est très faible, la rotation est donc en raison inverse du carré de la longueur d'onde, ce qui est la loi approchée du phénomène.

486. Interprétation de la dispersion. — Cette différence de phase des vibrations circulaires peut être expliquée de plusieurs manières en admettant : que, pour les deux rayons, la période reste la même, avec des vitesses de propagation différentes ; ou que, la vitesse restant la même, la période cesse d'être égale pour les deux rayons et devient différente, pour chacun d'eux, de sa valeur relative au milieu extérieur ; ou encore, ce qui serait peut être plus vraisemblable, qu'il y a en même temps modification de la période de vibration et de la vitesse de propagation.

En général, il est impossible de concevoir que la période d'un état vibratoire permanent soit différente de celle de la cause qui le produit ; mais, dans le cas actuel, la difficulté ne semble pas exister, au moins au même degré, si l'on admet que le milieu que traverse la lumière est animé lui-même d'un mouvement de rotation dans un sens déterminé. La période du mouvement relatif pourrait rester la même pour les deux rayons et la même que dans le milieu extérieur ; la différence de phase finale serait due seulement à la différence des mouvements absolus de rotation.

Dans tous les cas, lorsque les deux rayons circulaires sortent du milieu, ils reprennent la même période, avec la

même vitesse de propagation, et reconstituent un rayon polarisé rectilignement.

Appelant V la vitesse de propagation dans le milieu soustrait à l'action du champ magnétique et $\lambda = VT$ la longueur d'onde correspondante, l'interférence a lieu à la sortie entre les composantes circulaires dont la différence de phase à l'entrée était

$$\delta_1 = 2\pi e \frac{V_0}{n\lambda}\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) = 2\pi \frac{e}{\lambda}\left(\frac{V}{V_2} - \frac{V}{V_1}\right).$$

Si l'on admet que les périodes T_1 et T_2 des rayons circulaires dans le milieu soient inégales, leurs longueurs d'onde sont $\lambda_1 = V_1 T_1$, $\lambda_2 = V_2 T_2$; la différence des nombres d'oscillations qu'elles ont effectuées pendant la traversée est $\frac{e}{\lambda_2} - \frac{e}{\lambda_1}$. La différence de phase finale des rayons émergents et la rotation du plan de polarisation deviennent alors

$$\delta = 2\pi e\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) + \delta_1 = 2\pi \frac{e}{\lambda}\left(\frac{V}{V_2} + \frac{\lambda}{\lambda_2} - \frac{V}{V_1} - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right).$$

$$R = \frac{\pi e}{\lambda}\left(\frac{V}{V_2} + \frac{\lambda}{\lambda_2} - \frac{V}{V_1} - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right).$$

La vitesse V_1 est une fonction de la longueur d'onde λ_1 et de la composante X du champ magnétique parallèle à la propagation. La modification de vitesse étant très petite, on pourra dans le développement de cette fonction se borner aux termes de premier ordre et écrire

$$\frac{V}{V_1} = f(\lambda_1, X) = f(\lambda + \lambda_1 - \lambda, X),$$

$$\frac{V}{V_1} = 1 + (\lambda_1 - \lambda)\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_0 + X\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_0.$$

Lorsque la valeur de X est nulle, la fonction f se réduit au rapport des indices de réfraction n_1 et n, correspondant aux

vitesses V_1 et V dans le milieu non modifié par le champ magnétique, ce qui donne

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_0 = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{n}{n_1}\right) = \frac{1}{n}\frac{dn_1}{d\lambda} = \frac{1}{n}\frac{dn}{d\lambda}.$$

On peut donc écrire

$$\frac{V}{V_1} = 1 + \frac{1}{n}\frac{dn}{d\lambda}(\lambda_1 - \lambda) - \alpha X.$$

Un raisonnement analogue donnerait

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = 1 + \frac{1}{n}\frac{dn}{d\lambda}(\lambda_1 - \lambda) - \beta X;$$

$$\frac{V}{V_1} + \frac{\lambda}{\lambda_1} = 2 + \frac{2}{n}\frac{dn}{d\lambda}(\lambda_1 - \lambda) - (\alpha + \beta)X).$$

Comme les coefficients α et β changent de signe quand on passe du circulaire droit au circulaire gauche, il en résulte

$$R = \frac{2\pi e}{\lambda}\left[\frac{1}{n}\frac{dn}{d\lambda}(\lambda_2 - \lambda_1) + (\alpha + \beta)X\right].$$

On a aussi, au même degré d'approximation,

$$(\lambda_1 - \lambda)\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right) = \beta\lambda X,$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right) = -2\beta\lambda X.$$

Enfin, la relation $\lambda_0 = n\lambda$ donne

$$n + \lambda\frac{dn}{d\lambda} = \frac{d\lambda_0}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda} : \frac{dn}{d\lambda_0};$$

par suite,

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\frac{dn}{d\lambda} = -2\beta n\lambda\frac{dn}{d\lambda_0}X.$$

Le pouvoir rotatoire devient alors

$$\rho = \frac{R}{eX} = \frac{2\pi}{\lambda}\left[\alpha + \beta - 2\beta\lambda\frac{dn}{d\lambda_0}\right] = \frac{A}{\lambda_0}\left(n - B\lambda_0\frac{dn}{d\lambda_0}\right).$$

C'est la formule (IV) vérifiée par M. Joubin. Le coefficient B deviendrait égal à l'unité, si l'on suppose $\alpha = \beta$, c'est-à-dire quand on admet que les longueurs d'onde restent proportionnelles aux vitesses de propagation correspondantes ou, en d'autres termes, que les vibrations des rayons circulaires conservent la période primitive.

487. Remarques de Lord Kelvin. — Les phénomènes de polarisation rotatoire magnétique, d'après une remarque judicieuse de Lord Kelvin, paraissent être la confirmation des idées d'Ampère sur la nature du magnétisme.

« L'influence du magnétisme sur la lumière, découverte « par Faraday, dépend du sens du mouvement des particules « mobiles. Par exemple, dans un milieu qui possède cette « propriété, les particules situées sur une droite parallèle aux « lignes de force, déplacées sur une hélice ayant cette ligne « comme axe, puis projetées tangentiellement avec une vi- « tesse capable de leur faire décrire des circonférences de « cercle, auront des vitesses différentes suivant que leur mou- « vement s'effectuera dans un sens (par exemple celui du « courant qui produit le champ) ou dans le sens opposé. « Mais la réaction élastique du milieu doit être la même « pour des déplacements égaux, quelles que soient les vi- « tesses et la direction des particules; en d'autres termes, « les forces qui font équilibre à la force centrifuge du mou- « vement circulaire doivent être égales, bien que les mou- « vements lumineux soient inégaux.

« Les mouvements circulaires absolus étant ou égaux ou « capables de donner des forces centrifuges égales aux parti- « cules considérées en premier lieu, il faut que les mouve- « ments lumineux soient seulement des composantes du « mouvement total; et que la moindre composante lumi- « neuse dans une direction, composée avec le mouvement « qui existe dans le milieu quand il ne transmet pas de lu- « mière, donne la même résultante que le plus grand mou-

« vement lumineux composé avec le même mouvement non « lumineux.

« A mon avis, il est non seulement impossible de concevoir, « autrement que par cette explication dynamique, comment « un rayon polarisé circulairement qui traverse un morceau « de verre aimanté parallèlement aux lignes de force puisse, « tout en conservant la même qualité, c'est-à-dire en restant « toujours droit ou toujours gauche, se propager avec une « vitesse différente suivant qu'il se meut dans le sens des « lignes de force ou en sens contraire, mais je pense qu'on « peut démontrer qu'il n'y a pas d'autre explication possible « de ce fait.

« Il semble résulter de là que la découverte de Faraday « apporte une démonstration de la réalité de l'hypothèse « d'Ampère, sur la nature intime du magnétisme, et donne « une définition de l'aimantation dans la théorie mécanique « de la chaleur.

« L'introduction du principe de la conservation des aires « dans l'hypothèse des tourbillons (*vortices*) moléculaires « conduit à ce résultat que la ligne, perpendiculaire au plan « sur lequel la somme des projections des aires des mouve- « vements thermiques est un maximum (plan du maximum « des aires), pourrait bien être l'axe magnétique du corps « aimanté et suggère l'idée que le moment magnétique se « trouverait alors défini par la valeur de cette projection.

« L'explication de tous les phénomènes d'attraction et de « répulsion électromagnétique, ainsi que d'induction électro- « magnétique, doit dès lors être cherchée simplement dans « l'inertie et la pression de la matière dont le mouvement « constitue la chaleur. Maintenant, que cette matière soit ou « non l'électricité, qu'elle soit un fluide continu remplissant « les espaces inter-moléculaires, ou qu'elle soit elle-même « groupée moléculairement; ou encore toute matière est-elle « continue et l'hétérogénéité moléculaire n'est-elle due qu'à « des tourbillons finis ou à d'autres mouvements relatifs des « parties contiguës d'un corps; ce sont des points qu'il est « impossible de décider et sur lesquels il serait peut être « oiseux de faire des spéculations dans l'état actuel de la « science. » (Sir W. THOMSON, *Reprint of Papers*, p. 419).

488. Double réfraction électrique. — Sous l'influence de la compression ou de la traction, les corps solides isotropes acquièrent les propriétés biréfringentes et l'axe de double réfraction est parallèle à la direction suivant laquelle s'est exercée l'action mécanique. Ces propriétés sont temporaires et disparaissent avec les déformations mécaniques.

M. Kerr [1] a constaté que des phénomènes analogues se manifestent dans un champ électrique.

Pour réaliser l'expérience avec les corps solides, on noie dans une plaque de *verre* deux fils conducteurs reliés séparément avec les électrodes d'un appareil capable de produire des étincelles de 15 centimètres.

Un rayon de lumière polarisé à 45° sur la direction des fils est éteint par un analyseur. Quand on provoque les étincelles, la lumière reparaît au bout de quelques secondes, de plus en plus brillante, et disparaît d'une manière progressive après suppression des décharges.

L'effet peut être compensé, au moins pour la partie centrale, par une lame de verre tendue suivant la direction des lignes de force ou comprimée dans une direction perpendiculaire. Le champ électrique donne donc au verre une double réfraction négative, analogue à celle que produirait une compression parallèle aux lignes de force.

Pour d'autres corps, comme la *résine*, l'action du champ équivaut à une traction parallèle aux lignes de force.

Le phénomène se produit aussi avec les liquides ; il est alors absolument temporaire et simultané avec le champ, car dans les décharges d'un condensateur observées à l'aide du miroir tournant, il n'existe aucun intervalle de temps appréciable entre la production des étincelles successives et la double réfraction correspondante [2].

Avec des électrodes terminées en pointe ou munies à leurs extrémités de petites sphères métalliques, le champ est irrégulier et la double réfraction, tout en conservant le même signe, présente des intensités très inégales dans les différentes parties de la région observée.

(1) J. Kerr, *Phil. Mag.* [4], t. L, p. 337 ; 1875. — *Journal de phys.*, t. IV, p. 376 ; 1875.

(2) R. Blondlot, *Journal de phys.* [2], t. VII, p. 91 ; 1888.

L'emploi de petites plaques parallèles aux extrémités des électrodes permet d'obtenir un champ plus uniforme et d'en déterminer l'intensité. Il résulte des expériences de M. Kerr que, pour l'unité d'épaisseur du diélectrique, la différence de phase δ des composantes principales de la vibration est proportionnelle au carré de la différence de potentiel des électrodes et en raison inverse du carré de leur distance, c'est-à-dire finalement proportionnelle au carré F^2 du champ ; on peut donc écrire

$$\delta = kF^2.$$

La constante k est caractéristique du corps soumis à l'expérience; elle est positive ou négative, suivant que le corps se comporte comme le verre tendu ou comprimé parallèlement aux lignes de force.

La plupart des liquides, tels que le *sulfure de carbone*, les *hydrocarbures* et les *acides gras* sont positifs. Il n'existe pas d'ailleurs de relation nette entre les propriétés chimiques de ces corps et leur double réfraction électrique.

Les diélectriques (**81**) peuvent être considérés comme soumis, suivant les lignes de force, à une tension proportionnelle au carré du champ. Il semble donc que la double réfraction considérée soit en rapport avec la tension électrostatique du milieu, mais l'inversion de signe qui a lieu pour le verre, en particulier, ne permet pas d'établir une analogie étroite entre les deux ordres de phénomènes.

489. Réflexion de la lumière sur les aimants. — Une nouvelle relation entre le magnétisme et la lumière a été découverte par M. Kerr (¹). Lorsqu'un rayon de lumière polarisé dans l'un des azimuts principaux, c'est-à-dire dans un plan parallèle ou perpendiculaire au plan d'incidence, tombe sur la surface polie d'un métal, le rayon réfléchi reste polarisé dans le plan primitif, par raison de symétrie, et peut être éteint par un analyseur. L'expérience étant ainsi réglée, la lumière reparaît en général dans l'analyseur dès que le métal est aimanté; sauf des cas particuliers, la lumière réfléchie n'est plus alors entièrement polarisée.

(¹) J. Kerr, *Phil. Mag.* [5], t. VIII, p. 321 ; 1877 et t. IX, p. 161; 1878.

L'effet est surtout manifeste avec le *fer*; il s'observe également pour le *nickel* et le *cobalt*.

Ce phénomène a provoqué un grand nombre de travaux; il suffira d'en signaler ici les principaux caractères.

Supposons d'abord que la réflexion ait lieu sur le pôle de l'aimant, c'est-à-dire sur une surface perpendiculaire à l'aimantation.

Pour l'incidence normale, la lumière réfléchie reste polarisée, mais le plan de polarisation a tourné d'un certain angle, qui ne dépasse guère un demi-degré pour les plus grandes aimantations, en sens contraire des courants particulaires auxquels équivaut le magnétisme dans les idées d'Ampère.

Pour une incidence oblique, la lumière réfléchie devient un peu elliptique et l'on obtient un minimum d'intensité par une faible rotation de l'analyseur ou du polariseur, à partir des azimuts primitifs qui correspondaient à l'extinction.

Afin de fixer les idées, on supposera que ces rotations sont évaluées par un observateur situé sur le rayon incident ou le rayon réfléchi et qui regarde la surface réfléchissante. Les rotations seront dites positives dans le sens des courants particulaires et négatives en sens contraire.

La lumière primitive étant polarisée dans le plan d'incidence, ou le premier azimut, le minimum d'intensité s'obtient en tournant l'analyseur, à partir de l'azimut d'extinction, d'un angle négatif $-\beta_1$, ou le polariseur d'un angle également négatif $-\alpha_1$ et plus grand en valeur absolue.

Des rotations de même sens produisent le minimum d'intensité quand la lumière est polarisée dans un plan perpendiculaire, ou dans le second azimut, avec cette différence que la rotation $-\beta_2$ de l'analyseur est moindre que la rotation $-\alpha_2$ du polariseur.

Ces rotations ont une valeur maximum pour l'incidence normale et diminuent à mesure que le rayon se rapproche de la surface. Sous une même incidence, elles présentent d'ailleurs les relations très simples : $\beta_2 = \alpha_1$ et $\alpha_2 = \beta_1$.

En renversant le sens de l'aimantation, les effets changent de signe; on profite de cette propriété pour déterminer le double des rotations α et β par une inversion des courants d'aimantation.

Des phénomènes analogues se manifestent encore, mais à un degré moindre, lorsque la surface réfléchissante est équatoriale, c'est-à-dire parallèle à l'aimantation.

Dans ce cas, l'effet du magnétisme est nul quand le rayon est normal à la surface, ou le plan d'incidence perpendiculaire à la direction d'aimantation.

Lorsque le plan d'incidence est parallèle à l'aimantation, les phénomènes changent quelquefois de signe au passage de l'incidence principale I, définie par une différence de phase de 90° entre les composantes principales de la réflexion métallique, et qui est d'environ 75° pour le fer.

Dans le premier azimut de polarisation, le minimum s'obtient encore en tournant l'analyseur d'un angle négatif $-\beta_1$. La rotation du minimum produit par le polariseur est positive $+\alpha_1$ quand l'incidence i est comprise entre o et I et de sens contraire pour des incidences supérieures à I.

Dans le second azimut, la rotation du minimum par le polariseur est toujours négative $-\alpha_2$; la rotation de l'analyseur doit être positive $+\beta_2$ pour $0 < i < I$ et de sens opposé pour les incidences supérieures à I.

Ces différentes rotations passent toutes par un maximum en valeur absolue au voisinage de $i = 60°$ et l'on a encore les relations $\alpha_2 = \beta_1$, $\beta_2 = \alpha_1$.

Enfin, toutes choses égales, les rotations paraissent augmenter beaucoup avec la longueur d'onde de la lumière, de sorte que la dispersion de ce phénomène particulier présenterait un caractère anormal.

La réflexion métallique étant par elle-même un phénomène complexe, on peut essayer de dégager des expériences l'effet qui est dû au magnétisme.

Désignons par h_1 et h_2 les facteurs de réflexion, relatifs à l'incidence i, pour les vibrations polarisées dans le premier ou le second azimut, et par δ l'excès de perte de phase de la dernière produite par la réflexion métallique.

La lumière primitive étant polarisée dans le *premier azimut*, prenons pour unité l'amplitude de sa vibration et supposons qu'on tourne le polariseur d'un angle α très petit, de droite à gauche par exemple, pour l'observateur qui regarde le miroir. Les composantes x et y de la vibration, l'une per-

pendiculaire et l'autre parallèle au plan d'incidence, sont

$$x = \cos\alpha \quad \text{ou} \quad x = 1 \qquad \text{et} \qquad y = \sin\alpha = \alpha.$$

On admettra que ces deux composantes subissent sensiblement les effets de la réflexion métallique ordinaire, leurs amplitudes devenant

$$x' = h_1 x = h_1 \qquad \text{et} \qquad y' = h_2 y = h_2 \alpha,$$

et que l'aimantation y ajoute une composante d'amplitude m polarisée dans le second azimut, avec une perte de phase μ par rapport à x'.

En négligeant, ce qui est permis, la perte de phase de la composante x', les composantes principales de la lumière réfléchie comprennent

	Amplitude.	Perte de phase.
1er azimut	h_1	o
2e azimut	$h_2\alpha$	δ
	m	μ

Si l'on tourne l'analyseur d'un très petit angle β dans le même sens, à partir de la position d'extinction primitive, les vibrations qui le traversent deviennent

Amplitude.	Perte de phase.
$-h_1\sin\beta = -h_1\beta$	o
$h_2\alpha\cos\beta = h_2\alpha$	δ
$m\cos\beta = m$	μ

D'après la règle générale de la composition des vibrations, l'intensité peut être représentée par

$$(6) \qquad (-h_1\beta + h_2\alpha\cos\delta + m\cos\mu)^2 + (h_2\alpha\sin\delta + m\sin\mu)^2.$$

Les conditions du minimum relatif aux angles α ou β sont

$$h_2\alpha - h_1\beta\cos\delta + m\cos(\delta - \mu) = 0,$$
$$-h_1\beta + h_1\alpha\cos\delta + m\cos\mu = 0.$$

Si l'angle β est nul pour la première et l'angle α nul pour la seconde, les rotations correspondantes α_1 et β_1 sont

$$h_2\alpha_1 + m\cos(\delta - \mu) = 0, \qquad h_1\beta_1 = m\cos\mu.$$

Il en résulte

$$\operatorname{tang}\mu = -\frac{h_2\alpha_1 + h_1\beta_1\cos\delta}{h_1\beta_1\sin\delta} = -\cot\delta - \frac{h_2\alpha_1}{h_1\beta_1\sin\delta}.$$

Les quantités μ et m sont ainsi déterminées en fonction des données de l'expérience et par les propriétés relatives à la réflexion métallique.

On peut encore rendre l'intensité nulle par des valeurs convenables α' et β' des angles α et β, auquel cas le rayon réfléchi reste polarisé. Cette condition exige que l'on ait, en même temps,

$$-h_1\beta' + h_2\alpha'\cos\delta + m\cos\mu = 0,$$
$$h_2\alpha'\sin\delta + m\sin\mu = 0;$$

par suite

$$\cot\mu = \cot\delta - \frac{h_1\beta'}{h_2\alpha'\sin\delta}.$$

Si la lumière est polarisée d'abord dans le *second azimut*, on ajoutera de même à la vibration réfléchie une composante d'amplitude m' et de perte de phase μ', polarisée dans le premier azimut. Les angles α et β conservant la même signification par rapport aux azimuts de polarisation et d'extinction relatifs à la réflexion purement métallique, l'intensité de la lumière dans l'analyseur sera donnée par l'expression (6), sauf la permutation des angles α et β :

$$(-h_1\alpha + h_2\beta\cos\delta + m'\cos\mu')^2 + (h_2\beta\sin\delta + m'\sin\mu')^2.$$

Appelant α_2 et β_2 les angles relatifs au minimum obtenu par le polarisateur et l'analyseur, α'' et β'' les rotations qui correspondent à l'intensité nulle, on a encore

$$\operatorname{tang}\mu' = -\cot\delta - \frac{h_2\beta_2}{h_1\alpha_2\sin\delta},$$

$$\cot\mu' = \cot\delta - \frac{h_1\alpha''}{h_2\beta''\sin\delta};$$

$$m' = \frac{h_1\alpha_2}{\cos\mu'} = -\frac{h_2\beta''\sin\delta}{\sin\mu'}.$$

Pour la réflexion équatoriale, l'expérience montre que l'on a, sous toute incidence, $m' = m$ et $\mu' = \mu$. D'ailleurs, l'amplitude m reste très petite, au plus de l'ordre de 10^{-3}, ce qui justifie les simplifications apportées dans le calcul.

En prenant l'amplitude m négative, la perte de phase μ est de 29°26′ pour une incidence de 86°; elle diminue jusqu'à zéro pour une incidence comprise entre 60° et 50°, l'amplitude $-m$ prenant alors une valeur maximum. A mesure qu'on se rapproche de la normale, l'amplitude m se rapproche de zéro, et μ semble conserver une valeur positive, mais les expériences paraissent alors beaucoup plus douteuses.

Pour une aimantation de 1400 unités C. G. S. par unité de volume, la valeur de m est $0,28.10^{-3}$ sous l'incidence de 86° et son maximum $0,8.10^{-3}$.

Il ne semble pas que le phénomène de Kerr ait encore été rattaché d'une manière satisfaisante aux relations générales. L'idée la plus simple, au moins pour la réflexion polaire, consiste à admettre que le mouvement lumineux pénètre dans le métal à une certaine profondeur, où les vibrations éprouvent, dans les chemins d'aller et de retour, une rotation électromagnétique négative, qu'elles conservent ensuite dans le premier milieu. Si l'on place, en effet, sur le pôle une lame de verre argentée à sa seconde surface, le plan de polarisation du rayon réfléchi, après avoir traversé deux fois la lame, éprouve une rotation positive.

Placée sur la surface équatoriale d'un aimant, une lame de verre montre également des propriétés opposées à celles que produit l'aimantation.

Pour qu'une même explication s'applique aux deux cas, il faudrait que le pouvoir rotatoire magnétique du fer fût négatif, ce qui est en contradiction avec les observations directes de Kundt sur les lames minces de ce métal.

COMPLÉMENT

PROPRIÉTÉS DES CRISTAUX

RELATIONS GÉNÉRALES

490. Milieux continus. — Les progrès des sciences physiques et chimiques conduisent à considérer les corps comme formés par un ensemble de *molécules*, dont chacune est elle-même un édifice particulier renfermant un certain nombre d'*atomes*, de même espèce ou d'espèces différentes, groupés de manière à constituer l'édifice moléculaire.

La nature du corps est définie par cet édifice; les réactions chimiques correspondent à une modification dans le nombre, l'espèce ou le mode de groupement des atomes.

Dans les liquides et les gaz, les molécules sont relativement libres et leurs actions réciproques sont comparables à celles des points matériels.

Dans les corps solides, les molécules sont reliées entre elles, quelquefois indifféremment suivant toutes les directions, comme pour les verres ou les métaux solidifiés brusquement après fusion, le plus souvent avec une disposition systématique, soit sous l'influence actuelle ou antérieure d'actions mécaniques, telles que la tension, la compression ou la torsion, soit qu'elles aient pris un arrangement cristallin en relation avec leur propre structure.

Un milieu quelconque, même lorsqu'il est liquide ou gazeux, ne possède donc pas ce qu'on appelle la continuité mathématique, en ce sens que les propriétés ne varient pas toujours d'une quantité infiniment petite quand on passe d'un point à un autre infiniment voisin.

Toutefois, plusieurs phénomènes paraissent indépendants

de la structure des molécules et peuvent être traités comme si la continuité existait; en d'autres termes, il est permis de substituer au milieu réel un milieu continu, sans modifier aucun des faits d'expérience.

Le milieu est *homogène* lorsque tous les éléments de volume possèdent les mêmes propriétés; il est *isotrope* si toutes les directions sont physiquement identiques, *anisotrope* dans le cas contraire.

La structure d'un milieu doit se traduire dans les phénomènes électriques et magnétiques dont il est le siège, aussi bien que dans les autres effets physiques, tels que la dilatation et la conductibilité calorifiques, la propagation de la lumière, etc. Si les mêmes lois élémentaires s'appliquent à un certain nombre de phénomènes, quelle qu'en soit la nature, elles conduisent à plusieurs conséquences communes, sans que cette uniformité de relations implique aucun lien nécessaire entre les causes primitives [1].

491. Ellipsoïde primaire. — Supposons qu'en un point O d'un milieu homogène, un phénomène quelconque défini par une grandeur et une direction, c'est-à-dire par un vecteur OM, *corresponde* à un autre vecteur OM′, qui en est la cause ou la conséquence.

Si le point M′ décrit une sphère, c'est-à-dire si l'on envisage différentes directions du vecteur OM′ par rapport au milieu, le point M décrit une certaine surface qui caractérise les propriétés du milieu.

Prenant le point O comme origine d'axes rectangulaires, les coordonnées x, y, z du point M sont des fonctions des coordonnées x', y', z' du point M′ et réciproquement. La condition générale est que le vecteur OM s'annule quand le vecteur OM′ devient nul.

Si on développe les valeurs de x', y', z' en fonction de x, y, z, on peut, dans la majorité des cas, se borner aux termes du premier ordre, ce qui donne des équations de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= Ax + By + Cz,\\ y' &= A'x + B'y + C'z,\\ z' &= A''x + B''y + C''z. \end{aligned}\right.$$

[1] E. Mallard, *Traité de minéralogie*, t. II, ch. I; Paris, 1884.

On en déduit, en appelant r' la longueur OM′,

$$(2)\quad r'^2 = x^2\Sigma A^2 + y^2\Sigma B^2 + z^2\Sigma C^2 + 2(xy\Sigma AB + yz\Sigma BC + zx\Sigma CA).$$

Cette équation représente un ellipsoïde S, puisque les coefficients des carrés des coordonnées sont essentiellement positifs. Donc, si la valeur de r' est constante, c'est-à-dire si le point M′ décrit une sphère, le point M décrit un ellipsoïde; on l'appelle l'*ellipsoïde primaire* du phénomène considéré.

Lorsque les axes de coordonnées sont parallèles à ceux de l'ellipsoïde primaire, on a

$$\Sigma AB = 0, \quad \Sigma BC = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma CA = 0.$$

Considérons deux droites rectangulaires OM'_1 et OM'_2 en désignant par les mêmes indices 1 et 2 les coordonnées relatives à leurs directions. Avec les nouveaux axes, la condition

$$x'_1 x'_2 + y'_1 y'_2 + z'_1 z'_2 = 0$$

se réduit à

$$x_1 x_2 \Sigma A^2 + y_1 y_2 \Sigma B^2 + z_1 z_2 \Sigma C^2 = 0.$$

Cette équation signifie que les vecteurs OM_1 et OM_2, correspondant à ces droites rectangulaires, sont tels que chacun d'eux se trouve dans le plan diamétral conjugué de l'autre par rapport à l'ellipsoïde primaire.

Si la droite OM_2 est l'un des axes de l'ellipsoïde, la droite OM_1 est située dans la section principale qui lui est perpendiculaire; quand cette droite OM_1 coïncidera avec un autre axe, la direction correspondante OM'_1 sera encore perpendiculaire à OM'_2. Donc les axes de l'ellipsoïde primaire ont pour correspondantes trois droites rectangulaires.

492. Condition de symétrie. — Pour préciser le problème, nous admettrons que les deux directions opposées d'une droite quelconque jouissent des mêmes propriétés. Dans ce cas, les axes de l'ellipsoïde primaire doivent coïncider avec leurs droites correspondantes.

En effet, si la coïncidence n'a pas lieu, il existe une direction ON, autour de laquelle on peut faire tourner l'ellipsoïde

dans un certain sens et d'un angle déterminé, de manière à mettre ses axes en coïncidence avec leurs droites correspondantes. Par rapport à la direction opposée ON', la rotation de coïncidence est de sens contraire; les directions ON et ON' ne jouiraient donc pas des mêmes propriétés.

Lorsque le milieu satisfait à cette condition, que Mallard appelle *égalité symétrique*, les sections principales de l'ellipsoïde sont des plans de symétrie du milieu par rapport à la propriété physique considérée.

Les phénomènes étant alors symétriques par rapport à trois plans rectangulaires, la valeur de x change seule de signe quand on change le signe de x' et inversement, et il en est de même pour les autres coordonnées; il résulte alors des équations (1) que les coefficients B, C, A', C', A'' et B'' sont nuls. En désignant par a, b et c les inverses des coefficients A, B' et C'', ces équations se réduisent donc à

$$x = ax', \quad y = by', \quad z = cz'. \tag{3}$$

c'est-à-dire que le phénomène total, dont les projections rectangulaires sont x, y et z, est la superposition des effets qui correspondraient séparément aux trois composantes x', y', z' du vecteur OM' parallèles aux axes principaux.

493. Surfaces principale et inverse. — Si l'on fait $r' = 1$, c'est-à-dire si les coordonnées nouvelles représentent les rapports de leurs valeurs précédentes à r', l'équation (2) de l'ellipsoïde primaire devient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{S}$$

Soient α, β, γ les cosinus directeurs d'un rayon vecteur $OM = \rho$ de cette surface et α', β', γ' ceux de la droite correspondante OM'. Les équations (3) et (S) donnent

$$\rho\alpha = a\alpha', \quad \rho\beta = b\beta', \quad \rho\gamma = c\gamma'. \tag{4}$$

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{a^2\alpha'^2 + b^2\beta'^2 + c^2\gamma'^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}. \tag{5}$$

Le plan passant par l'origine et perpendiculaire à OM

a pour équation $\alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0$, c'est-à-dire, en tenant compte des équations (4),

$$(6) \qquad \frac{\alpha}{a} x + \frac{\beta}{b} y + \frac{\gamma}{c} z = 0.$$

Si l'on considère la surface S_1 du second degré

$$(S_1) \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1,$$

on voit que le plan (6) est parallèle au plan tangent à cette surface en un point P_1 situé sur le rayon vecteur ρ, à la distance $OP_1 = \rho_1$, et dont les coordonnées sont

$$(7) \qquad \frac{x_1}{\alpha} = \frac{y_1}{\beta} = \frac{z_1}{\gamma} = \rho_1 = k\rho.$$

On a alors, en substituant les coordonnées du point P_1 dans les équations (S_1) et (5),

$$(8) \qquad \frac{1}{\rho_1^2} = \frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} + \frac{\gamma^2}{c} = \frac{a\alpha'^2 + b\beta'^2 + c\gamma'^2}{\rho^2}.$$

$$(9) \qquad \frac{1}{k^2} = \frac{\rho^2}{\rho_1^2} = a\alpha'^2 + b\beta'^2 + c\gamma'^2.$$

La surface S_1 est la *surface principale* relative au phénomène considéré ; elle a les mêmes directions d'axes que l'ellipsoïde primaire.

Cette surface est aussi un ellipsoïde si les coefficients a, b et c sont de même signe ; c'est un hyperboloïde, ou plutôt l'ensemble de deux hyperboloïdes conjugués, l'un réel et l'autre imaginaire, quand ils sont de signes différents. Dans ce dernier cas, le point P_1 est réel ou imaginaire, suivant que la direction du rayon vecteur ρ rencontre la surface réelle ou la surface imaginaire de ces hyperboloïdes.

L'angle θ que forment les directions correspondantes OM et OM′ est, en tenant compte de (4) et (8),

$$(10) \qquad \cos\theta = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = \frac{a\alpha'^2 + b\beta'^2 + c\gamma'^2}{\rho} = \frac{\rho}{\rho_1^2}.$$

Le produit $\rho \cos\theta$ est la projection du vecteur ρ sur la direction qui lui est correspondante. On se rappellera d'ailleurs que la valeur de ρ est négative quand le rayon vecteur ρ_1 est imaginaire. Il en résulte

$$(11) \qquad \frac{1}{k} = \frac{\rho}{\rho_1} = \rho_1 \cos\theta = \sqrt{\rho \cos\theta}.$$

Le coefficient k est réel lorsque ρ_1 est réel, ou $\cos\theta$ positif, et imaginaire dans le cas contraire. Ce coefficient a une signification géométrique. Soit p la perpendiculaire OQ_1 (fig. 117) abaissée du point O sur le plan tangent en P_1, à la surface

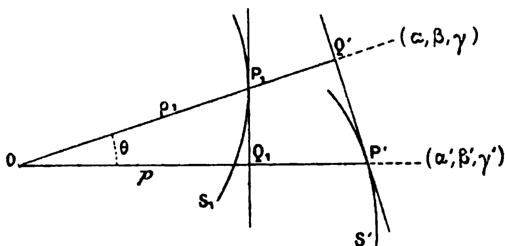


Fig. 117.

principale S_1; cette perpendiculaire fait le même angle θ avec le rayon vecteur OM, puisqu'elle est parallèle à la direction correspondante du rayon vecteur ρ, et l'on a

$$p = \rho_1 \cos\theta = \frac{1}{k}.$$

Prenons dans la même direction une longueur $OP' = \rho'$ telle que $p\rho' = 1$, ou $\rho' = k$; le lieu des points P' est une surface S' polaire réciproque de S_1 par rapport au point O; on l'appelle *surface inverse*. On sait d'ailleurs que le plan tangent en P' à cette surface est aussi perpendiculaire au rayon vecteur ρ_1 et que la distance $OQ' = p'$ à ce plan satisfait également à la condition $p'\rho_1 = 1$.

Pour trouver l'équation de la surface inverse S', il suffit de remarquer que les coordonnées $x'\, y'\, z'$ du point P' sont, en tenant compte de (4) et (7),

$$x' = k\alpha' = k\rho\frac{\alpha}{a} = \frac{x_1}{a}, \qquad y' = \frac{y_1}{b} \qquad \text{et} \qquad z' = \frac{z_1}{c}.$$

Substituant ces valeurs de x_1, y_1, z_1 dans l'équation de la surface principale S_1, il en résulte

$$(S') \qquad ax'^2 + by'^2 + cz'^2 = 1.$$

La surface inverse S' est encore un ellipsoïde, ou l'ensemble de deux hyperboloïdes conjugués, dans les mêmes conditions que pour la surface S_1; ses axes sont les inverses des axes de la surface principale.

En remplaçant k par ρ' dans l'équation (10), et les rayons vecteurs ρ' ou ρ_1 par les inverses de p ou de p', la valeur du rayon vecteur ρ, qui traduit le phénomène, peut s'écrire

$$(12) \qquad \rho = \frac{\rho_1}{\rho'} = \frac{1}{\rho'^2 \cos\theta} = p\rho_1 = \frac{p}{p'};$$

ce rayon vecteur est perpendiculaire au plan tangent à la surface inverse S' au point P' déterminé par la direction qui lui est correspondante.

DILATATION, CONDUCTIBILITÉS, INDUCTION

494. Dilatations thermiques. — Dans un milieu homogène dont tous les points sont à la même température, la dilatation relative à une variation de température $t' - t = \tau$ est définie encore par trois plans principaux.

Dans le cas actuel, les projections rectangulaires de la dilatation d'une droite sont des fonctions linéaires des projections de la droite et les équations (1) sont rigoureuses; cette propriété résulte du fait expérimental que les faces planes d'un cristal restent planes à toute température.

Désignons par a, b et c les coefficients moyens de dilatation parallèlement aux axes principaux pour la variation de température τ. Les directions des axes étant définies, l'extrémité d'une droite de longueur égale à l'unité, dont la direction primitive est $(\alpha', \beta', \gamma')$, se déplace d'une quantité ρ suivant la direction correspondante (α, β, γ), et l'on a

$$\rho\alpha = a\alpha'\tau, \qquad \rho\beta = b\beta'\tau, \qquad \rho\gamma = c\gamma'\tau.$$

En faisant $\tau = 1$, on retrouve ainsi les équations (4) et, par suite, l'ellipsoïde primaire S, la surface principale S_1 et la surface inverse S'.

La projection de la dilatation correspondante ρ sur la direction primitive de la droite considérée est

$$\rho \cos\theta = a\alpha'^2 + b\beta'^2 + c\gamma'^2 = \lambda.$$

Comme le rayon vecteur ρ est toujours très petit, cette projection représente la dilatation même parallèlement à la droite, ou son coefficient moyen de dilatation λ.

En réalité, cette droite a tourné d'un angle δ tel que

$$\tang \delta = \frac{\rho \sin\theta}{1 + \rho \cos\theta}.$$

Si la direction primitive est également inclinée sur les axes principaux, on a $\alpha'^2 = \beta'^2 = \gamma'^2 = \frac{1}{3}$ et, par suite,

$$\lambda = \frac{a + b + c}{3}.$$

Le coefficient de dilatation est alors la moyenne des coefficients principaux.

Lorsque les paramètres a, b et c ne sont pas tous de même signe, les surfaces S_1 et S' sont hyberboliques. Le coefficient moyen de dilatation λ peut alors être positif, nul ou négatif. Il est nul pour les droites parallèles aux génératrices du cône asymptote des hyperboloïdes

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0.$$

L'ellipsoïde primaire, ainsi que les surfaces principale et inverse des dilatations, devraient être semblables pour toute variation de température, si les coefficients principaux a, b et c restaient proportionnels, condition qui ne semble jamais réalisée. En réalité ces surfaces ont des formes particulières à chaque intervalle $t' - t$ de température.

Si l'on considère une suite de variations très petites, les grandeurs des axes de ces surfaces et leurs directions se modifient d'une manière continue suivant des lois différentes.

Les axes principaux conservent des directions constantes lorsque le milieu est symétrique par rapport à trois plans ou trois axes rectangulaires.

Quand il n'existe qu'un plan de symétrie, l'un des axes lui est perpendiculaire et les deux autres sont dans ce plan.

Enfin les trois axes n'ont plus aucune direction que l'on puisse définir à priori si le milieu ne possède ni plan ni axe de symétrie cristalline.

495. Conductibilités thermique et électrique. — Dans les corps anisotropes et homogènes, le flux de chaleur au travers d'un élément de surface isotherme n'est plus normal, mais il existe trois directions rectangulaires pour lesquelles cette condition est satisfaite.

Toutes choses égales, le flux de chaleur par unité de temps sur un élément de surface dS est proportionnel à la dérivée partielle de la température par rapport à la normale. Si cet élément appartient à une surface de niveau, le flux est représenté par l'expression

$$d\varphi = -m\,dS\frac{dt}{dn} = mf\,dS,$$

dans laquelle le coefficient m représente la conductivité relative à cette direction.

Soient ρ le flux réel par unité de section droite; α, β, γ ses cosinus directeurs rapportés aux axes principaux; α', β', γ' les cosinus directeurs de la normale n à l'élément dS; θ l'angle que font entre elles ces deux directions. Le flux de chaleur qui traverse cet élément est

$$mf\,dS = \rho\,dS\cos\theta = \rho(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')\,dS.$$

Si l'on désigne par a, b et c les conductivités principales, la composante du flux considéré parallèle à l'axe des x est

$$\rho\alpha\alpha'\,dS = -a\alpha'\,dS\frac{\partial t}{\partial x} = a\alpha'^2 f\,dS,$$

ce qui donne, en appliquant la même règle aux autres coordonnées,

$$\rho\alpha = a\alpha' f, \qquad \rho\beta = b\beta' f, \qquad \rho\gamma = c\gamma' f.$$

Les vecteurs ρ et f sont ainsi correspondants. En faisant $f=1$, on a encore les mêmes équations pour l'ellipsoïde primaire, ainsi que pour les surfaces principale et inverse de conductibilité. Les dernières sont aussi des ellipsoïdes, puisque les coefficients a, b et c sont essentiellement positifs.

Il en résulte également

$$\rho \cos\theta = a\alpha'^2 + b\beta'^2 + c\gamma'^2 = m.$$

Cette expression représente la conductivité m relative à une direction quelconque (α', β', γ'), en fonction des conductivités principales a, b et c.

Il est clair que le même raisonnement s'applique à la propagation de l'électricité dans les conducteurs anisotropes. Il suffira de considérer t comme un potentiel et le flux de chaleur par unité de temps comme un courant électrique; la grandeur f représente alors le champ électrique F.

Lorsque le régime permanent est établi, ces flux de chaleur ou d'électricité sont indépendants du temps.

496. Induction électrique ou magnétique. — Un simple changement dans le langage permet encore de traduire, par les mêmes lois, les phénomènes d'induction électrostatique ou d'aimantation induite.

Soient a, b et c les pouvoirs inducteurs spécifiques relatifs aux directions principales d'un milieu anisotrope et F le champ électrique; le flux d'induction au travers de l'élément dS d'une surface de niveau est, en appelant K le pouvoir inducteur correspondant,

$$d\varphi = \text{K}\text{F}\,d\text{S},$$

et l'on a

$$\text{K} = \rho \cos\theta = a\alpha'^2 + b\beta'^2 + c\gamma'^2.$$

Si l'on donne au champ une série de directions différentes, l'ellipsoïde primaire, les surfaces principale et inverse d'induction ont les mêmes expressions que précédemment, et les dernières sont aussi des ellipsoïdes.

Pour le magnétisme, si l'aimantation reste proportionnelle à la force magnétisante, on désignera encore par a, b, c les

perméabilités principales; la perméabilité μ relative à la direction α', β', γ' est

$$\mu = \rho \cos \theta = a\alpha'^2 + b\beta'^2 + c\gamma'^2.$$

497. Sphère diélectrique anisotrope. — Supposons qu'une sphère diélectrique de volume v soit placée dans un champ uniforme F, ou une sphère infiniment petite dans un champ quelconque au point où sa valeur est F. Si la direction du champ est $(\alpha', \beta', \gamma')$, la sphère se polarise suivant une direction différente (α, β, γ), faisant l'angle θ avec la première; la polarisation peut être représentée par ρF et le moment électrique de la sphère est $M = v\rho F$.

En désignant par a, b et c les valeurs principales (**127**) du coefficient

$$H = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{K-1}{K+2} = \frac{3k}{3+4\pi k},$$

on a aussi

$$\rho \cos \theta = a\alpha'^2 + b\beta'^2 + c\gamma'^2.$$

Si la sphère peut tourner autour de son centre de gravité, le couple produit par l'action du champ est

$$C = MF \sin\theta = vF^2(a\alpha'^2 + b\beta'^2 + c\gamma'^2) \tan\theta.$$

L'axe de ce couple est perpendiculaire au plan formé par les directions du champ F et de la polarisation ρF.

La sphère est en équilibre quand le champ est parallèle à l'un des axes principaux, et l'équilibre est stable quand cet axe est celui de plus grande induction.

Si la sphère est astreinte à tourner autour d'une droite, le couple efficace est la projection de l'axe du couple C sur cette droite; l'équilibre a lieu quand la droite est située dans le plan du champ et de la polarisation.

Les composantes M_1, M_2 et M_3 du moment électrique, respectivement parallèles aux axes principaux, sont d'ailleurs, en appelant X, Y et Z les composantes du champ,

$$M_1 = vaX = va\alpha'F,$$
$$M_2 = vbY = vb\beta'F,$$
$$M_3 = vcZ = vc\gamma'F.$$

Le moment électrique résultant M est

$$M^2 = (a^2\alpha'^2 + b^2\beta'^2 + c^2\gamma'^2)\,v^2 F^2 = \rho^2 v^2 F^2.$$

Les cosinus directeurs α, β, γ de ce moment et l'angle θ de l'axe électrique avec le champ sont donnés par les équations (4) et (10) du n° **493**.

Les couples de rotation C_1, C_2, C_3 relatifs aux trois axes principaux sont

$$\begin{aligned}
C_1 &= M_2 Z - M_3 Y = vF^2(b-c)\beta'\gamma',\\
C_2 &= M_3 X - M_1 Z = vF^2(c-a)\gamma'\alpha',\\
C_3 &= M_1 Y - M_2 X = vF^2(a-b)\alpha'\beta';
\end{aligned}$$

et le couple résultant

$$C^2 = v^2F^4\left[(b-c)^2\beta'^2\gamma'^2 + (c-a)^2\gamma'^2\alpha'^2 + (a-b)\alpha'^2\beta'^2\right].$$

Ces résultats sont comparables à ceux qui ont été établis précédemment (**134**) pour l'action d'un champ uniforme sur un ellipsoïde diélectrique.

Si la sphère peut tourner autour de l'axe des z, par exemple, et qu'elle soit déviée d'un angle δ, on a

$$\alpha' = \cos\delta, \qquad \beta' = \sin\delta,$$

$$C_3 = \frac{vF^2}{2}(a-b)\sin 2\delta.$$

Pour une déviation initiale assez petite, si l'on abandonne la sphère à l'action du champ, elle exécute des oscillations isochrones. En appelant r le rayon de la sphère et d sa densité, son moment d'inertie est $K = v d \frac{2}{5} r^2$.

Le nombre N des oscillations simples par seconde est alors

$$N^2 = \frac{5}{2\pi^2 r^2 d} F^2 (a-b).$$

Il en résulte une méthode pour déterminer la différence des pouvoirs inducteurs principaux.

L'énergie totale de la sphère dans le champ est la somme

des énergies qui correspondent aux moments électriques dus aux composantes $F\alpha'$, $F\beta'$, $F\gamma'$ du champ parallèles aux axes principaux ; on a donc (129)

$$(1) \qquad W = -\frac{v}{2}(a\alpha'^2 + b\beta'^2 + c\gamma'^2)F^2.$$

Si la sphère est mobile autour de son centre de gravité, l'équilibre stable correspond au cas où l'énergie est minimum. Comme il est déjà nécessaire, pour l'équilibre, que deux des cosinus α', β', γ' soient nuls, ce minimum aura lieu quand la parenthèse se réduira au terme qui correspond au plus grand des coefficients a, b et c. Alors l'axe de plus grand pouvoir inducteur est parallèle au champ.

Si la sphère occupe successivement deux positions P_1 et P_2, pour lesquelles on distinguera par les indices 1 et 2 les valeurs correspondantes du champ et de sa direction, la variation d'énergie est

$$W_1 - W_2 = \frac{v}{2}\left[(a\alpha_2'^2 + b\beta_2'^2 + c\gamma_2'^2)F_2^2 - (a\alpha_1'^2 + b\beta_1'^2 + c\gamma_1'^2)F_1^2\right].$$

Lorsque la sphère se déplace de manière que le champ conserve la même direction par rapport aux axes principaux, cette expression devient

$$W_1 - W_2 = \frac{v}{2}(a\alpha'^2 + b\beta'^2 + c\gamma'^2)(F_2^2 - F_1^2).$$

Dans tous les cas, la sphère tend à marcher vers les points où le champ est maximum. L'action qu'elle subit est d'autant plus marquée que le second facteur est plus grand ; elle sera maximum quand l'axe principal de plus grand pouvoir inducteur spécifique sera parallèle au champ, minimum quand cet axe lui sera perpendiculaire.

498. Corps magnétiques. — Les expériences de Plücker (1) et de Faraday (2) sur les corps cristallisés ont montré que l'action du champ magnétique peut s'exercer d'une manière inégale dans les différentes directions. Poisson avait prévu

(1) Plücker, *Ann. de Ch. et de Phys.* [3] t. XXIX, p. 129 ; 1850.
(2) Faraday, *Phil. Trans. L. R. S.* ; 1849, p. 1.

l'existence de pareils corps, que Faraday appelle *magnécristallins*. Pour les concevoir dans la théorie de Poisson, il suffit de substituer aux sphères conductrices, disséminées dans le milieu non conducteur, des ellipsoïdes égaux orientés suivant la même direction. Si le corps ainsi constitué « était une « sphère homogène et qu'on le fit tourner sans déplacer son « centre de gravité et sans rien changer aux forces extérieures « ni à la fonction V, les actions magnétiques de ce corps « changeraient néanmoins en grandeur et en direction. Ce « cas particulier ne s'étant pas encore présenté dans l'obser- « vation, nous l'exclurons de nos recherches quant à pré- « sent... (*Mém. de l'Institut* pour 1821-1822, t. V, p. 278) ».

Les propriétés établies pour les diélectriques s'appliquent exactement dans le cas actuel, au moins toutes les fois que l'on peut admettre la proportionnalité de l'aimantation à la force magnétisante.

En outre, l'aimantation étant toujours très faible, les valeurs de a, b et c se réduisent alors aux coefficients principaux et il n'est plus nécessaire d'imposer la forme sphérique aux corps étudiés.

Quelle que soit la forme du corps, pourvu que ses dimensions restent très petites par rapport à l'espace dans lequel se manifestent les variations du champ, son énergie est représentée par l'équation (1).

Si ce corps est mobile autour de son centre de gravité, l'équilibre stable a lieu quand l'axe de plus grande aimantation est parallèle au champ. S'il peut se déplacer, il marche vers les points où le champ est maximum.

Pour les corps de plus grandes dimensions, les mêmes règles s'appliquent à chacun des éléments de volume.

Il peut arriver alors que les deux causes agissent en sens contraires et que, dans un champ non uniforme, par exemple, la plus grande longueur du corps se place dans une direction perpendiculaire à celle du champ, de manière à donner les apparences du diamagnétisme. C'est ainsi que s'expliquent beaucoup d'expériences qui avaient paru contradictoires.

Les conclusions sont directement opposées quand il s'agit de corps diamagnétiques, auquel cas les coefficients a, b et c sont négatifs. L'équilibre stable dans un champ uniforme a

lieu quand l'axe de moindre diamagnétisme est parallèle à la direction du champ. Dans un champ non uniforme, le corps tend à se déplacer dans le sens où l'intensité décroît, et l'action est maximum quand l'axe de plus faible diamagnétisme est parallèle au champ.

Ces deux causes peuvent encore agir en sens contraires et donner des résultats différents, en apparence contradictoires, suivant que l'une ou l'autre sera prédominante, lorsque la rotation n'est plus libre autour du centre de gravité ou que le corps a des dimensions notables.

Le phénomène serait encore plus complexe pour les corps dont les coefficients principaux d'aimantation ne seraient pas tous trois de même signe.

De pareils corps paraîtront magnétiques dans certaines conditions et diamagnétiques dans d'autres. On n'en connaît aucun exemple; mais le cas peut être réalisé artificiellement en plaçant, dans un champ, une sphère magnétique anisotrope entourée d'un fluide également magnétique et dont le coefficient d'aimantation serait intermédiaire entre les coefficients de plus grande et de plus petite aimantation du corps anisotrope. La sphère paraîtra magnétique suivant l'axe de plus grande aimantation, diamagnétique suivant l'axe de plus faible aimantation; elle se dirigera vers les points de champ maximum si le premier de ces axes est maintenu dans une direction parallèle au champ, dans le sens inverse pour le second. Ces actions sont d'ailleurs très faibles et il y aurait sans doute de grandes difficultés à les mettre en évidence.

L'élévation de température (**289**) agit aussi sur les corps cristallisés magnétiques ou diamagnétiques : non seulement les coefficients d'aimantation diminuent, mais leurs différences s'affaiblissent et les propriétés magnéto-cristallines tendent à disparaître. Entre les températures de 30° à 140°, la différence des coefficients diminue de moitié pour le *bismuth* et des deux tiers pour le *carbonate de fer*.

Il résulte encore du principe de Carnot (**290**) que, dans un champ magnétique invariable, un cristal doit se refroidir quand son axe de plus grande aimantation, ou de plus petit diamagnétisme, passe d'une direction parallèle à une direction perpendiculaire à celle du champ.

SYMÉTRIE DES SYSTÈMES

499. Réseaux cristallins. — L'homogénéité des corps cristallisés se définira encore par la condition que deux éléments de volume, pris en des points quelconques, jouissent des mêmes propriétés, mais il n'est plus permis de pousser la division au delà d'une certaine limite.

Le milieu étant supposé indéfini, il existe autour d'un point O d'autres points *homologues*, c'est-à-dire tels que les propriétés du milieu soient les mêmes quand on les rapporte à des axes de coordonnées, de directions déterminées, ayant pour origine l'un ou l'autre de ces points.

Considérons l'un d'eux A, le plus rapproché du point O, suivant une direction Ox, et à la distance $OA = a$; il s'en trouvera d'autres A', A'' ..... à la même distance commune et l'ensemble de ces points ou *nœuds* forme une *rangée* de paramètre a.

Un autre nœud B, le plus voisin du premier dans une direction différente Oy, déterminera, de la même manière, une rangée B, B', B''... de paramètre b. Une droite menée par l'un des points B parallèlement à Ox rencontre aussi une rangée de paramètre a et une parallèle à Oy par l'un des points A une rangée de paramètre b.

Le plan des xy est un plan *réticulaire* dans lequel les deux systèmes de rangées forment un *réseau* dont la maille élémentaire est un parallélogramme de côtés a et b.

Un nœud C, situé en dehors de ce plan et le plus rapproché du point O sur la direction correspondante Oz, détermine également une rangée nouvelle C, C', C'',.... de paramètre c. Enfin un plan parallèle à xy mené par l'un des points C est un plan réticulaire homologue du premier; on aura, de même, une série de plans réticulaires homologues entre eux en menant par l'un des points A et B des plans parallèles yz ou zx.

L'intersection de deux plans réticulaires voisins de chaque espèce définit la *molécule intégrante* d'Haüy ou le *parallélipipède élémentaire* de Bravais.

La détermination des paramètres d'un système réticulaire

et de leurs directions respectives renferme une part d'arbitraire, puisqu'on n'a pas suivi de règle dans le choix des axes, mais tous les modes de groupement qui comprennent l'ensemble des nœuds doivent nécessairement satisfaire aux conditions de symétrie de la structure générale.

Les différents systèmes cristallins sont définis par le degré de symétrie des systèmes réticulaires correspondants.

Quant à la symétrie propre du milieu, elle dépend aussi de la répartition de la matière ou des propriétés physiques autour de chaque nœud dans les éléments du réseau, c'est-à-dire dans l'intérieur de chaque molécule.

Deux causes interviennent ainsi pour déterminer la constitution d'un cristal : la structure du réseau, c'est-à dire le mode de groupement des molécules entre elles, et la structure particulière à chaque molécule.

Les éléments de symétrie de la molécule doivent se retrouver dans les réseaux. Si ces éléments sont les mêmes de part et d'autre, il se traduisent dans la disposition relative des faces de l'édifice cristallin, les dimensions mêmes de ces faces étant dues à des causes accessoires qu'il n'y a pas lieu de faire intervenir ici.

Les formes dominantes du cristal sont réglées par la structure des réseaux ; lorsque le degré de symétrie de la molécule n'est pas le même que celui des réseaux, il peut arriver, mais non d'une manière nécessaire, que cette circonstance se traduise sur le polyèdre cristallin.

Un cristal est dit *homoédrique* lorsqu'il conserve en totalité les éléments de symétrie du système auquel il appartient, *hémiédrique* si la moitié d'une espèce d'éléments a disparu et, en général, *mériédrique* quand une partie de ces éléments fait défaut, sans que la symétrie finale cesse d'être plus riche que celle des systèmes dont le degré de symétrie est inférieur à celui du système considéré.

On sait combien les idées de Bravais ont apporté de progrès dans l'étude de la cristallographie ; toutefois elles paraissent aujourd'hui insuffisantes pour rendre compte de tous les phénomènes physiques observés.

La théorie de Bravais montre seulement que les centres de gravité des molécules homologues ayant même orientation

sont situés aux sommets des mailles d'un réseau parallélipipédique. Mais il peut exister, dans l'intérieur des mailles, d'autres molécules homologues, orientées différemment, qui jouent le même rôle par rapport à des axes de même sens ou de sens contraires.

Les axes de coordonnées présentent, en effet, deux caractères distincts, *droit* ou *gauche*, suivant que la permutation des lettres, dans l'ordre $x, y, z, x, \ldots$ se fait en portant l'axe des x sur l'axe des y vers la droite ou vers la gauche d'un observateur situé sur l'axe des z. Les axes changent de sens quand on change le signe de l'une des coordonnées, ou des trois en même temps, ou plus généralement quand on en prend le symétrique par rapport à un plan.

Les axes de coordonnées correspondant à diverses espèces de molécules homologues peuvent aussi être dirigés d'une façon toute différente. Pour le *quartz*, par exemple, on a été amené à supposer qu'il existe trois séries de molécules homologues, disposées de manière que l'on passerait de l'une à l'autre par des mouvements héliçoïdaux.

500. Eléments de symétrie. — On doit remarquer aussi que les corps soumis aux observations ont nécessairement des dimensions finies et que certains phénomènes sont liés à cette limitation des milieux.

Pour comprendre l'ensemble des problèmes de physique moléculaire, il est utile d'envisager la symétrie d'une manière plus générale. Nous adopterons le mode de classification proposé par M. Curie (1).

Un système physique, de dimensions limitées, possède un certain degré de symétrie lorsque ses propriétés sont représentées par les mêmes fonctions par rapport à deux ou plusieurs jeux d'axes de coordonnées rectangulaires, de même sens ou de sens contraires, que l'on appellera *équivalents.*

Les propriétés d'une droite peuvent être différentes suivant les directions opposées; une *droite* sera donc définie, comme un vecteur géométrique, par sa grandeur et sa direction.

De même, un *plan* peut séparer des régions de propriétés différentes, comme si ses deux faces ne possédaient pas les mêmes qualités.

(1) P. Curie, *Journ. de Phys.* (3), t. III, p. 393; 1894.

Les éléments d'un système (points, droites, plans,....) sont dits *homologues* quand ils jouissent des mêmes propriétés par rapport à des axes de coordonnées équivalents.

501. Opérations de recouvrement. — L'existence d'une symétrie quelconque implique la condition que le système peut être superposé à lui-même par une opération, dite de *recouvrement*, laquelle revient à superposer les axes de coordonnées équivalents.

Remarquons d'abord que, dans un système limité, les origines des axes de coordonnées équivalents sont nécessairement situées sur une même surface sphérique. On peut les transporter au centre de la sphère, qu'on appellera le *centre de figure* du système. Le problème revient donc à déterminer tous les types de symétrie autour d'un point.

Lorsque les jeux d'axes de coordonnées équivalents sont de même sens, on peut superposer le second au premier par simple rotation autour d'une droite; le recouvrement est alors *direct* ou de *premier genre*.

S'ils sont de sens contraires, une rotation permet encore de superposer au premier l'image du second par rapport à un plan passant par l'origine. L'opération de recouvrement est alors *inverse* ou de *second genre*; c'est une transformation symétrique.

Dans un recouvrement de second genre, le plan de symétrie qui sert à produire l'image peut toujours être choisi de manière que la rotation finale, destinée à produire la superposition, ait lieu autour d'une normale au plan.

Supposons, en effet, qu'il existe deux jeux d'axes équivalents, un droit xyz et un gauche $x'y'z'$. Chacun d'eux est entièrement déterminé quand on connaît la direction de deux axes ou celle de deux droites quelconques, par exemple l'axe des x et la médiane du trièdre trirectangle des axes.

Soient, sur une sphère ayant pour centre l'origine commune, A et A′ (fig. 118) les traces des axes des x et des x', M et M′ celles des médianes correspondantes, A_1 et M_1 les symétriques de A′ et M′ par rapport à un certain plan P. Pour que les nouveaux axes soient superposables aux premiers par rotation autour de la normale au plan P, il faut que les arcs de grands cercles A_1B' et M_1N' soient respectivement égaux aux arcs

AB et MN perpendiculaires au même plan. Comme on a $A_1B' = A'B'$ et $M_1N' = M'N'$, par raison de symétrie, les triangles sphériques rectangles AB*a* et A'B'*a* sont égaux, ainsi que les triangles MN*m* et M'N'*m*, ce qui donne $Aa = aA'$ et $Mm = M'm$. Le plan cherché P passe donc par les bissectrices des angles plans AA' et MM'.

On peut d'ailleurs choisir pour les directions A et A', M et M', deux paires quelconques de droites homologues; il en résulte que toutes les bissectrices des angles formés par les droites homologues, rapportées aux deux espèces d'axes, se trouvent dans un même plan.

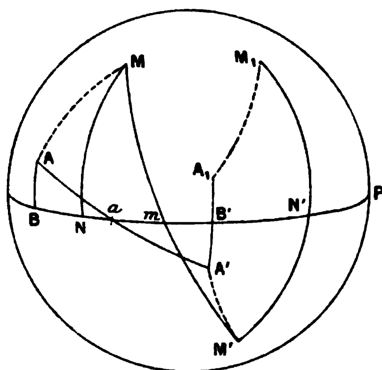


Fig. 118.

502. Différents types de symétrie. — Les caractères de symétrie d'un système présentent quelque analogie avec les *dimensions* des grandeurs physiques (413) et donnent lieu à des applications de même ordre.

Dans les recouvrements de premier genre, la droite L autour de laquelle on effectue la rotation du système s'appelle souvent un *axe de symétrie*, mais cette expression n'a plus ici sa signification géométrique; le nom d'*axe de répétition*, proposé par M. Curie, paraît mieux approprié.

L'axe de répétition est d'ordre q, pair ou impair, lorsque la moindre rotation qui produit le recouvrement est $\frac{2\pi}{q}$. L'opération pouvant alors être répétée, puisque le système est de nouveau identique à son état primitif, la rotation peut être

un multiple du premier angle, par 0, 1, 2..., $q-1$. L'axe est *binaire*, *ternaire*, *quaternaire*,... suivant que la valeur de q est 2, 3, 4,...; c'est un axe *d'isotropie* lorsque la rotation peut être quelconque, ou $q=\infty$.

Si les deux directions opposées de l'axe sont d'espèces différentes, par exemple l'axe d'une pyramide droite à base régulière, on le désignera par le symbole $L_q \lambda_q$.

Lorsque ces directions sont de même espèce, l'axe est *doublé* et se représentera par $2L_q$; il existe alors un axe de répétition d'ordre pair, normal à l'axe doublé, qui permet de renverser cet axe sur lui-même par une rotation de 180° et faisant partie des opérations de recouvrement. Tel serait le cas d'un parallèlipipède rectangle.

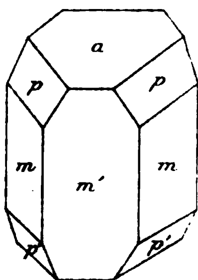


Fig. 119.

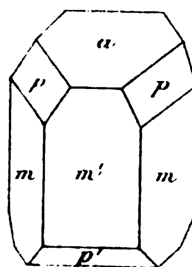


Fig. 120.

Dans les recouvrements de second genre, si la rotation est nulle, le système possède un *plan de symétrie* P.

Si la rotation est de 180°, il existe un *centre de symétrie* C.

Si la normale au plan qui a servi pour produire l'image du système est un axe de répétition d'ordre q, il existe q transformations symétriques.

Deux circonstances peuvent alors se présenter, suivant que l'image se superpose directement au système primitif ou que, par suite d'un arrangement alterne, la superposition exige en outre une rotation de $\frac{1}{2}\frac{2\pi}{q}$. Dans le premier cas, il existe un *plan de symétrie direct* P_q d'ordre q; dans le second, un *plan de symétrie alterne* ϖ_q, également d'ordre q.

Considérons, par exemple, un prisme à base hexagonale

régulière qui porte sur les arêtes latérales les troncateurs appartenant à deux rhomboèdres p et p' (fig. 119 et 120).

Les inclinaisons α et α' sur l'axe de ces deux espèces de troncatures peuvent être égales ou différentes et correspondre, soit aux mêmes faces latérales m haut et bas (fig. 119), soit alternativement à des faces différentes m et m' (fig. 120).

Dans les deux cas, l'axe du prisme est ternaire ; ses deux directions étant, en général, d'espèces différentes, il sera représenté par $L_3 \lambda_3$.

Si les angles α et α' sont égaux, l'axe du prisme est doublé, $2L_3$; il existe trois axes binaires, $3L'_2$, perpendiculaires au premier, ou transverses à l'axe principal, lesquels sont normaux aux faces latérales, pour la figure 119, et dans le plan des arêtes opposées pour la fig. 120.

Le plan médian perpendiculaire aux arêtes verticales est un plan de symétrie ternaire ; il est direct, P_3, pour la figure 119 et alterne, ϖ_3, pour la figure 120.

Un *groupe* est formé par un ensemble d'opérations telles que deux opérations successives soient équivalentes à une seule rentrant dans la même définition. Ainsi, autour d'un axe d'ordre q, les rotations successives $m\frac{2\pi}{q}$ et $n\frac{2\pi}{q}$ donnent le même résultat que la rotation unique $(m+n)\frac{2\pi}{q}$.

Remarquons encore, et c'est là une notion importante, qu'un groupe d'éléments de symétrie est une partie d'un groupe de symétrie plus élevée, dont il forme ce qu'on peut appeller un *intergroupe*. Un axe de répétition d'ordre q, par exemple, donne lieu à un intergroupe du groupe qui correspondrait à une axe d'ordre nq; toutes les opérations de la première symétrie appartiennent à la seconde.

503. Dissymétrie. — Pour un milieu dans un état physique défini, on appellera *symétrie caractéristique d'un phénomène* le degré maximum de symétrie compatible avec l'existence de ce phénomène, lequel peut d'ailleurs se produire avec la symétrie d'un des intergroupes du maximum de symétrie.

En d'autres termes, l'existence du phénomène exige seulement que certains éléments de symétrie fassent défaut ou que le milieu possède une *dissymétrie* déterminée.

Il en résulte que, si plusieurs phénomènes de natures différentes se superposent, les espèces de dissymétrie correspondantes doivent exister en même temps; le système final ne peut plus renfermer que les éléments de symétrie communs aux différents phénomènes.

Les propositions suivantes sont encore évidentes :

Les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets qu'elles produisent;

Lorsque les effets révèlent une certaine dissymétrie, cette dissymétrie doit exister dans les causes.

Les réciproques ne sont pas nécessaires, au moins pratiquement. Il est possible, en effet, que le degré de symétrie des phénomènes soit plus élevé que celui des causes dont ils proviennent et, d'autre part, que certaines causes de dissymétrie ne se traduisent pas par des effets correspondants, au moins d'une manière appréciable.

504. Axes d'isotropie. — Au point de vue des phénomènes physiques, il est surtout utile de considérer les groupes qui ont un axe d'isotropie, ou *groupes cylindriques*, lesquels sont au nombre de cinq, les quatre derniers étant des intergroupes du premier :

(*a*)	$\frac{2L_\infty}{P_\infty}, \frac{\infty L_2}{\infty P_2}$, C,	cylindre circulaire droit.
(*b*)	$2L_\infty$, ∞L_2,	cylindre tordu.
(*c*)	$L_\infty \lambda_\infty$, ∞P_1,	tronc de cône, champ électrique.
(*d*)	$\frac{L_\infty \lambda_\infty}{P_\infty}$, C,	cylindre tournant, champ magnétique.
(*e*)	$L_\infty \lambda_\infty$.	

Le groupe (*a*) possède un axe de symétrie doublé d'ordre infini, $2L_\infty$, avec une infinité d'axes binaires doublés transverses à l'axe principal, ∞L_2, un plan de symétrie direct P_∞ transverse et d'ordre infini, une infinité de plans de symétrie binaires et directs suivant les plans méridiens, ∞P_2, enfin un centre de symétrie C.

C'est la symétrie caractéristique de la double réfraction uniaxe. Un corps isotrope, comprimé ou dilaté suivant une direction, possède cette symétrie en totalité. Les cristaux

uniaxes conservent le centre ; l'axe principal est ternaire (rhomboèdre) ou quaternaire (prisme droit à base carrée) ou hexaire (prisme hexagonal); ils ont 3, 4 ou 6 axes binaires transverses, un plan de symétrie transverse, direct ou alterne, et enfin des plans de symétrie binaires méridiens. Dans tous les cas, le degré de symétrie reste plus élevé que pour chacun des groupes suivants.

Le groupe (*b*) peut être considéré comme représentant la torsion ; plus de centre ni de plans de symétrie. C'est la symétrie caractéristique du pouvoir rotatoire naturel.

Elle se traduit sur les cristaux de *quartz* par des facettes *x* et *s* (fig. 121) affectant de deux en deux les arêtes du prisme

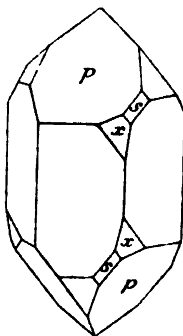


Fig. 121.

hexagonal et situées de part et d'autre aux extrémités d'une même arête. L'axe principal est doublé et ternaire; il existe, en outre, deux séries de trois axes binaires non doublés, transverses au premier. Cette symétrie sera donc représentée par $2L_3$, $3L_2\lambda_2$; c'est un intergroupe de (*b*).

Dans le groupe (*c*), les directions opposées de l'axe principal étant d'espèces différentes, il n'y a plus d'axe transverse. C'est la symétrie caractéristique de toutes les fonctions (vitesse, force, attraction universelle, champ électrique, courant électrique, etc.) qui peuvent être représentées par un vecteur tel que tous les méridiens soient des plans de symétrie ; ces différentes fonctions sont compatibles avec la symétrie (*c*) ou avec l'un de ses intergroupes.

Le groupe (*d*), qui correspond à un cylindre tournant ou à

un couple, conserve un centre et un plan de symétrie transverse; les deux directions opposées de l'axe principal sont symétriques, avec des caractères différents, et il n'y a plus de plans de symétrie méridiens.

C'est à ce groupe que l'on doit rapporter le champ magnétique. En effet, le champ magnétique F en un point P peut être considéré comme produit par un courant circulaire situé dans un plan normal à la direction du champ et ayant pour centre le point P; la symétrie du courant est évidemment celle d'un couple. Le champ magnétique est donc incompatible avec l'existence d'un axe binaire transverse à sa direction; il en est de même pour l'aimantation d'un milieu magnétique et pour le pouvoir rotatoire magnétique.

Enfin le groupe (*e*) est un intergroupe commun à tous ceux qui le précèdent; il est donc compatible avec l'existence de phénomènes qui auront l'un quelconque des premiers comme symétrie caractéristique.

505. Exemples. — Pour préciser ces idées, nous les appliquerons à quelques phénomènes.

1° Une sphère électrisée possède des axes d'isotropie dans toutes les directions. Si on la soumet à l'action d'un champ électrique, tous les axes de symétrie perpendiculaires à la direction du champ sont supprimés; le nouveau système formé par la sphère et le champ ne possède plus alors que la symétrie caractéristique du champ.

2° Le champ électrique développe la double réfraction uniaxe dans les solides isotropes ou les liquides (**488**) et impose au nouveau système la symétrie (*c*), laquelle n'est pas incompatible avec le phénomène, puisqu'elle forme un intergroupe de la symétrie caractéristique (*a*).

3° Le système formé par un conducteur rectiligne animé d'une vitesse normale à sa direction possède un axe binaire dans le sens de la vitesse. Si le mouvement a lieu dans un champ magnétique perpendiculaire au plan du conducteur et de sa vitesse, l'axe binaire normal au champ ne peut plus exister; c'est à cette dissymétrie que correspond la force électromotrice d'induction dont le conducteur devient le siège.

4° L'aimantation longitudinale d'un cylindre de fer provoque, suivant la nature du métal, une dilatation ou une con-

traction ([1]). Ce changement de dimensions traduit la dissymétrie de (*a*) dont (*d*) est un intergroupe.

5° Si l'on superpose les symétries (*c*) et (*d*) dans une expérience, les seuls éléments de symétrie qui restent sont ceux de (*e*) qui est un intergroupe de (*b*).

Un fil de fer étant aimanté dans le sens de sa longueur, on le fait parcourir par un courant. Le caractère de dissymétrie (*b*) doit se manifester, le fil se tord; c'est une expérience de M. Wiedemann ([2]).

6° Inversement, si l'on tord un fil de fer parcouru par un courant, il s'aimante dans le sens de la longueur. En superposant ainsi les groupes (*b*) de torsion et (*c*) du courant, on obtient (*e*) qui est un intergroupe de l'aimantation.

7° Dans le phénomène de Hall (476) un courant électrique (*c*) et un champ magnétique (*d*) sont superposés à angle droit. Le seul élément de symétrie commun aux deux systèmes qui persiste est alors un plan de symétrie passant par le courant et perpendiculaire au champ magnétique. La production d'un courant latéral situé dans ce plan et perpendiculaire au premier n'est pas incompatible avec la symétrie résiduelle.

8° Si l'on considère une bobine cylindrique indéfinie à enroulement uniforme et de section quelconque, le plan de chaque section droite est un plan de symétrie. Le champ magnétique du courant doit donc être normal à ce plan dans toute l'étendue de la section; les surfaces équipotentielles sont des plans parallèles et le champ est uniforme.

PYROÉLECTRICITÉ

506. Propriétés de la tourmaline. — Une baguette de *tourmaline* chauffée jouit de la propriété d'attirer les corps légers; le phénomène est dit *pyroélectrique*.

Œpinus ([3]) reconnut, dès 1756, que les deux extrémités du cristal s'électrisent en sens contraires, au point qu'on peut en tirer une étincelle; le cristal présente donc deux *pôles*

([1]) Joule, *Phil. Mag.* [3], t. XXX, p. 76 et 225; 1847.

([2]) G. Wiedemann, *Pogg. Ann.*, passim.

([3]) F. V. T. Œpinus. *Mém. de l'Acad. de Berlin*; 1756. — *Sermo academicus de similitudine vis electricæ atque magneticæ*; Petropolitana, 1758.

électriques, analogues à ceux des aimants, ou une polarisation comparable à celle des diélectriques, car les charges des surfaces terminales sont égales et de signes contraires.

En brisant une baguette de tourmaline ainsi électrisée, Canton [1] trouva, en effet, que les deux fragments restent électrisés comme le cristal primitif; il fit, en outre, cette observation importante que l'électrisation n'est pas due à la température même, mais à ses variations. Pendant qu'on échauffe la tourmaline, l'un des pôles A est positif, l'autre B négatif; si alors on ramène les extrémités à l'état neutre en les touchant sur toute leur étendue par des conducteurs et qu'on laisse ensuite refroidir le cristal, il se produit une inversion du phénomène : le pôle A devient négatif et le pôle B positif.

On appelle *pôle analogue* l'extrémité A dont l'électrisation a le même signe que celui de la variation de température, *pôle antilogue* l'extrémité B de caractère opposé, et la ligne qui joint les deux pôles est l'*axe* de pyroélectricité.

L'électricité qui apparaît aux pôles d'une tourmaline peut être déterminée en couvrant les surfaces terminales par une feuille d'étain mise en communication avec le sol par un appareil de mesure. Les lois du phénomène ont été nettement établies par les expériences très délicates de Gaugain [2] et peuvent se résumer de la manière suivante :

La charge électrique qui se produit sur une baguette de tourmaline chauffée entre les températures t_1 et t_2 est proportionnelle à la section droite S du cristal, indépendante de sa longueur, et reste la même quels que soit le mode et la durée de variation des températures. Une charge égale et de signe contraire se produit par le refroidissement de t_2 à t_1, de sorte que si, la tourmaline restant isolée, on la fait passer par un cycle fermé de températures en revenant au point de départ, elle se retrouve dans l'état initial.

D'après cet énoncé, l'accroissement de charge dq, pour une variation de température dt, peut s'écrire

$$(1) \qquad dq = k\,S\,dt = S f(t)\,dt = S\,\frac{dF}{dt}\,dt,$$

(1) Canton, *Phil. Trans. L. R. S.*, vol. LI, p. 403; 1759.

(2) Gaugain, *Ann. de chim. et de phys.* [3], t. LVII, p. 5; 1859. — Voir Mascart, *Traité d'électricité statique*, t. II, p. 494.

en désignant par $F(t)$ la fonction dont $f(t)$ est la dérivée. La charge totale q acquise entre les températures t_1 et t_2 a donc une expression de la forme

$$(2) \qquad q = S[F(t_2) - F(t_1)].$$

Il faut remarquer toutefois que la tourmaline doit être parfaitement isolante et qu'il est nécessaire de prendre des précautions particulières pour que ces lois se vérifient. On doit faire un choix parmi les échantillons du cristal et nettoyer leurs surfaces par un lavage à l'eau en les faisant sécher ensuite à une température inférieure à 150°; en outre, les propriétés électriques disparaissent vers 400 ou 500°, parce que le cristal est devenu conducteur. Ramené ensuite à la température ordinaire, sa surface reste hygrométrique et un nouveau lavage est nécessaire pour lui restituer ses propriétés primitives.

Ajoutons encore (1) que le phénomène est moléculaire, car des fragments de tourmaline pulvérisés au mortier et projetés sur une plaque de verre chaude ont une tendance manifeste à se grouper en lignes, quand on agite la plaque, comme la limaille de fer dans un champ magnétique.

Les lois expérimentales s'expliquent en admettant, suivant les idées de Faraday (2), que les baguettes de tourmaline sont polarisées, comme le serait un cylindre diélectrique placé dans un champ parallèle à sa longueur.

Dans cette manière de voir, la densité électrique sur un élément de la face terminale est égale à la projection normale de la polarisation I, c'est-à-dire que la charge correspondante est proportionnelle à la projection de l'élément sur un plan perpendiculaire à l'axe. La charge totale est donc le produit SI de la section droite par la polarisation. Telle serait la charge observée si la tourmaline était réellement neutre dans l'état initial; mais, si la première polarisation a été voilée par une communication au sol, la charge apparente est due seulement au changement de polarisation :

$$(3) \qquad q = S(I_2 - I_1).$$

(1) Brewster, *Ann. de chim. et de phys.* [2], t. XXVIII, p. 161; 1825.
(2) Sir W. Thomson, *Ph. Mag.* [5], t. V, p. 21; 1878.

MM. Curie [1], envisageant le phénomène d'une manière un peu différente, assimilent chaque molécule ou chacune des tranches de la tourmaline à un couple de Volta, cuivre et zinc par exemple, dans lequel existe une force électromotrice de contact V. Toutes ces tranches, étant séparées par un diélectrique isotrope équivalant à une couche d'air d'épaisseur e, formeraient une série de condensateurs superposés. La charge des faces opposées dans ces différents condensateurs est

$$(4) \qquad Q = \frac{SV}{4\pi e},$$

de sorte que, quand on passe d'un état à un autre, la production d'électricité est

$$(5) \qquad q = \delta Q = \frac{S}{4\pi} \delta \left(\frac{V}{e}\right).$$

507. Symétrie des cristaux. — Les phénomènes de pyro-

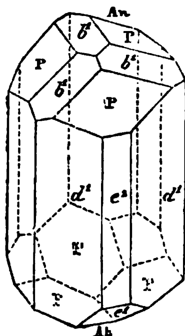


Fig. 122.

électricité sont en relation avec une dissymétrie particulière de structure des cristaux.

La *tourmaline* appartient au système rhomboïdal. Si l'on opère sur un cristal entier, dont les extrémités sont terminées par des faces naturelles, on reconnaît que le pôle analogue porte les faces hémiédriques d'un rhomboèdre b^1 (fig. 122) et le pôle antilogue les faces hémiédriques d'un autre rhomboèdre e^1 moins aigu.

[1] J. ET P. CURIE, *C. R. de l'Acad. des sc.*, t. XCI, p. 295; 1880.

L'axe principal, ou axe optique, est ternaire, mais les directions opposées sont d'espèces différentes, et il reste trois plans de symétrie méridiens. Le type du cristal doit donc se représenter par $L_3\lambda_3, 3P_1$; c'est un sous-groupe du système (*c*) des axes d'isotropie (**504**), lequel est compatible avec l'existence d'un champ électrique.

Les propriétés pyroélectriques se retrouvent à un moindre degré sur d'autres cristaux, tels que la *calamine*, la *topaze*, l'*acide tartrique*, le *sucre*, etc., et correspondent, dans tous les cas, au même caractère de dissymétrie cristalline.

La pyroélectricité doit être considérée comme une propriété du milieu indépendante de la forme extérieure, de telle sorte qu'une sphère, dont tous les points sont à la même température, est polarisée suivant une direction déterminée. Il n'est donc pas possible qu'un cristal, en tant que milieu anisotrope, présente plusieurs axes de pyroélectricité. Les apparences contraires tiennent à la forme particulière des cristaux observés et à l'inégalité des températures en leurs différents points.

C'est ainsi que les lamelles de *prehnite* en losange paraissent présenter un pôle analogue au centre et deux pôles antilogues aux extrémités de la petite diagonale, ce qui donnerait deux axes pyroélectriques opposés suivant la même droite; les cristaux d'*axinite*, en forme de parallélipipède oblique, auraient également deux axes parallèles et de sens contraires suivant deux arêtes opposées. Dans les deux cas, l'électrisation est réelle, mais elle tient à l'inégalité des températures dans le milieu et, sans doute, aux déformations élastiques qui en résultent; elle disparait entièrement dès que la température est uniforme.

Pour éviter ces causes d'erreur, la méthode la plus correcte consiste à tailler une lame dans le cristal, en appliquant des conducteurs sur les deux faces de manière que l'uniformité de température soit assurée; on fait ensuite communiquer l'un de ces conducteurs avec le sol et l'autre avec un électromètre. Dans ces conditions, la quantité d'électricité produite est proportionnelle à la composante normale de la polarisation électrique.

La *boracite*, qui semble cristalliser dans le système cubique

avec l'hémiédrie tetraédrique, présente un intérêt particulier. Une lame perpendiculaire à l'une des diagonales est pyroélectrique, le pôle analogue étant du côté où se trouvent les faces du tétraèdre. Mais Mallard a montré qu'à la température ordinaire la boracite est réellement formée par la juxtaposition de douze pyramides, ayant pour bases les faces du dodecaèdre rhomboïdal, et que le cristal devient subitement cubique à la température de 265°. A cette température, en effet, toute trace de pyroélectricité disparaît.

508. Cristaux thermoélectriques. — Si l'on réunit par un fil extérieur les deux pôles d'une tourmaline dont la température est croissante ou décroissante, on obtient un courant électrique temporaire, ou plus exactement une série de décharges correspondant aux variations successives de température.

Avec certains cristaux, le courant est continu et se maintient quand la température reste constante. Il est possible que la pyroélectricité intervienne pour une part dans le phénomène, mais il est alors nécessaire que les cristaux soient plus ou moins conducteurs et leurs propriétés sont à proprement parler thermoélectriques.

C'est ainsi que paraissent devoir s'interpréter les expériences de M. Friedel (¹) sur la *panabase* (cuivre gris) et la *chalcopyrite*. Ces deux cristaux appartiennent au système cubique, avec l'hémiédrie tétraédrique; sur les lames perpendiculaires à l'une des diagonales du cube, le pôle qui devient positif par échauffement est du côté des faces tétraédriques pour la panabase et du côté opposé pour la chalcopyrite.

Des effets analogues peuvent être obtenus avec les métaux. Si l'on construit un tetraèdre en *cuivre* et que l'on applique sur la base et sur la pointe opposée des lames de platine communiquant avec un galvanomètre, il se produit pendant l'échauffement du tétraèdre un courant dont le sens correspond à une température plus élevée sur la pointe; c'est là en effet que l'échauffement est le plus rapide. Le résultat est le même avec un tétraèdre de panabase; il est de signe contraire pour un tétraèdre de chalcopyrite.

On est donc conduit à admettre que les molécules des cris-

(¹) FRIEDEL, *Ann. de chim. et de phys.* (4), t. XVII, p. 79; 1869.

taux présentent la même structure tétraédrique et que les variations de température, se produisant d'une manière inégale sur les faces d'une lame parallèle à la base des pyramides, donnent lieu à de véritables courants thermoélectriques.

D'autres phénomènes présentent ce caractère d'une manière évidente. Marbach (1) a reconnu que les cristaux de *pyrite* de fer et de *cobalt gris* se partagent en deux variétés, de propriétés thermoélectriques opposées. En appliquant sur le cristal deux fils métalliques, l'un chaud et l'autre froid, le galvanomètre qui les réunit indique un courant qui, suivant la variété soumise à l'expérience, traverse le contact chaud dans un sens ou dans l'autre. La pyrite et le cuivre gris de variété α sont même positifs par rapport au bismuth et les variétés β négatives par rapport à l'antimoine, de sorte qu'en constituant un couple avec les variétés α et β on obtient une force électromotrice supérieure à celle du couple bismuth-antimoine.

M. Friedel a constaté que ces effets s'observent quelquefois sur un même cristal. Dans la *pyrite*, par exemple, les faces du cube sont tantôt couvertes de stries et tantôt lisses, quelquefois sur des plaques juxtaposées. L'application des fils froid et chaud sur des plaques d'aspect différent fait apparaître des courants thermoélectriques.

509. Conséquences du principe de Carnot. — Si la pyroélectricité est due à une polarisation de milieu, les remarques de Lord Kelvin (73) sur le principe de Carnot sont applicables. Un cristal jouissant de cette propriété doit s'échauffer ou se refroidir quand on le déplace dans un champ électrique non uniforme. Les forces extérieures tendent à porter le cristal vers les points où le champ est maximum et le travail correspondant croît avec la température; il en résulte qu'une tourmaline doit s'échauffer quand on la déplace de manière que l'action du champ tende à augmenter sa polarisation et se refroidir dans le cas contraire.

Comme l'effet du champ n'est pas modifié, alors même que la polarisation serait neutralisée par des causes extérieures, telles que la conduction par l'air ou par la couche superficielle, les variations de température doivent se pro-

(1) Marbach, *C. R. de l'Acad. des sciences*, t. XLV, p. 707; 1857.

duire également lorsque la tourmaline semble à l'état neutre, et dans les mêmes conditions que si sa polarisation restait apparente.

PIEZOÉLECTRICITÉ

510. Compression de la tourmaline. — MM. J. et P. Curie [1] ont découvert que si l'on comprime parallèlement à l'axe une baguette de tourmaline, le pôle analogue se charge d'électricité négative et le pôle antilogue d'électricité positive. Pour réaliser l'expérience, on coupe une tourmaline par des bases normales à sa longueur et on les couvre de feuilles d'étain que l'on met en relation l'une avec la terre et l'autre avec un électromètre.

Inversement, si l'on ramène les bases à l'état neutre et que l'on supprime ensuite la compression, le pôle analogue devient positif et l'autre négatif, avec la même charge que dans la première expérience. On a désigné ce phénomène par le nom de *piezoélectricité*.

La quantité q d'électricité ainsi produite sur une surface S est proportionnelle à la pression exercée $P = pS$, indépendante de la surface et de la longueur du cylindre; on a donc

$$q = kP = kpS. \tag{1}$$

L'expérience a montré que, sur tous les échantillons de tourmaline observés, une pression d'un kilogramme, qui équivaut environ à 10^6 dynes (17), dégage une quantité d'électricité égale à 0,053 unités électrostatiques; la valeur du coefficient k est donc

$$k = \frac{0,053}{10^6} = 5,3.10^{-8}.$$

On peut traduire également cette relation en disant que la tourmaline se polarise et que la polarisation kp est proportionnelle à la pression p par unité de surface.

[1] J. et P. Curie, *C. R. de l'Acad. des sciences*, t. XCI et XCII, passim; 1880 et 1881. — Voir Mallard, *loc. cit.*, t. II, p. 555.

Dans les vues de MM. Curie (506), qui assimilent un cristal de tourmaline à une pile de condensateurs formés par de doubles lames métalliques, la force électromotrice de contact ne dépend que de la température et la charge produite tient à la variation δe de l'épaisseur des couches intermédiaires. L'équation (5) du n° 506 donnerait alors

$$(2) \qquad q = \frac{S}{4\pi}\,\delta\left(\frac{V}{e}\right) = -\frac{VS}{4\pi}\cdot\frac{\delta e}{e^2} = -Q\frac{\delta e}{e}.$$

Comme la contraction $-\delta e$ est proportionnelle à l'excès de pression p, et peut être représentée par hp, il en résulte

$$(3) \qquad q = \frac{VS}{4\pi}\frac{h}{e^2}p, \qquad \text{d'où} \qquad k = \frac{Vh}{4\pi e^2}.$$

Remarquons encore qu'un accroissement de pression dans une direction parallèle à l'axe équivaut, au point de vue électrique, à une diminution de température du cristal.

La tourmaline s'électrise aussi sous l'influence d'actions mécaniques latérales. Considérons un prisme à section rectangulaire dont la longueur c est parallèle à l'axe, le côté a étant dans un plan de symétrie méridien et le troisième b perpendiculaire à ce plan. Si l'on exerce une pression normale à l'une des faces latérales, c'est-à-dire suivant une direction parallèle ou perpendiculaire au plan de symétrie, les bases ab et les faces latérales bc s'électrisent encore, de sorte que la polarisation résultante est dirigée dans le plan de symétrie.

Dans les deux cas, la charge des faces électrisées est encore proportionnelle à leur étendue et à la pression p' par unité de surface; les composantes de la polarisation parallèle et perpendiculaire à l'axe, cette dernière dans le plan de symétrie, peuvent être représentées par $k'p'$ et $k''p'$.

La compression suivant l'axe optique ne modifie pas la symétrie primitive ($L_3\lambda_3, 3P_1$) et les compressions latérales considérées ne conservent plus que l'un des plans de symétrie méridiens; la symétrie du cristal reste encore un sous-groupe de celle du champ électrique.

Les autres cristaux pyroélectriques satisfont aux mêmes

conditions de symétrie et présentent le même caractère de piezoélectricité.

511. Propriétés du quartz. — La symétrie du *quartz* ($2L_3, 3L_2\lambda_2$) est incompatible avec celle du champ électrique. Cette symétrie se conserve pour un échauffement uniforme; le cristal n'est donc pas pyroélectrique. Elle se conserve encore pour une pression parallèle à l'axe, de sorte que les actions mécaniques de cette nature ne rendent pas le cristal piezoélectrique. Il n'en est plus de même si la pression est normale ou oblique à l'axe ternaire.

Une pression parallèle à l'un des axes binaires non doublé supprime l'axe ternaire et deux des axes transverses; rien ne s'oppose alors à ce que le cristal se polarise dans la direction de l'axe binaire conservé. Il en est de même si la pression est perpendiculaire à l'axe optique et à un axe binaire.

Supposons que l'on taille un parallélipipède rectangle de côtés a, b et c, le dernier c étant parallèle à l'axe ternaire et le côté a parallèle à un axe binaire.

Si l'on exerce une pression $P = p.bc$ normale aux faces bc, l'une d'elles devient positive et l'autre négative et la charge électrique obéit à la même loi :

$$q = kP = kp.bc. \tag{4}$$

La polarisation kp qui se produit alors suivant l'axe binaire est dirigée vers les arêtes latérales qui ne portent pas les facettes s (fig. 121).

Quand on comprime le parallélipipède, $P' = p'.ac$, suivant une direction normale aux faces ac, aucune trace d'électricité n'apparaît ni sur les faces comprimées, ni sur les faces ab perpendiculaires à l'axe ternaire; les autres faces bc s'électrisent encore, mais *en sens contraire* de la charge qu'elles auraient prise par compression directe.

La polarisation est alors $-k'p'$ et la charge correspondante

$$q' = k'p'bc = k'\frac{b}{a}P'. \tag{5}$$

Si l'on comprime à la fois dans les deux sens, la polarisation de l'axe binaire est $kp - k'p'$. Supposons alors que les

pressions par unité de surface soient égales, $p=p'$. Dans ce cas, la polarisation doit être nulle, puisque la symétrie primitive du cristal est rétablie; il en résulte $k=k'$.

L'expérience montre, en effet, que ces coefficients sont égaux. La valeur obtenue par MM. Curie est $k=6{,}3.10^{-8}$. La piezoélectricité du quartz est donc supérieure de 0,2 environ à celle de la tourmaline.

Remarquons encore que, d'après l'équation (5), la charge q' produite par une pression totale P′ (ou par une tension égale) est proportionnelle au côté b perpendiculaire à l'axe binaire, en raison inverse du côté a parallèle à cet axe et indépendante de la troisième dimension suivant l'axe optique. Une lame dont l'épaisseur a est très petite, la longueur b très grande et la largeur c quelconque donnera ainsi sur ses faces latérales des charges électriques proportionnelles au poids qu'elle supporte dans le sens de la longueur.

MM. Curie ont mis à profit cette propriété pour construire un appareil qui permet d'obtenir à volonté une quantité déterminée d'électricité.

512. Caractère général. — On voit, par l'exemple du quartz, que les cristaux piezoélectriques sont plus nombreux que les cristaux pyroélectriques. La condition nécessaire est qu'après déformation, le cristal ait une symétrie inférieure à celle du champ électrique.

La *blende*, par exemple, a la symétrie du tétraèdre régulier, $4L_3, 3(2L_2), 6P$. Il existe quatre directions d'axes ternaires, trois d'axes binaires et ces éléments de symétrie ne se rencontrent pas dans le champ électrique, qui n'a qu'une seule direction d'axe. Aussi la blende n'est-elle pas pyroélectrique.

Mais, si l'on comprime le cristal suivant l'un des axes ternaires, il se produit un fort dégagement d'électricité. Dans ce cas, en effet, la symétrie se réduite à $(L_3, 3P)$, laquelle est de degré inférieur à celle du champ électrique.

Il en est de même pour le *chlorate de soude*, dont la symétrie $4L_3, 3(2L_2)$ ne conserve plus qu'un axe ternaire L_3, après qu'on l'a comprimée suivant la direction de cet axe.

513. Sphère cristalline. — La compression d'une sphère suivant l'un des diamètres conduira à des phénomènes plus généraux, en éliminant l'influence de la forme extérieure.

Dans les expériences de M. Röntgen (¹), une sphère de quartz était comprimée suivant un diamètre et on déterminait, par un plan d'épreuve relié avec un électromètre, le diamètre correspondant d'électrisation maximum.

Une compression parallèle à l'axe ternaire ne produit aucune électrisation, puisqu'elle ne change pas la symétrie.

Considérons maintenant les pressions parallèles au plan équatorial, c'est-à-dire perpendiculaires à l'axe ternaire.

Soient OA, OA_1 et OA_2 (fig. 123) les directions positives des axes binaires.

Les plans perpendiculaires PP', $P_1P'_1$ et $P_2P'_2$, qui sont les plans de symétrie supprimés par l'hémiédrie, partagent la

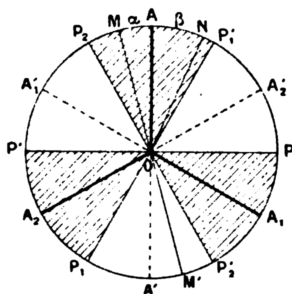


Fig. 123.

sphère en deux groupes de trois fuseaux alternatifs, dont les uns, qui sont ombrés sur la figure, renferment un pôle positif et les autres un pôle négatif.

La compression d'un axe binaire AA' produit les effets ordinaires, le pôle A devenant positif et le pôle A' négatif.

La compression du diamètre PP', étant symétrique par rapport à l'axe OA, ne peut électriser que cet axe; on sait que le pôle A devient négatif et le pôle A' positif.

La compression d'un diamètre quelconque MM', qui fait l'angle α avec l'axe binaire OA, doit produire encore une électrisation située dans le plan équatorial et dans une direction ON qui fait avec cet axe un angle β, que nous compterons du côté opposé. L'angle β s'annule avec α et devient égal à 60°

(¹) W. C. Röntgen, *Wied. Ann.*, t. XIX, p. 319; 1883.

lorsque l'angle α est égal à 30°, puisque la compression suivant le diamètre $P_2P'_2$ donne un pôle positif en A'_2. Il est donc à présumer que l'axe d'électrisation ON se déplace entre les directions OA et OP, lorsque la droite OM de compression se déplace entre OA et OP_2.

Si les angles α et β restent proportionnels, on a $\beta = 2\alpha$, de sorte que l'angle $\beta + \alpha$ est de 45° lorsque la droite OM est bissectrice de l'angle AOP_2.

L'observation confirme ces résultats.

Dans le *sel de Seignette*, qui cristallise en prismes droits à base rhombe, l'hémiédrie se traduit par des faces tétraédriques; le cristal possède seulement trois axes binaires doublés

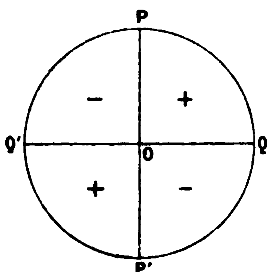


Fig. 124.

rectangulaires entre eux : $2L_2$, $2L'_2$, $2L''_2$. La compression d'un diamètre des grands cercles correspondants PP' et QQ' (fig. 124) ne produit pas d'électricité. Deux des octants PQ et P'Q' correspondent aux sommets du tetraèdre, les deux autres PQ' et QP' aux faces opposées.

D'après les observations de MM. Curie, les premiers deviennent positifs quand on exerce une pression en un point quelconque de leur surface et les autres négatifs; le maximum doit avoir lieu quand la pression agit au milieu de l'octant.

514. Dilatation électrique des cristaux. — M. Lippmann a déduit encore du principe de la conservation de l'électricité que l'électrisation d'un cristal piezoélectrique est accompagnée d'un changement de forme.

Puisqu'une tourmaline s'électrise par compression, une électrisation de même sens doit dilater le cristal.

Comme la charge piezoélectrique est proportionnelle à la pression, dans les limites des expériences, le coefficient h du n° 76 est constant et indépendant de la différence de potentiel x; l'équation (16) indique alors que la capacité C d'un condensateur à lames de tourmaline est indépendante de la pression que l'on fait subir au cristal.

Il en est de même pour le quartz; MM. Curie [1] ont vérifié directement ce phénomène inverse par diverses méthodes.

L'une d'elles consiste à serrer, entre deux plaques de bronze maintenues à distance invariable, un parallélipipède de quartz dont les bases, perpendiculaires à un axe binaire, sont couvertes de lames de cuivre en communication respective avec les pôles d'une machine de Holtz; le cristal se dilate quand

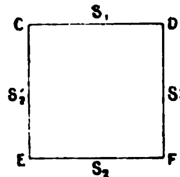


Fig. 125.

on porte les pôles à une différence de potentiel très élevée, de même signe que celle que produirait la compression.

Pour mettre en évidence cette dilatation, MM. Curie intercalent sous le quartz précédent, entre les mâchoires, un second quartz dont les bases bc sont parallèles à un axe binaire. La dilatation du premier cristal comprime le second et les faces latérales ac du dernier s'électrisent. On pourrait encore remplacer le second quartz par un cube de verre dont la biréfringence permettrait d'évaluer la compression, mais un appareil de ce genre serait environ mille fois moins sensible que le manomètre piezo-électrique.

Par une autre disposition expérimentale, on a déterminé la dilatation du cristal à l'aide d'un levier amplificateur.

La dilatation électrique modifiant la structure du milieu, elle doit altérer ses propriétés optiques et se traduire dans les

[1] P. et J. Curie, *Journal de Phys.* (2), t. VIII, p. 169; 1889.

phénomènes de polarisation chromatique. Kundt (1) se servait d'un cube de quartz dont les faces S_1 et S_2 (fig. 125) sont perpendiculaires à l'un des axes binaires, la première S_1 étant supposée positive par compression ; les faces S'_1 et S'_2 sont parallèles à cet axe et à l'axe ternaire.

On couvre les faces S_1 et S_2 de lames métalliques en communication avec les pôles d'une machine de Holtz, et on observe les anneaux isochromatiques au travers des faces parallèles au plan de la figure.

Dans l'état naturel, ces anneaux sont circulaires. Quand les faces S_1 et S_2 ont des potentiels de même signe que ceux que produirait la compression, les anneaux deviennent des courbes elliptiques dont le grand axe est parallèle à l'électrisation, c'est-à-dire à la dilatation du cristal. Quand on change le signe des potentiels, les anneaux s'allongent dans une direction perpendiculaire à l'axe d'électrisation ; l'axe binaire subit alors une contraction.

Les résultats sont moins simples quand on électrise deux lames appliquées sur les surfaces S'_1 et S'_2 ; les grands axes des ellipses isochromatiques sont alors dirigés suivant les diagonales de la base, dans la direction CF, si la face S'_1 est positive, et suivant DE, si cette face est négative.

On sait, en effet, par les expériences relatives à la sphère, que l'angle β est égal à $90°$ quand l'angle α est de $45°$; une compression parallèle à la diagonale CF électrise donc les surfaces S'_1 et S'_2, la première étant positive. Par suite, l'électrisation artificielle des surfaces dans le même sens produit une dilatation suivant cette diagonale ; l'électrisation inverse dilate la diagonale DE.

515. Théorie de M. Voigt (2). — Dans un milieu soumis à des déformations quelconques, supposons que le point M, dont les coordonnées x, y et z sont rapportées à des axes fixes, éprouve un déplacement dont les projections sont u, v, et w. Pour un point M' infiniment voisin, dont les coordonnées primitives étaient $x+\delta x$, $y+\delta y$ et $z+\delta z$ les déplacements seront $u+du$, $v+dv$ et $w+dw$.

(1) KUNDT, *Wied. Ann.*, t. XVIII, p. 228 ; 1883.
(2) W. VOIGT, *Abh. der Kgl. Ges. der Wiss. Gœttingen*, p. 36 ; 1890. — RIECKE et VOIGT, *Wied. Ann.*, t. XLV, p. 523 ; 1892

Les projections ξ, η, ζ de la variation de distance des deux points sont alors

$$\xi = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z,$$

$$\eta = \frac{\partial v}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\delta z + \frac{\partial v}{\partial x}\delta x,$$

$$\zeta = \frac{\partial w}{\partial z}\delta z + \frac{\partial w}{\partial x}\delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\delta y.$$

Les coefficients $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial w}{\partial z}$ sont respectivement les dilatations λ_x, λ_y et λ_z de l'unité de longueur parallèlement aux axes de coordonnées.

La dérivée $\frac{\partial v}{\partial x}$ représente un *glissement* parallèle à l'axe des y; $\frac{\partial u}{\partial y}$ est aussi un glissement parallèle à l'axe des x; la somme $\mu_z = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ mesure la diminution qu'éprouve le dièdre droit formé par les plans zx et zy, dont l'arête est l'axe des z. La déformation totale est définie par les dilatations λ_x, λ_y, λ_z et les quantités μ_x, μ_y, μ_z.

Si le milieu s'électrise, par suite de cette modification mécanique, on peut admettre que les composantes A, B, C du moment électrique par unité de volume, ou de la polarisation, sont des fonctions linéaires des dilatations et des déformations, d'où résultent les équations

$$(6)\quad \begin{cases} A = \varepsilon_{1.1}\lambda_x + \varepsilon_{1.2}\lambda_y + \varepsilon_{1.3}\lambda_z + \varepsilon_{1.4}\mu_x + \varepsilon_{1.5}\mu_y + \varepsilon_{1.6}\mu_z, \\ B = \varepsilon_{2.1}\lambda_x + \varepsilon_{2.2}\lambda_y + \varepsilon_{2.3}\lambda_z + \varepsilon_{2.4}\mu_x + \varepsilon_{2.5}\mu_y + \varepsilon_{2.6}\mu_z, \\ C = \varepsilon_{3.1}\lambda_x + \varepsilon_{3.2}\lambda_y + \varepsilon_{3.3}\lambda_z + \varepsilon_{3.4}\mu_x + \varepsilon_{3.5}\mu_y + \varepsilon_{3.6}\mu_z. \end{cases}$$

Les coefficients ε sont les *constantes piézoélectriques*.

D'autre part, les forces élastiques dans un milieu dépendent de six composantes distinctes.

Sur l'unité de surface perpendiculaire à l'axe des x, la force élastique a une composante N_x normale et deux autres T_{xy} et T_{xz} tangentielles, les composantes relatives aux axes des y et des z seront, de même, N_y, T_{yz}, T_{yx} et N_z, T_{zx}, T_{zy}.

L'équilibre d'un élément de volume $dx\,dy\,dz$ exige d'ailleurs la condition $T_{yx}=T_{xy}$, car le couple de rotation autour de l'axe des z est égal à

$$T_{xy}\,dy\,dz\,.\,dx - T_{yx}\,dz\,dx\,.\,dy = (T_{xy} - T_{yx})\,dx\,dy\,dz.$$

On peut représenter ces deux composantes tangentielles, égales entre elles et perpendiculaires à l'axe des z, par T_z et les analogues par T_x et T_y.

Si l'on considère un élément de surface dS dont la normale a pour cosinus directeurs α, β et γ, les composantes X, Y et Z de la force élastique par unité de surface peuvent s'écrire

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \alpha N_x + \beta T_{yx} + \gamma T_{zx} = \alpha N_x + \beta T_z + \gamma T_y,\\ Y &= \beta N_y + \gamma T_{zy} + \alpha T_{xy} = \beta N_y + \gamma T_x + \alpha T_z,\\ Z &= \gamma N_z + \alpha T_{xz} + \beta T_{yz} = \gamma N_z + \alpha T_y + \beta T_x.\end{aligned}\right.$$

Enfin, quand on se borne aux termes du premier ordre, les déformations sont aussi liées aux composantes des forces élastiques par des équations linéaires.

En remplaçant les quantités λ et μ par leurs expressions en fonctions des forces élastiques, les équations (6) prendront la forme

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} -A &= \delta_{1.1}N_x + \delta_{1.2}N_y + \delta_{1.3}N_z + \delta_{1.4}T_x + \delta_{1.5}T_y + \delta_{1.6}T_z,\\ -B &= \delta_{2.1}N_x + \delta_{2.2}N_y + \delta_{2.3}N_z + \delta_{2.4}T_x + \delta_{2.5}T_y + \delta_{2.6}T_z,\\ -C &= \delta_{3.1}N_x + \delta_{3.2}N_y + \delta_{3.3}N_z + \delta_{3.4}T_x + \delta_{3.5}T_y + \delta_{3.6}T_z.\end{aligned}\right.$$

Les coefficients δ, ou *modules piézoélectriques*, sont directement accessibles à l'expérience.

Les constantes ε s'exprimeront en fonction des modules δ si l'on connaît les propriétés élastiques du milieu.

516. Réduction des coefficients. — Dans le cas général (hémiédrie du système triclinique) il existe 21 coefficients élastiques, 18 constantes ε et 18 modules δ, mais la symétrie réduit beaucoup le nombre de ces coefficients. Nous examinerons seulement quelques cas particuliers.

L'état mécanique du système étant déterminé par les N et T relatifs aux axes précédents, supposons d'abord que l'on

conserve l'axe des z en prenant de nouveaux axes x' et y' faisant avec les premiers un angle θ (α, β, $\gamma = 0$).

Pour une surface perpendiculaire à l'axe des x', les composantes de la force élastique s'obtiendront en faisant $\gamma = 0$ dans les équations (7). Les composantes normale et tangentielles relatives à cette surface seront alors :

$$\begin{aligned} N'_x &= \alpha X + \beta Y = \alpha^2 N_x + \beta^2 N_y + 2\alpha\beta T_z, \\ T'_z &= \alpha Y - \beta X = \alpha\beta(N_y - N_x) + (\alpha^2 - \beta^2) T_z, \\ T'_y &= Z \qquad\qquad = \alpha T_y + \beta T_x. \end{aligned}$$

L'axe des y' fait avec l'axe des x l'angle $\theta + 90°$; il suffira donc de remplacer dans ces expressions α par $-\beta$ et β par α, pour obtenir les composantes normale et tangentielles relatives à une surface perpendiculaire à l'axe des y'. On trouve ainsi deux relations nouvelles

$$\begin{aligned} N'_y &= \beta^2 N_x + \alpha^2 N_y - 2\alpha\beta T_z, \\ T'_x &= \alpha T_x - \beta T_y. \end{aligned}$$

Enfin, la composante normale de la force élastique sur la surface perpendiculaire à l'axe des z n'étant pas modifiée,

$$N'_z = N_z.$$

D'autre part, les composantes A', B', C' de la polarisation rapportées aux nouveaux axes sont

$$\begin{aligned} A' &= A\alpha + B\beta, \\ B' &= B\alpha - A\beta, \\ C' &= C. \end{aligned}$$

Lorsque l'axe des z est de répétition pour l'angle θ, ces composantes doivent s'exprimer en fonction des N' et T' par les équations (8) avec les mêmes modules δ. On a donc

$$\begin{aligned} A\alpha + B\beta &= -(\delta_{1.1} N'_x + \delta_{1.2} N'_y + \cdots\cdots), \\ B\alpha - A\beta &= -(\delta_{2.1} N'_x + \delta_{2.2} N'_y + \cdots\cdots), \\ C &= -(\delta_{3.1} N'_x + \delta_{3.2} N'_y + \cdots\cdots). \end{aligned}$$

En exprimant les composantes A, B, C, ainsi que les N et

T′ en fonction des N et T, ces équations doivent se réduire à des identités, puisqu'elles sont indépendantes de l'état du système. Il en résulte les 18 conditions suivantes, qui ne sont pas d'ailleurs entièrement distinctes :

$$\alpha\delta_{1.1}+\beta\delta_{2.1}=\alpha^2\delta_{1.1}+\beta^2\delta_{1.2}-\alpha\beta\delta_{1.6},$$
$$\alpha\delta_{1.2}+\beta\delta_{2.2}=\beta^2\delta_{1.1}+\alpha^2\delta_{1.2}+\alpha\beta\delta_{1.6},$$
$$\alpha\delta_{1.3}+\beta\delta_{2.3}=\delta_{1.3},$$
$$\alpha\delta_{1.4}+\beta\delta_{2.4}=\alpha\delta_{1.4}+\beta\delta_{1.5},$$
$$\alpha\delta_{1.5}+\beta\delta_{2.5}=\alpha\delta_{1.5}-\beta\delta_{1.4},$$
$$\alpha\delta_{1.6}+\beta\delta_{2.6}=2\alpha\beta(\delta_{1.1}-\delta_{1.2})+(\alpha^2-\beta^2)\delta_{1.6};$$

$$\alpha\delta_{2.1}-\beta\delta_{1.1}=\alpha^2\delta_{2.1}+\beta^2\delta_{2.2}-\alpha\beta\delta_{2.6};$$
$$\alpha\delta_{2.2}-\beta\delta_{1.2}=\beta^2\delta_{2.1}+\alpha^2\delta_{2.2}+\alpha\beta\delta_{2.6},$$
$$\alpha\delta_{2.3}-\beta\delta_{1.3}=\delta_{2.3},$$
$$\alpha\delta_{2.4}-\beta\delta_{1.4}=\alpha\delta_{2.4}+\beta\delta_{2.5},$$
$$\alpha\delta_{2.5}-\beta\delta_{1.5}=\alpha\delta_{2.5}-\beta\delta_{2.4},$$
$$\alpha\delta_{2.6}-\beta\delta_{1.6}=2\alpha\beta(\delta_{2.1}-\delta_{2.2})+(\alpha^2-\beta^2)\delta_{2.6};$$

$$\delta_{3.1}=\alpha^2\delta_{3.1}+\beta^2\delta_{3.2}-\alpha\beta\delta_{3.6},$$
$$\delta_{3.2}=\beta^2\delta_{3.1}+\alpha^2\delta_{3.2}+\alpha\beta\delta_{3.6},$$
$$\delta_{3.3}=\delta_{3.3},$$
$$\delta_{3.4}=\alpha\delta_{3.4}+\beta\delta_{3.5},$$
$$\delta_{3.5}=\alpha\delta_{3.5}-\beta\delta_{3.4},$$
$$\delta_{3.6}=2\alpha\beta(\delta_{3.1}-\delta_{3.2})+(\alpha^2-\beta^2)\delta_{3.6}.$$

1° Si l'axe des z est binaire, on fera $\alpha=-1$ et $\beta=0$, ce qui donne

$$0=\delta_{1.1}=\delta_{1.2}=\delta_{1.3}=\delta_{1.6},$$
$$0=\delta_{2.1}=\delta_{2.2}=\delta_{2.3}=\delta_{2.6},$$
$$0=\delta_{3.4}=\delta_{3.5}.$$

Le système est alors défini par 8 modules différents :

$$\delta_{1.4},\quad \delta_{1.5},$$
$$\delta_{2.4},\quad \delta_{2.5},$$
$$\delta_{3.1},\quad \delta_{3.2},\quad \delta_{3.3},\quad \delta_{3.6}.$$

2° Si cet axe est quaternaire, on pourra faire aussi $\alpha = 0$ et $\beta = \pm 1$, d'où les nouvelles conditions

$$\delta_{2.4} = \delta_{1.5}, \quad \delta_{1.5} = -\delta_{1.4}, \quad \delta_{3.2} = \delta_{3.1}, \quad \delta_{3.6} = 0.$$

Il n'existe plus que 4 modules différents

$$\delta_{1.4}, \quad \delta_{1.5}, \quad \delta_{3.1}, \quad \delta_{3.3}.$$

3° Lorsque les cosinus α et β sont tous deux différents de zéro, on a toujours

$$\begin{gathered} 0 = \delta_{1.3} = \delta_{2.3} = \delta_{3.4} = \delta_{3.5} = \delta_{3.6}, \\ \delta_{2.4} = \delta_{1.5}, \quad \delta_{2.5} = -\delta_{1.4}, \quad \delta_{3.2} = \delta_{3.1}, \\ 0 = \delta_{1.1} + \delta_{1.2} = \delta_{2.1} + \delta_{2.2}. \end{gathered}$$

4° Si l'axe est ternaire, ou plus généralement d'ordre impair, une même valeur de α correspond à deux valeurs de β égales et de signes contraires, ce qui exige les conditions

$$\delta_{2.1} = -\delta_{2.2} = \frac{1}{2}\delta_{1.6},$$

$$\delta_{1.2} = -\delta_{1.1} = \frac{1}{2}\delta_{2.6}.$$

Les relations (8) deviennent alors

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} -A &= \delta_{1.1}(N_x - N_y) + \delta_{1.4} T_x + \delta_{1.5} T_y + 2\delta_{2.1} T_z, \\ -B &= \delta_{2.1}(N_x - N_y) + \delta_{1.5} T_x - \delta_{1.4} T_y - 2\delta_{1.1} T_z, \\ -C &= \delta_{3.1}(N_x + N_y) + \delta_{3.3} N_z. \end{aligned} \right.$$

5° L'axe étant d'ordre impair, supposons que le plan des yz soit un plan de symétrie. Une déformation symétrique par rapport à ce plan ne modifie pas l'aimantation, ce qui exige les conditions $0 = \delta_{1.1} = \delta_{1.4}$. Il reste alors

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} -A &= \delta_{1.5} T_y + 2\delta_{2.1} T_z, \\ -B &= \delta_{2.1}(N_x - N_y) + \delta_{1.5} T_x, \\ -C &= \delta_{3.1}(N_x + N_y) + \delta_{3.3} N_z. \end{aligned} \right.$$

6° Supposant toujours que l'axe des z est d'ordre impair,

si l'axe des x est binaire, on peut faire tourner le système de 180° autour de cette droite, sans que la forme des relations soit modifiée, d'où résultent les relations

$$\begin{array}{lll} A' = A, & N'_x = N_x, & T'_x = T_x, \\ B' = -B, & N'_y = N_y, & T'_y = -T_y, \\ C' = -C, & N'_z = N_z, & T'_z = -T_z. \end{array}$$

Les conditions d'identité exigent alors

$$o = \delta_{1.5} = \delta_{2.1} = \delta_{3.1} = \delta_{3.3}.$$

Dans ce cas, les composantes de la polarisation ne dépendent que de deux modules différents et deviennent

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} -A = \delta_{1.1}(N_x - N_y) + \delta_{1.4} T_x, \\ -B = -\delta_{1.4} T_y - 2\delta_{1.1} T_z, \\ -C = o, \end{array} \right.$$

517. Application au quartz et à la tourmaline. — La symétrie particulière ($2L_3$, $3L_2\,\lambda_2$) du *quartz* correspond au dernier cas et les composantes de la polarisation sont représentées par les équations (11).

La polarisation est donc toujours normale à l'axe ternaire, puisque la composante C est nulle, et la valeur de N_z n'intervient pas dans le phénomène. Une compression uniforme parallèle à l'axe ternaire ne produit aucune électrisation.

Considérons un parallélipipède rectangle dont les *côtés* a, b et c sont respectivement parallèles aux axes des coordonnées.

Si l'on exerce une pression $P = p.bc$ sur les faces bc, on a

$$N_x = -p, \quad o = N_y = T_x = T_y = T_z;$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} -A = \delta_{1.1} N_x = -\delta_{1.1} p, \\ \quad B = o. \end{array} \right.$$

Le cristal se polarise suivant l'axe des x, parallèle à la pression, et la charge électrique des faces est

$$Q = A\,bc = \delta_{1.1}\,p.bc = \delta_{1.1} P.$$

Cette quantité d'électricité est proportionnelle à la pression et indépendante de l'étendue de la surface.

Enfin si la pression $P' = p'.ac$ s'exerce sur les faces ac, parallèles aux axes ternaire et binaire,

$$N_y = -p', \quad o = N_x = T_x = T_y = T_z;$$

$$(13) \qquad \begin{cases} -A' = -\delta_{1.1} N_y = \delta_{1.1} p', \\ B' = 0. \end{cases}$$

La polarisation se produit encore suivant l'axe binaire, mais dans une direction opposée à la précédente, et la charge de la même face bc est

$$Q' = A' bc = -\delta_{1.1} p'.bc = -\delta_{1.1} \frac{b}{a} P'.$$

Les coefficients qui interviennent dans ces deux compressions sont égaux et de signes contraires, conformément à l'expérience.

D'après MM. Riecke et Voigt, on aurait $\delta_{1.1} = 6{,}45.10^{-8}$, valeur très voisine de celle qu'avaient obtenue MM. Curie.

L'arête c du parallélipipède étant toujours dirigée suivant l'axe ternaire, supposons que le côté a fasse l'angle θ avec l'axe binaire. En exerçant une pression p par unité de surface sur les faces latérales bc, on aura

$$o = T_x = T_y = N_z;$$

$$-p = \frac{N_x}{\cos^2\theta} = \frac{T_z}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{N_y}{\sin^2\theta};$$

$$(14) \qquad \begin{cases} A = \delta_{1.1} p(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \delta_{1.1} p \cos 2\theta, \\ B = -2\delta_{1.1} p \sin\theta\cos\theta = -\delta_{1.1} p \sin 2\theta. \end{cases}$$

La polarisation résultante I et l'angle Θ qu'elle fait avec l'axe des x sont

$$I = \delta_{1.1} p, \qquad \Theta = -2\theta.$$

Cette polarisation est indépendante de l'angle θ et située du côté de l'axe binaire opposé à la compression; ces résultats sont conformes aux expériences de M. Röntgen.

Supposons encore que, l'arête a du parallélipipède restant dirigée suivant l'axe binaire, le côté c fasse l'angle θ' avec l'axe ternaire. Une pression $P = p.ab$ sur les faces ab donne alors $B = C = 0$ et

$$(15) \qquad A = -p(\delta_{1.1}\sin^2\theta' - \delta_{1.4}\sin\theta'\cos\theta').$$

Toute compression perpendiculaire à l'axe binaire produit donc une polarisation parallèle à cet axe; la mesure de la charge électrique sur les faces normales à cet axe permet ainsi de déterminer le second module $\delta_{1.4}$ qui se trouve égal à $-1,45.10^{-8}$.

La polarisation est nulle pour $\theta' = 0$, ce qu'on avait déjà vu, et pour la condition

$$\operatorname{tang}\theta' = \frac{\delta_{1.4}}{\delta_{1.1}} = -\frac{1,45}{6,45},$$

qui correspond aux directions $\theta' = -12^\circ 40'$ et $\theta' = \pi - 12^\circ 40'$.

La polarisation est maximum pour les deux directions rectangulaires déterminées par l'équation

$$(16) \qquad \operatorname{tang} 2\theta' = \frac{\delta_{1.4}}{\delta_{1.1}},$$

qui correspond aux directions $\theta' = 83^\circ 40'$ et $\theta' = -6^\circ 20'$.

Ainsi le maximum d'effet piézoélectrique ne correspond pas exactement à une pression perpendiculaire à l'axe optique et il existe une autre direction que cet axe pour laquelle la polarisation s'annule.

On peut traduire la formule (15) par une courbe en coordonnées polaires (fig. 126), en portant sur la direction de la compression une longueur proportionnelle à la polarisation qui se produit suivant l'axe binaire. Cette courbe est symétrique par rapport aux deux directions OA et OB de polarisation maximum, car, en désignant par α l'un des angles définis par l'équation (16), l'expression (15) de la polarisation peut s'écrire

$$(15)' \qquad A = -\frac{p\delta_{1.1}}{2}\left[1 - \frac{\cos 2(\theta' - \alpha)}{\cos 2\alpha}\right].$$

Les petites boucles OC et OD correspondent à une polarisation de signe contraire à celle qui est indiquée par les grandes boucles. Cette polarisation inverse est si faible qu'on a dû multiplier les rayons vecteurs par 10 pour rendre l'effet plus visible sur la figure.

D'autre part, M. Voigt a déterminé les 6 coefficients qui définissent les propriétés élastiques du quartz ; avec les valeurs des modules δ, on peut en déduire les constantes ε et, par suite, les relations qui existent entre le dégagement

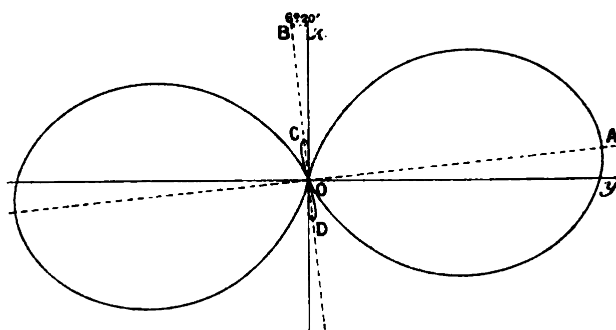


Fig. 126.

d'électricité et la déformation. Pour la symétrie particulière du quartz, les formules (6) deviennent

$$A = \varepsilon_{1.1}(\lambda_x - \lambda_y) + \varepsilon_{1.4}\mu_x,$$
$$B = -\varepsilon_{1.4}\mu_y - \varepsilon_{1.1}\mu_z,$$
$$C = 0,$$

avec les valeurs numériques

$$\varepsilon_{1.1} = 4{,}67 . 10^4 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{1.4} = 1{,}73 . 10^4.$$

La symétrie ($L^3\lambda^3$, 3P) de la *tourmaline* correspond aux équations (10) ; quatre modules différents sont nécessaires pour représenter les phénomènes piézoélectriques.

Une compression parallèle à l'axe optique donne

$$A = B = 0, \quad C = \delta_{3.3}\,p :$$

la polarisation se produit alors suivant l'axe ternaire, comme pour la pyroélectricité.

Une compression dans le sens de l'axe des x, c'est-à-dire perpendiculaire à l'un des plans de symétrie, produit une polarisation située dans ce plan, dont les composantes sont

$$C' = -\delta_{3.1} p' \quad \text{et} \quad B' = -\delta_{2.2} p'.$$

Enfin une compression parallèle à l'axe des y, c'est-à-dire dans le plan de symétrie, donne encore la même polarisation dans ce plan.

On en déduirait facilement l'effet produit par une compression quelconque.

Les expériences de MM. Voigt et Riecke conduisent aux valeurs suivantes des modules et des constantes :

$$\begin{aligned} \delta_{3.3} &= - \ 5{,}71 \cdot 10^{-8}, & \varepsilon_{3.3} &= +0{,}49 \cdot 10^{4} \\ \delta_{2.2} &= + \ 0{,}67 \cdot 10^{-8}, & \varepsilon_{2.2} &= +0{,}49 \cdot 10^{4} \\ \delta_{3.1} &= - \ 0{,}88 \cdot 10^{-8}, & \varepsilon_{3.1} &= -3{,}03 \cdot 10^{4} \\ \delta_{1.5} &= - \ 11{,}02 \cdot 10^{-8}, & \varepsilon_{1.5} &= -7{,}28 \cdot 10^{4}. \end{aligned}$$

MM. Curie ont fait remarquer que la pyroélectricité paraît liée surtout à la déformation de dilatation du cristal et que la variation de température elle-même ne semble jouer qu'un rôle secondaire. Partant de cette idée, M. Voigt a calculé, à l'aide des constantes piézoélectriques $\varepsilon_{3.3}$ et $\varepsilon_{3.1}$, quelle serait la polarisation de la tourmaline pour une déformation mécanique correspondant à celle que produit dans le cristal une variation de température d'un degré. Le nombre $C = 1{,}34$ ainsi obtenu est assez voisin de la valeur 1,24 déterminée directement par M. Riecke, au moins d'une manière approchée, pour la pyroélectricité de la tourmaline.

FIN DU TOME PREMIER

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE. — ÉLECTRICITÉ

CHAPITRE PREMIER

PRÉLIMINAIRES

CHAPITRE DEUXIÈME

POTENTIEL

CHAPITRE TROISIÈME

ÉQUILIBRE ÉLECTRIQUE

THÉORÈMES GÉNÉRAUX

ÉQUILIBRE DES CONDUCTEURS

CHAPITRE QUATRIÈME

DE L'ÉNERGIE

TRAVAIL DES FORCES ÉLECTRIQUES

PRINCIPES GÉNÉRAUX

CHAPITRE CINQUIÈME

DES DIÉLECTRIQUES

CHAPITRE SIXIÈME

CAS D'ÉQUILIBRE. — CONDUCTEURS

SYSTÈMES DE RÉVOLUTION

SYSTÈMES CYLINDRIQUES

CHAPITRE SEPTIÈME

CAS D'ÉQUILIBRE. — DIÉLECTRIQUES

CHAPITRE HUITIÈME

SOURCES D'ÉLECTRICITÉ

CHAPITRE NEUVIÈME

PROPAGATION DE L'ÉLECTRICITÉ

RÉGIME PERMANENT

RÉGIME VARIABLE

CHAPITRE DIXIÈME

ÉNERGIE DES COURANTS

CHAPITRE ONZIÈME

PHÉNOMÈNES THERMOÉLECTRIQUES

DEUXIÈME PARTIE. — MAGNÉTISME

CHAPITRE PREMIER

PRÉLIMINAIRES

CHAPITRE DEUXIÈME

CONSTITUTION DES AIMANTS

CHAPITRE TROISIÈME

CAS PARTICULIERS

CHAPITRE QUATRIÈME

AIMANTATION INDUITE

CHAPITRE CINQUIÈME

DES AIMANTS

CHAPITRE SIXIÈME

ÉTAT MAGNÉTIQUE DU GLOBE

TROISIÈME PARTIE. — ÉLECTROMAGNÉTISME

CHAPITRE PREMIER

COURANTS ÉLECTRIQUES ET FEUILLETS MAGNÉTIQUES

CHAPITRE DEUXIÈME

ACTIONS ÉLÉMENTAIRES

CHAPITRE TROISIÈME

CAS PARTICULIERS D'ÉLECTROMAGNÉTISME

EXPÉRIENCES DE CONTRÔLE

DES BOBINES

AIMANTATION PAR LES COURANTS

MESURE DES COURANTS

CHAPITRE QUATRIÈME

COURANTS INDUITS

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

CHAPITRE CINQUIÈME

CAS PARTICULIERS D'INDUCTION

PHÉNOMÈNES DIVERS

COURANTS PÉRIODIQUES

COEFFICIENTS D'INDUCTION

CHAPITRE SIXIÈME

UNITÉS DE MESURE

CHAPITRE SEPTIÈME

THÉORIES GÉNÉRALES

DIVERSES HYPOTHÈSES

PROPRIÉTÉS DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES. — THÉORIE DE LA LUMIÈRE

CHAPITRE HUITIÈME

INDUCTION DANS LES CONDUCTEURS

CONDUCTEURS CYLINDRIQUES

CONDUCTEURS DE FORME QUELCONQUE

CHAPITRE NEUVIÈME

ÉLECTRO-OPTIQUE

COMPLÉMENT

PROPRIÉTÉS DES CRISTAUX

RELATIONS GÉNÉRALES

DILATATION, CONDUCTIBILITÉS, INDUCTION

SYMÉTRIE DES SYSTÈMES

PYROÉLECTRICITÉ

PIEZOÉLECTRICITÉ

CORBEIL. — IMP. ÉD. CRÉTÉ.

